

Digital Terrain Model

— 地形の数値的表現の方法 —

Numerical Representation of Topography

中村 英夫*・村井 俊治*

Hideo NAKAMURA and Syunji MURAI

地形は従来地形図、断面図など図解的に表現されるのが一般であった。しかし道路、鉄道のような土木構築物の自動設計を行なう場合、これらの地形に関する情報を計算機の記憶できる形で表現することが必要である。本文ではこの地形の数値的表現 (Digital Terrain Model) についてその考え方と方法を解説する。

1. Digital Terrain Model の概念

道路や鉄道の路線設計、あるいは土地造成の設計など多くの土木構築物の設計に際しては地形条件が支配的な影響をおよぼすことが多い。したがって、これらの設計問題を電子計算機で取り扱う場合には、従来地形図ないしは断面図によりグラフィカルに表現されてきた地形をなんらかの形でデジタルな形で表現し、計算機に与える必要がある。

このように数値的に表現された地形モデルは Digital Terrain Model と呼ばれ10数年以前に MIT の Miller によって道路の路線設計にとり入れられた。しかしながら当時の計算機の能力をもっては広い範囲の地形を細部にわたって表現することが不可能であったため、ヨーロッパやわが国においては、それが現実の設計において利用されることはきわめてまれであった。

ところが、最近の最適設計ないしは自動設計の気運は電子計算機の能力の向上とあいまって再びこの Digital Terrain Model に着目せしめ、種々のタイプのモデルが提唱され、フランス、スウェーデンなどにおいてはそれがすでに実際の道路設計に利用されるようになった。

Digital Terrain Model は、このように地形を電子計算機内に記憶させるものであるが、その表現のしかたには、折線によって断面を表わすような非常に簡単なものからきわめて複雑なものまで種々の方法が考えられる。しかしいずれの場合にも必要とされるのは以下のような条件を満たすことである。

- (1) Digital Terrain Model のために用いる地形データは、能率的な方法で得られること。
- (2) できる限り少ない数の与えられた点により、所要の精度を保って地形を近似しうること。
- (3) 計算機内でのモデルの組み立ておよび求めるべき点の内挿に要する時間が少ないこと。

Digital Terrain Model を構成するために与える地形データを能率的に得るには二つの方法が考えられる。一つは航空写真によりつくられたステレオモデルを、プロフィールスコープをとりつけた写真測量図化機を用いて測定する方法である。これによれば地形上の任意の点

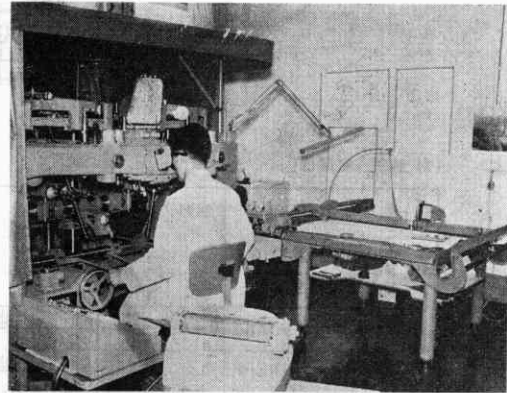


写真1 航空写真測量図化機による Terrain Points の測定

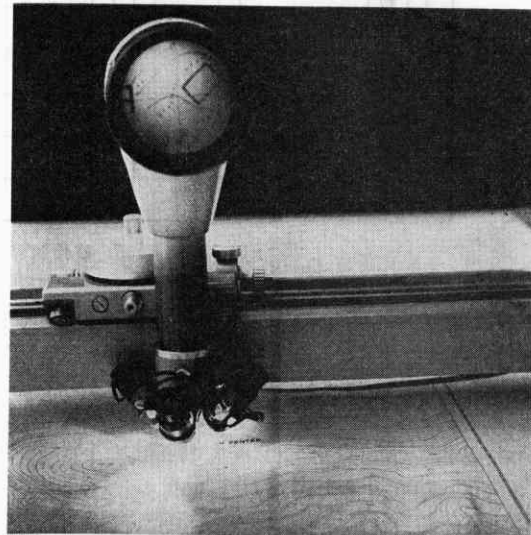


写真2 地形図より座標記録装置を用いての Terrain Points の測定

(Terrain Point と呼ぶ) の x, y, z 座標値が得られ、しかもその値は自動記録装置によりカードないしテープにせん孔されるので、きわめて迅速な測定が可能である(写真1)。他の方法は地形図がすでにある場合、この上で必要な Terrain Point の座標を測り取る方法である。この際任意の点の x, y, z 座標値を機械的に読みとることはできないため等高線上の点の x, y 座標値を座標読

* 東京大学生産技術研究所第5部

取装置 (写真2) によって読み、カードまたはテープに各等高線上の点列の座標を記録する (図 1-a) か、または各断面線が等高線を切る点の x, y 座標を読み、その等高線の標高値とともにその値をせん孔して記録する (図 1-b). この方法は地形図が既存のとき、経済的に

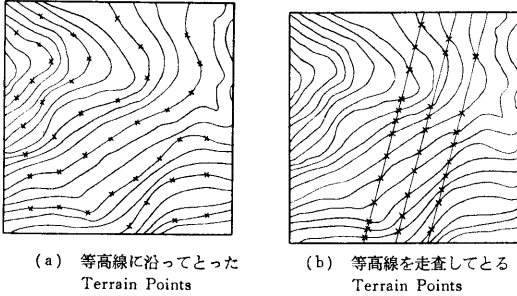


図 1

Digital Model のための地形データを得ることができるが、地形図を介するため、航空写真から直接求める方法に比べるとデータの精度の劣化はまぬがれることができない。

2. 種々の Digital Terrain Model

Digital Terrain Model は原理的には地形上の無数の点 (Terrain Point) の XYZ 座標値の集合として地形を表現するのであるが、先に述べたように測定の能率や近似の精度、内そうの難易などの理由のため、その表わし方は、次に述べるようなタイプに限定されよう。

1) 断面の集まりによる表現

$z = f_i(x), y = y_i$ ($i=1, 2, \dots$) なる断面の集まりとして表わされるものであって、初期の MIT の方法などがこれに当たる¹⁾ (図 2). 表示の方法がきわめて簡単である点便利であるが、各断面の間のつながりがないため中間の点の内挿は不たしかである。

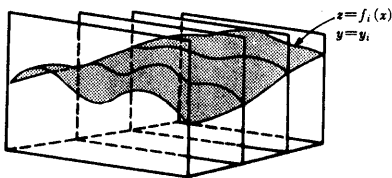


図 2 断面の集まりによる表現

2) 曲面による表現

地形は $z = f(x, y)$ なる曲面により表わされるものであって、2次または3次曲面が用いられる。フランス道路局で行なっている方法²⁾ では、地形はランダムに配置された Terrain Point の xyz 座標の形で計算機に記憶され、地形面は標高を求めるべき点を中心とした半径 r の円の中に含まれる Terrain Point を用いて、3次曲面を Surface fitting して近似される。求めるべき点の標高は、その曲面上の点として内挿される (図 3). この場合この中心から Terrain Point までの距離の2乗に反比する重みをつけて最小自乗法を適用し、さらに中心

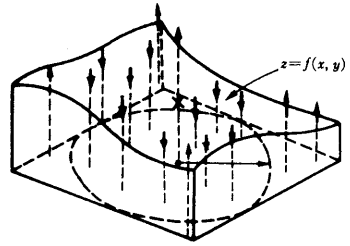


図 3 曲面による表現 (フランスの方法)

から最も近い6点について Student 検定により適合度を判定する。スウェーデンの方法³⁾ もこれと似たものであるが、2次曲面を近似させている。

この種の方法は Terrain Point が任意の点に配置し得るため、地形の急激な変化点をとらえることが可能であるが、逆にどの点を測定するかは写真測量図化機のオペレータの判断によるため、測定に多くの時間を必要し、また精度の均一性が主観に左右される危険をもつ。計算時間とくに高さを求めるべき点の周囲の Terrain Point の search に要する時間が多いのも一つの難点である。なお直交多項式を用いれば、多項式の次数を高めて近似を改良してゆくとき計算量が大きくふえることがないので便利である。ソヴィエトの Keyfets⁴⁾ はこれを提唱している。

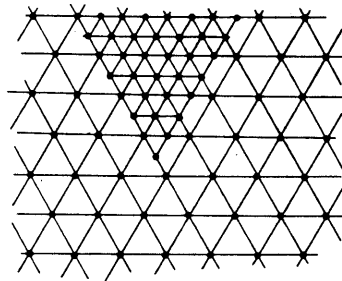


図 4 三角形格子状に配置した Terrain Points

曲面近似をきわめて単純化したのがフィンランドの方法⁵⁾ であるが、そこでは Terrain Point を図 4 に示されるような三角形格子状に選んで三角多面体

をつくる。求めるべき点の高さは、それを囲む三角形の頂点の座標よりきめた平面上の点として求められる。地形の複雑なところでは、さらに補助の Terrain Point をとり、この三角格子の間隔はせばめられるが、精度的にはあまり高いものを期待し得ない。

われわれが試みた Digital Terrain Model TS-1 はこの曲面近似の一種であるがこれは3章で述べる。

3) 等高線による表現

地形は等高線 $f_i(x, y) = 0, z = z_i$ の群としても表現しうる。等高線による表示は、等高線がその本来の性質上地形の急しゅんないしは複雑なところでは密に、なだらかなところでは粗に存在するものであるため、比較的少ない数の等高線に沿った Terrain Point により目的を達することができる。また既存の地形図より Digital Terrain Model をつくるときには等高線上にない点の xyz 座標を測定するのは困難であるため、等高線に沿

って xy 座標を記録する等高線表示が便利である。この方法の難点は、任意の点の高さの内挿に大量の計算を必要とすることである。

3. Digital Terrain Model TS-1

われわれは曲面近似にもとづく Digital Terrain Model の一つとして次に述べる TS-1 モデルをつくり、その精度などをしらべてみた。

1) TS-1 モデルの作製

Terrain Point は等間隔格子上に配置され、主として航空写真測量図化機により測定せられる。その測定値としての XYZ 座標値は格子交点の配列に対応して計算機に記録される。

まず Terrain Point の X, Y 座標は格子に平行する座標系 xy に変換され隣り合う 4 点を用いて各格子に沿う断面形が 3 次曲線

$$\begin{aligned} z &= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \\ z &= b_1y^3 + b_2y^2 + b_3y + b_4 \end{aligned} \quad (1)$$

により近似せられる。この曲線より各格子交点およびその交点の中間の点における地形面の接線 T_x, T_y を計算する (図 5)。

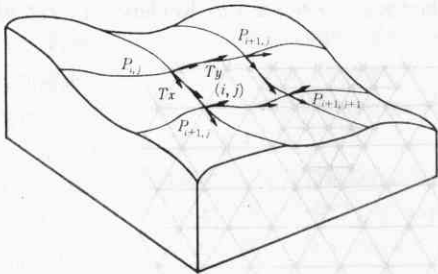


図 5 TS-1 モデルの構成

格子によって分割される各区画内の地形面は次の 3 次曲面

$$\begin{aligned} z = f(x, y) &= a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 + a_5x^2 \\ &+ a_6xy + a_7y^2 + a_8x + a_9y + a_0 \end{aligned} \quad (2)$$

によって近似せられる。

この式の係数 $a_0 \sim a_9$ は、この曲面が四つの各格子点において与えられた標高値を示し、かつ、その接線こう配 $(\partial f / \partial x), (\partial f / \partial y)$ がすでに決められている接線こう配 T_x, T_y からずれる量の総和を最小にするという条件のもとでの最確値として計算される。すなわち

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - T_x \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - T_y \right\}^2 \right] \\ &+ [\lambda \{ f(x, y) - z \}] \end{aligned} \quad (3)$$

を最小にするように係数を求める。ここで $[]$ はガウスの総和記号を示す。これより連立方程式

$$\frac{\partial S}{\partial a_p} = 0 \quad p = 0, 1, \dots, 9 \quad (4)$$

$$f(x_q, y_q) - z_q = 0 \quad q = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

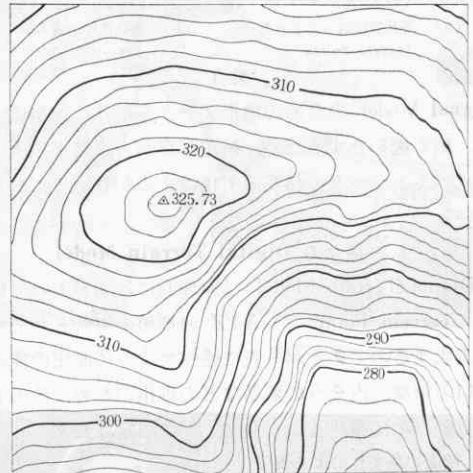
の解として a_0, \dots, a_9 の最確値が求められる。この

(4), (5) 式は 13 元連立方程式となるが、格子点 $P_{i,j}, P_{i+1,j+1}$ の座標をそれぞれ $(0, 0), (1, 1)$ となるように変換をしておけばこの連立方程式 $AX=B$ において A^{-1} の値はどの区画の曲面についても等しくなるため $X=(a_0, \dots, a_9, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ は $X=A^{-1}B$ として簡単に求めることができる。

かようにして必要とする地形全面が数多くの曲面 $z=f(x, y)$ の形で表現されて計算機に記憶される。

2) TS-1 のテスト

任意の点 (X, Y) の標高値 Z はこの XY を Digital Model の xy 座標系に変換したのち (2) 式より計算される。



Contour Map of the Experiment Field
Procured Photogrammetrically

SCALE 1 : 1000

図 6 テスト地域の地形図
(航空写真測量により作製)

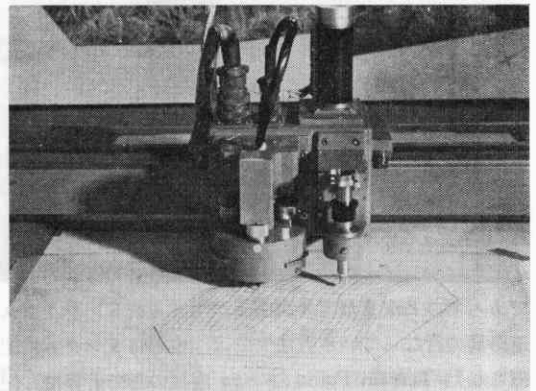
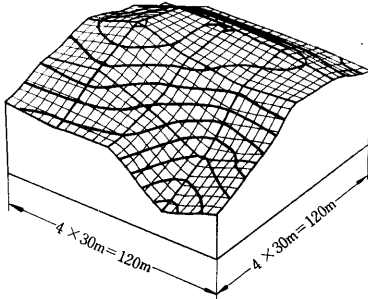


写真 3 自動製図機による TS-1 モデルの透視図描画

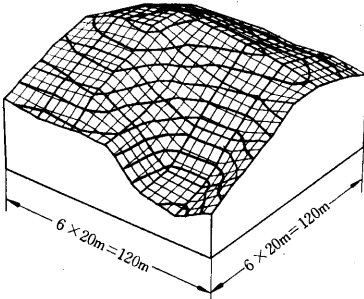
このモデルのテストは、鹿児島宇宙空間観測所内の一地区を航空写真測量により測定した地形データを用いて行なわれた。この地域の地形は図 6 に示されるごとく、きわめて複雑な形状を示している。Terrain Point は正

方形格子状に各間隔 30m, 20m, 10m の三通りに配置された。

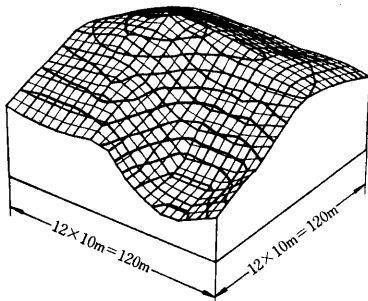
その結果 3 次曲面群として形成された Digital Terrain Model を自動製図機を用いて (写真 3) 描き, 透視図的に表わしたのが図 7 である。これらの三通りの TS-1 モ



(a) 格子間隔 30m



(b) 格子間隔 20m



(c) 格子間隔 10m

図 7 TS-1 モデル曲面近似

デルから

$$f(x, y) - z_i = 0$$

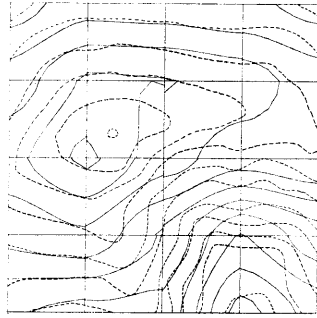
の解として求めた等高線は図 8 に示されているが, この図における点線は元の正しい等高線を表わしている。ここで求められた等高線は図 7 の透視図上においても示されている。

標高のわかっている 36 点について, これらの Digital Terrain Model から標高を内挿して求めた結果は, 次のような近似精度を示した。

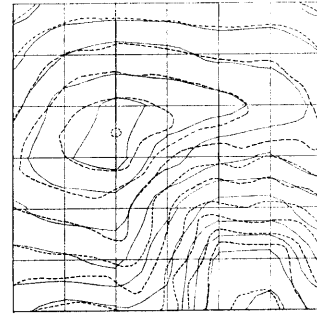
- 30m 間隔に Terrain Point を与えた場合
標高中等誤差 ±2.38m
- 20m 間隔に Terrain Point を与えた場合
標高中等誤差 ±1.17m

10m 間隔に Terrain Point を与えた場合

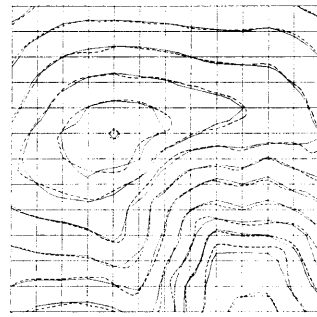
標高中等誤差 ±0.54m



(a) 格子間隔 30m



(b) 格子間隔 20m



(c) 格子間隔 10m

図 8 TS-1 モデルより内挿して得た等高線 (実線) と航空写真測量により求めたもとの等高線 (点線)

この結果の示すように, 当然のこととはいいながら, 近似精度は与える Terrain Point の間隔により大きく左右される。全域にわたってこの Terrain Point の数を増加させることはきわめて不経済であるから, 均一な近似精度を保つためには, 地形の急激な変化のあるところでは Terrain Point を増やす必要がある。

それゆえにこの TS-1 モデルにおいては地形変化の複雑な箇所においては格子間隔を半分にして Terrain Point の配置を密にして与えることができるように準備されている。

TS-1 モデルの構成およびこれより任意の点の高さを計算するに要する時間は比較的少ないものであって, 1,000 個の Terrain Point よりなるモデルをつくるに要する時間は HITAC 5020 で約 2.5 分, 100 点の標高値を内挿するに必要な時間は 30 秒程度である。

4. Digital Terrain Model TS-2

われわれが TS-2 モデルと呼ぶ Digital Terrain Model は, 等高線群による地形の表示を行なうものであって各等高線を Fourier 級数により近似する。すなわち一つの等高線上に $2n + 1$ 個の Terrain Point をとりその座標 x_i, y_i を用いて

$$x_i = f(t_i) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t_i + a_2 \cos 2t_i + \dots + a_n \cos nt_i + b_1 \sin t_i + b_2 \sin 2t_i + \dots + b_n \sin nt_i$$

$$y_i = g(t_i) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 \cos t_i + c_2 \cos 2t_i + \dots + c_n \cos nt_i$$

$$+d_1 \sin t_i + d_2 \sin 2t_i + \dots + d_n \sin nt_i$$

と表わす. ここでパラメータ t_i はあらかじめ適当に定めた等高線の原点より Terrain Point $P(x_i, y_i)$ に至る等高線にほぼ沿った長さ l_i に対応するものであって

$$t_i = \pi i/n$$

と得られる. すなわち x および y は閉じた等高線に沿ってこの一回りを一周期とする周期関数として表現されるのである.

この級数式の係数 a_m, b_m, c_m, d_m ($m=0, 1; \dots, n$) は $2n$ 個の (x_i, y_i) より

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n} \sum x_i & a_m &= \frac{1}{n} \sum x_i \cos \frac{i\pi m}{n} \\ b_m &= \frac{1}{n} \sum x_i \sin \frac{i\pi m}{n} \\ c_0 &= \frac{1}{n} \sum y_i & c_m &= \frac{1}{n} \sum y_i \cos \frac{i\pi m}{n} \\ d_m &= \frac{1}{n} \sum y_i \sin \frac{i\pi m}{n} \end{aligned}$$

として得られる.

以上の計算は等高線がモデルの間で閉じている場合に成り立つが, 一般にはこれは開いているので図 9 に示すように $x=f(t), y=g(t)$ は不連続となり, 上のようにして級数を求めてもよい近似は得られない. そのためその場合は次のような工夫をする.

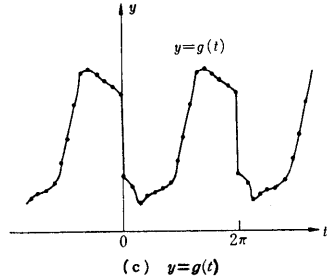


図 9 開いた等高線

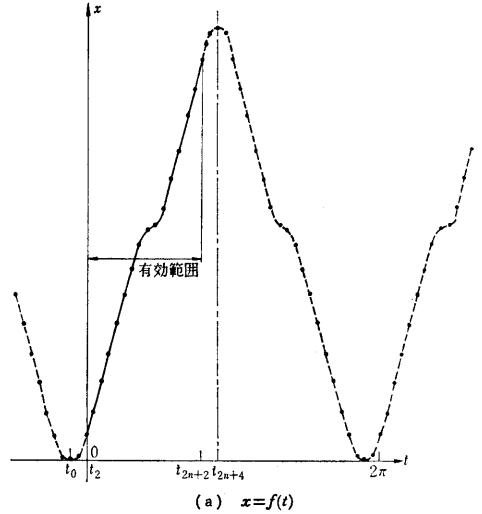


図 10 開いた等高線の偶関数による表現

まず与えられた $2n+1$ 個の Terrain Point のほかに等高線の両端に 2 点ずつの仮定の Terrain Point をつくる (図 10). これらの点の座標は, たとえば実際の等高線の終点の x 座標が $x_{2n+2} = f(t_{2n+2})$ であるとしたとき,

$$x_{2n+2} = \alpha t_{2n+2}^3 + \beta t_{2n+2}^2 + \gamma t_{2n+2} + \delta$$

$$\frac{x_{2n+2} - x_{2n+1}}{t_{2n+2} - t_{2n+1}} = 3\alpha t_{2n+2}^2 + 2\beta t_{2n+2} + \gamma$$

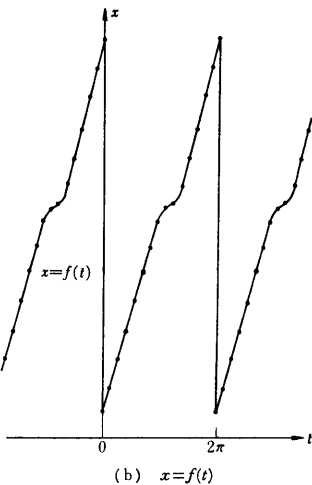
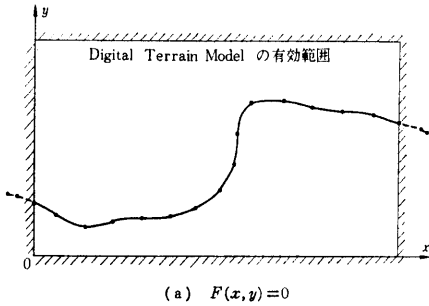
$$\frac{1}{2}(x_{2n+2} - x_{2n+1}) + x_{2n+2} = \alpha t_{2n+4}^3 + \beta t_{2n+4}^2 + \gamma t_{2n+4} + \delta$$

$$0 = 3\alpha t_{2n+4}^2 + 2\beta t_{2n+4} + \gamma$$

とし, これより係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を求める. そのとき t_{2n+3} における x の値は次のようにきめる.

$$x_{2n+3} = \alpha t_{2n+3}^3 + \beta t_{2n+3}^2 + \gamma t_{2n+3} + \delta$$

x_1 についても $x_0 = x_2 - 1/2(x_3 - x_2)$ として, 同様な



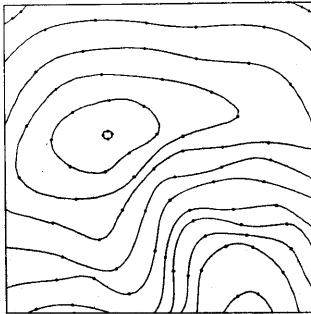
境界条件より x_1 の値を定める。

このような仮定の Terrain Point を用いることにより、図 10 に示されるような偶関数；

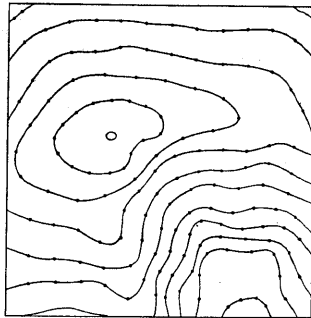
$$x = f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_{n+2} \cos (n+2)t$$

$$y = g(t) = \frac{c_0}{2} + c_1 \cos t + c_2 \cos 2t + \dots + c_{n+2} \cos (n+2)t$$

によりこの開いた等高線をよりよく近似することができる。しかも計算時間は閉じた等高線における場合より少なくて済むことができる。もちろんこの場合実際の等高線として有効範囲は $t_2 \leq t \leq t_{2n+2}$ である。



(a) Terrain points 103点



(b) Terrain points 182点

図 11 TS-2 モデル

このようにして構成した Digital Terrain Model を等高線図で示したのが図 11(a), (b)である。図に示された点は与えた Terrain point を表わす。またこれを元の正しい等高線と比較したのが図 12 の (a), (b) である。

2) profile の内挿

profile は等高線と断面線との交点を求めることによって得られる。したがって断面線、 $y = px + q$ と等高線 $x = f_k(t), y = g_k(t), z = z_k$ を解くことになる。

この連立方程式を解くことは逐次近似によるほかない。その場合 t の第 1 近似値を求めるときには振幅の比較的小さい項を省略して波形を単純化して計算する。

任意の一点の高さを内挿するにはその点を通り、互いに直交する 2 直線を考え、これらの直線とその点に最も近い二つの等高線との交点を求める。そしてそれらの交点と標高を求めるべき点との距離により等高線標高値を比例配分して標高値を決める。

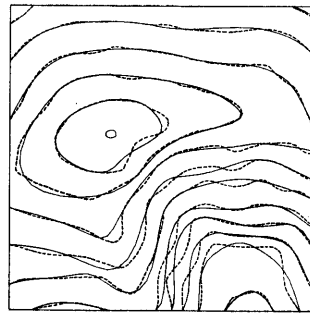
かようにして得た 36 個の点の標高の精度は図 11 に示されたモデルの場合次のとおりであった。

182 点の Terrain Point を用いたとき	標高中等誤差	±45cm
103 点の Terrain Point を用いたとき	標高中等誤差	±82cm

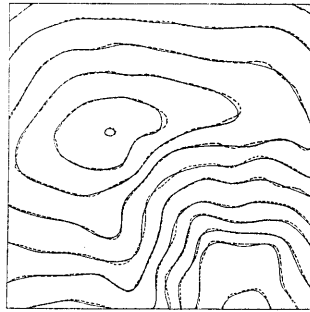
むすび

以上 Digital Terrain Model についての考えと方法を概略述べ、さらに当研究室において試みた TS-1, TS-2 の二つのモデルについて説明を加えてきた。

現時点においてはそれより得られる精度あるいはその計算時間などにおいて従来の graphical な表現の場合と比べて完全に満足なものとはいえないかも知れない。しかしながら地形のこの種の表現は地形条件に大きく影響される土木構造物の自動設計ないしは最適設計のためには



(a) Terrain points 103点



(b) Terrain points 182点

図 12 TS-2 モデルの等高線と航空写真測量より求めたもの等高線 (点線)

不可欠であり、さらにまた複雑な形状をした建築物⁶⁾、自動車の車体⁷⁾等の曲面の表現およびその smoothing などにも利用しうるものであるから今後さらに改良、発展せしめることが必要であろう。(1968年6月10日受理)

参考文献

- 1) C. Miller & R. Laflamme; The Digital Terrain Model—Theory and Applications, Photogrammetric Engineering, Vol. 29, No. 3
- 2) L. Gallas; Application du calcul électronique aux problèmes de tracés routiers, Revue Générale des Routes, Mars (1964)
J. Deligny; Les projets d'autoroutes à l'ère du dessin automatique, Revue Générale des Routes, Avril (1965)
- 3) H. Nordin; Digital terrain model for highway projects, Presented paper for Symposium of Intercommission 4 & 5 of International Society of Photogrammetry, (1967)
- 4) B. Kheyfetes; Approximation of a topographic surface by Chebyshev orthogonal polynomials, Izv. VUZov. Geod. i aerofototsyemka No. 1 (1958)
- 5) E. Viita & T. Kokko; The development of highway planning method in Finland, Presented paper for Symposium of Intercommission 4 & 5 of International Society of Photogrammetry, (1967)
- 6) K. Linkwitz; Ein kontinuierliches digitales Modell, dargestellt am Beispiel des Deutschen Pavillions Montreal, Bildmessung und Luftbildwesen, Sept. 1967
- 7) W. Johnson, J. Sanders & N. South; Analytic Surfaces for Computer-Aided Design, Presented paper for the Automotive Engineering Congress, Jan. 1966