

# 平面および曲面問題の追究

Pursuit of the Problems on Plates and Shells  
—Memoir of my Studies

坪井 善 勝\*

Yoshikatsu TSUBOI

30年にわたる著者の研究生活のなかで、特に愛着の深い平面板、平面応力、曲面板の力学に関する研究を振り返り、それらの研究成果が、壁式構造、シェル屋根構造、吊り屋根構造などの実際の建築構造とどのように結びついて行ったかを解説する。本年3月27日、当所で行なわれた著者の退官記念講演の内容を再録したものである。

## ま え が き

昭和17年10月九州大学工学部から本学第2工学部の建築構造学担当のため東京大学に赴任してから、25年有余になります。先輩、同僚の先生方、すぐれた卒業生の方々のご支援を得て、大過なく今日この日を迎えたことを感慨をこめて皆様に厚く御礼申し上げます。

この記念講演を行なわせていただくに当たり、30年にわたる研究生活の中で、私が最も愛着が強く、また生涯とも棄てきれないであろう研究のテーマである、応用力学における薄板、薄殻の問題の追求に焦点をしばらせていただきたいと思います。この研究を理論や実験による一般性の追求とともに、実際面への応用とまたその結果の反省と、さらに新問題解決への準備といった形で

1. 平面板 2. 平面応力 3. 曲面板  
の順序で今までの研究を振り返って見たいと思います。

## 1.1 平 面 板

### 1.1 弾性固定板

1940年には周辺単純支持板はもちろん周辺固定板の解

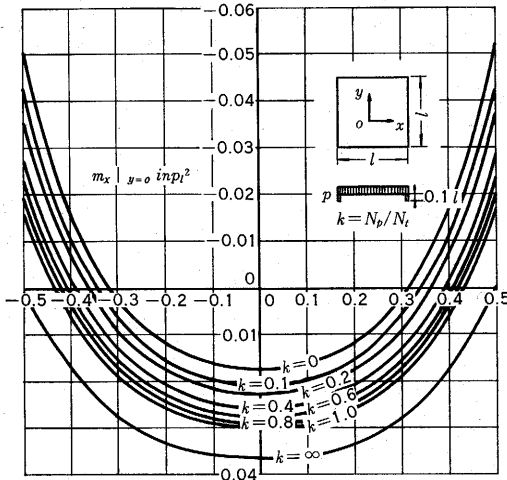


図 1.1 曲げモーメント ( $m_x|_{y=0}$ ) 分布図  
( $l$ : 辺の長さ)

もすでに完成していたとみてよい。これに対して、弾性固定板の解も二、三散見されるようになっていた。著者の平面板の解析は板とこれを支持する構造体の連続性をとり入れて、支持物の剛性が板の応力状態にどのように影響していくかを各種の角度から理論的に研究していったのである。解法は H. Hencky: Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, 1913 に用いられた Fourier 展開の方法を一般化したものである。当時の研究の傾向としては、変分法における直接法(たとえば Ritz, Courant, ...)や差分法の応用(たとえば H. Marcus)などがあったが、級数の収束性に工学的価値を認めて一貫して Fourier 級数展開に徹底した。図 1.1 は単純支持板と固定板、図 1.2 ~ 図 1.5 は固定板と無限連続無梁板

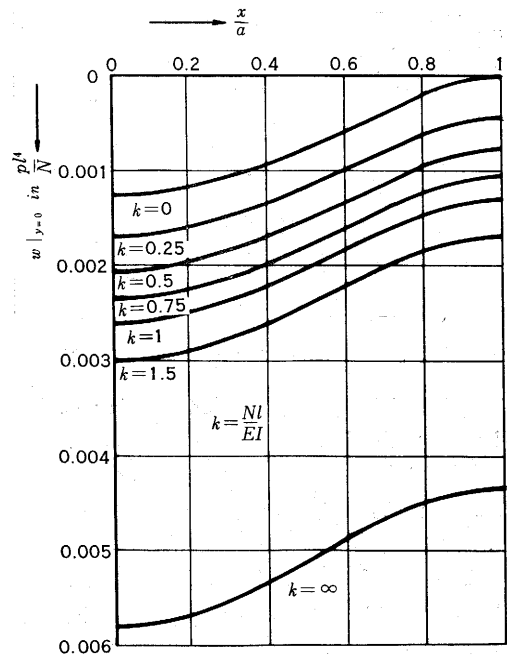
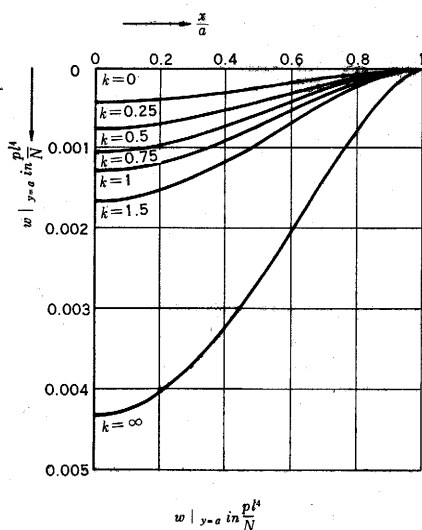
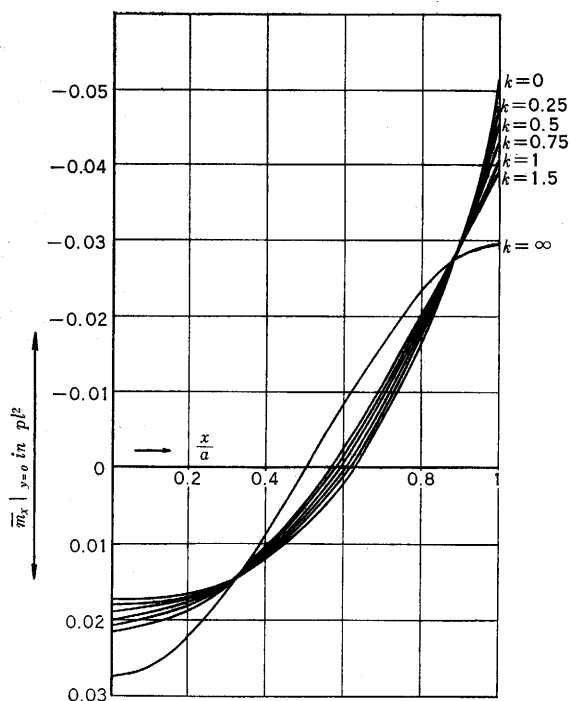
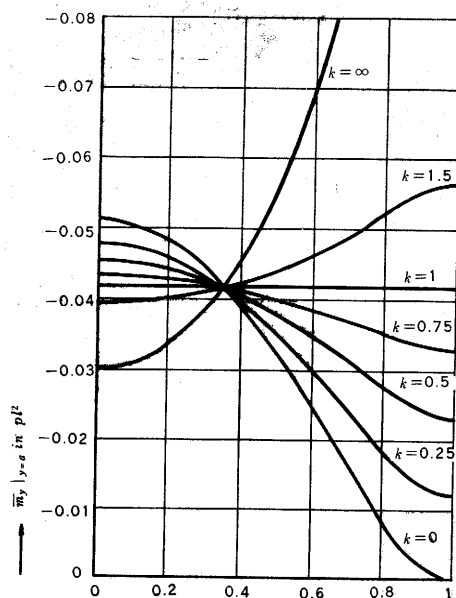
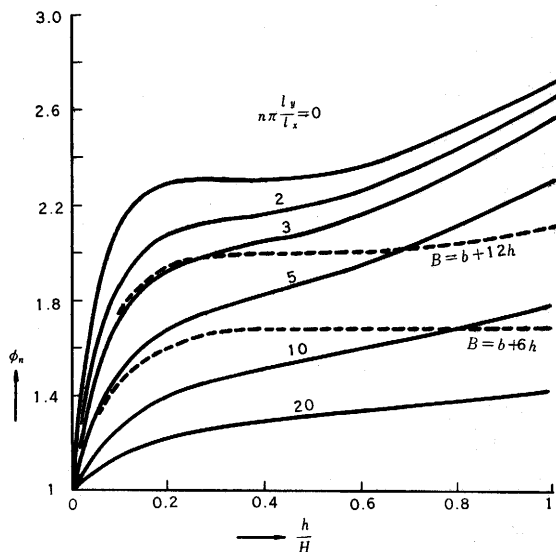


図 1.2 変位図 ( $w|_{y=0}$ )

\* 東京大学名誉教授・東北大学工学部

図 1.3 変位図 ( $w|_{y=a}$ )図 1.4 曲げモーメント ( $m_x|_{y=0}$ ) 分布図図 1.5 曲げモーメント ( $m_y|_{y=0}$ ) 分布図図 1.6  $\frac{b}{l_y} = \frac{1}{10}$  に対する  $\phi_n$  の値 ( $h$ : 板厚,  $H$ : はりせい)

との間の応力変化を支持物の剛度をパラメータとして算出したものである<sup>1)</sup>。ここで、 $k$  は周辺支持構造の曲げ剛度に対する板の曲げ剛度の比を表す。

### 1.2 T 形ばりの曲げ剛性<sup>2)</sup>

T 形ばりの有効幅の問題については W. Metzger, A. B. Miller (Luftfahrt forschung, 1929) の研究が比較的新しいものである。著者は、鉄筋コンクリート板の有効剛度  $I = \phi_n I_0$  (ここに  $I_0$  は矩形断面の断面 2 次モーメント) に対して、各種スパンおよび板厚に対して有効幅を介在させずに  $\phi_n$  を求めることを提案し、この解法には板

を平面応力だけでなく平面板応力をもとり入れて、通常の T 形ばりから無梁板構造まで適用される解を求め、また実験 (鋼製試験体) でこれを証明した。これらの実用図表は今日まで日本建築学会 “鉄筋コンクリート規準” の解説書に掲げられ、また通常の寸法のはりでは  $\phi_n = 1.5 \sim 2.0$  であることを指摘したことも構造物計算の迅速化に役立っていると思う。図 1.6, 1.7 に  $\phi_n$  の値を示す。

### 1.3 Box-framed Construction<sup>3)</sup>

床板が耐力壁に支えられ、はりも柱もない構造が

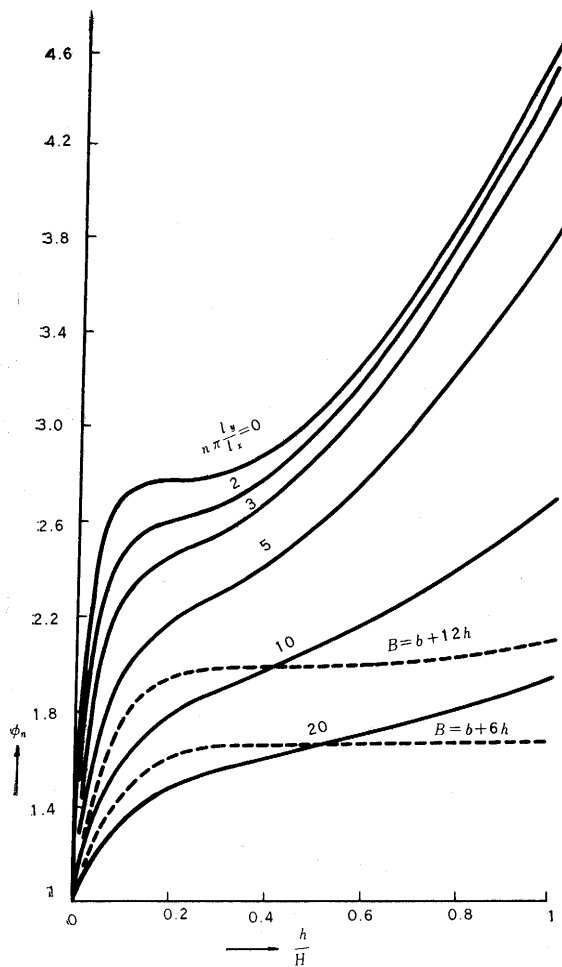


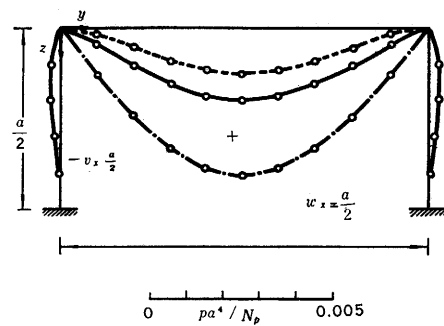
図 1.7  $\frac{b}{l_y} = \frac{1}{25}$  に対する  $\phi_n$  の値 ( $h$ : 板厚,  $H$ : はりせい)

box-framed construction である。欧米で用いられる耐力壁は主として煉瓦であるが日本では R. C. 板で造るのが本筋である。この構造を、平板と平板とが剛に結合された構造体として解き、また約 1/5 模型の試験体 2 個を破壊試験用に作成した。弾性計算の結果は図 1.8 に示すとおりである。

床板の破壊は固定板のそれに近く、壁体には平板としての曲げ ( $m_x^w$ ) と面内せん断力によるひびわれが発生したが、十分の耐力を発揮した(床板の曲げ破壊が先行)この解析と実験とは、中層 R. C. 構造である戦後の公共アパートの構造法を支配する壁式鉄筋コンクリート構造の実施に著者が自信を抱くようになった予備的研究であるといえる。

#### 1.4 合板の剛性係数の測定<sup>4)</sup>

1941年～1945年は第二次戦争の期間であり、研究は軍の委託研究がその大部分を占める。軽耐弾格納庫や地下工場建設の指導要項作成などは主として需品本廠、航空



変形状態 (点線  $k=0$ , 実線  $k=1$ , 鎖線  $k=\infty$ )

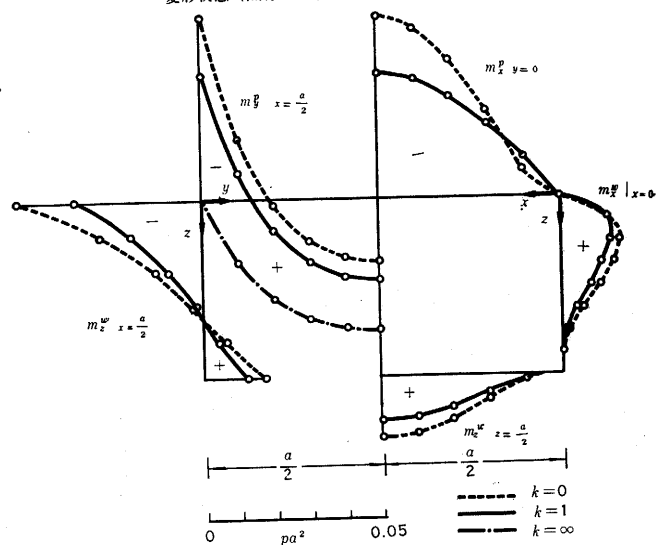


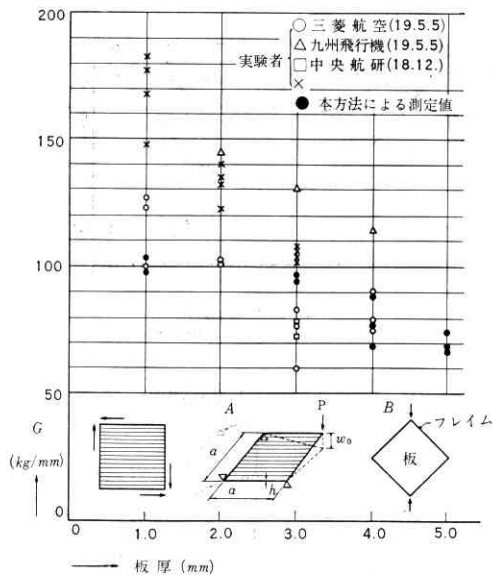
図 1.8 応力状態

本部の委託研究に属するが、最も強く記憶によみがえるのはアルミニウム (ジュラルミン) 不足に対応するための木製飛行機開発のための基礎研究が第一陸軍空技研から委嘱され、海軍空技廠との定期研究発表会が行なわれたときである。全木製機製作のための準備段階として直交異方性板の座屈、45° 張合板の座屈などが線型問題からはじめられたのである。

Southwell (1924 年) の等方性板に対するせん断座屈の解に準じた異方性板のせん断座屈などの解を求めていたのであるが、まず重要なのは合板のせん断剛性の値の決定であった。振りモーメントと振率について次式が成り立つ。

$$M_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{C \partial x \partial y}, \quad C = \frac{Gh^3}{6}$$

$h$  は板厚,  $G$  はせん断弾性係数,  $C$  は振り剛度である。多くの  $G$  の測定は図 1.9 に示す形式 B の試験であったが、著者は形式 A を提案した。

図 1.9 樺合板せん断弾性係数 ( $G$ ) 測定値一覧

$$C = \frac{Pa^2}{2w_0}, \quad G = 3 \frac{Pa^2}{w_0 h^3}$$

試験体製作および測定法は  $A$  がはるかに簡単であり、厚さ  $h$  の測定誤差が3倍になる欠点を上まわって測定値のばらつきは、きわめて小さかった。

図 1.9 は樺合板の  $G$  値であって●は著者によるものである。試験体寸法は  $150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$  で装置は簡単な木製台と乾電池、豆電球、マイクロメータで足りる。

#### 1.5 4 点支持板

鉄筋コンクリート平板に代わり同一単位の繰返しによる鉄骨骨組すなわち space frame は 1965 年内ノ浦ロケットセンターのロケット組立室（池辺教授担当）に用

いられた。（写真 1.1 a, b, 図 1.10）この double layer grid structure は振り剛性のない正方形板を4点で支えた構造である。解法は初期に連続体として振り剛性ゼロの板の差分方程式を用い、つぎに骨組解法に matrix displacement method を用いて、連続体としての解を check した。（図 1.11）

一般に4点支持は周辺単純支持あるいは固定板同様に平板の境界条件としても基本的なものである。今後の設計の資料として重要であると考えたので、等方性弾性体としての正方形板が4点支持されたときその支持の位置で変形および応力がどう変化するかを Fourier 級数解で求めた。手計算からデジタルコンピュータによる計算の時代に入っても、この解析法は形式的には無限連立方程式の解法であるから桁落ちその他の問題に十分注意しないと Fourier 級数そのものが答えにならないおそれがある。

板の基礎微分方程式は  $x = a\xi$ ,  $y = a\eta$  において諸量を無次元化すると

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{pa^3}{D} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

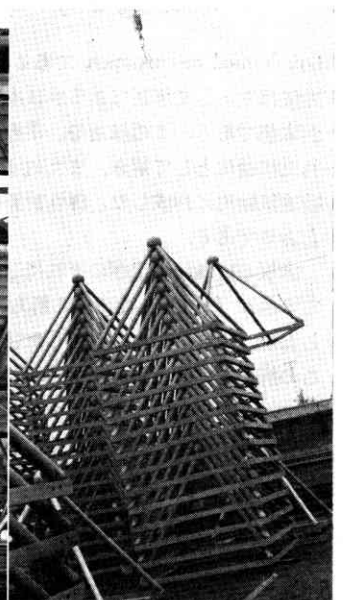
$p$ : 外力  $2a$ : 辺長  $D$ : 板剛度

変位  $w$  を  $w = w_1 + w_{II}$  とおく。 $w_1$  は  $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$  の一般解であり  $w_{II}$  は  $\nabla^2 \nabla^2 w = pa^3/D$  の特解である。

$$w_1 = \sum_n^{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots} \frac{1}{\alpha_n^3 \cosh \alpha_n} (A_n \cosh \alpha_n \eta + D_n \eta \sinh \alpha_n \eta) \cos \alpha_n \xi + \sum_m^{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots} \frac{1}{\alpha_m^3 \cosh \alpha_m} (A_m \cosh \alpha_m \xi + D_m \alpha_m \xi \sin \alpha_m \xi) \cos \alpha_m \eta + K_1 (\xi^6 - 3\xi^4 \eta^2 - 3\xi^2 \eta^4 + \eta^6 + 6\xi^2 + 6\eta^2) + K_2 (\xi^4 - 6\xi^2 \eta^2 + \eta^4) + K_3$$



写真 1.1 a 内ノ浦ロケットセンターロケット頭胴部組立室の屋根写真



1.1 b 立体鉄骨組のユニット

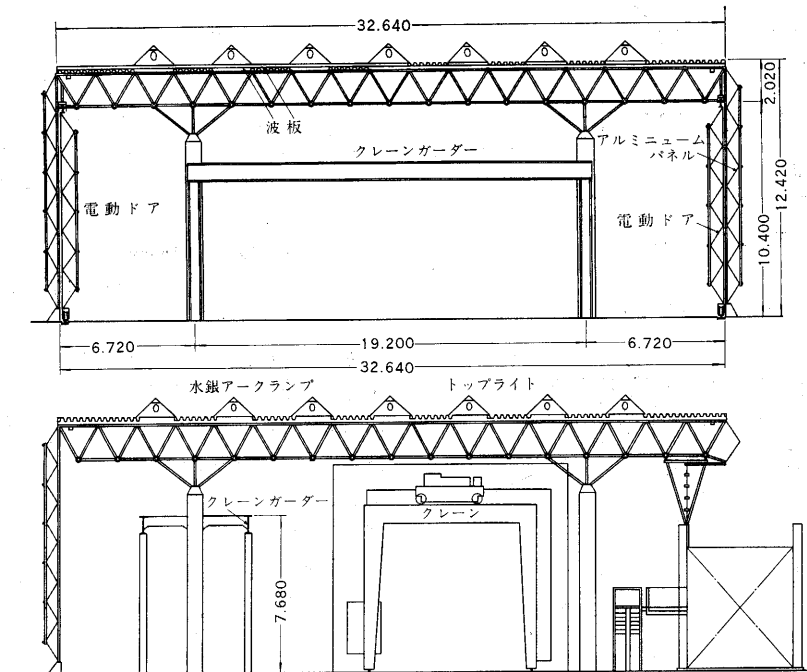


図 1.10 立体骨組の架構図

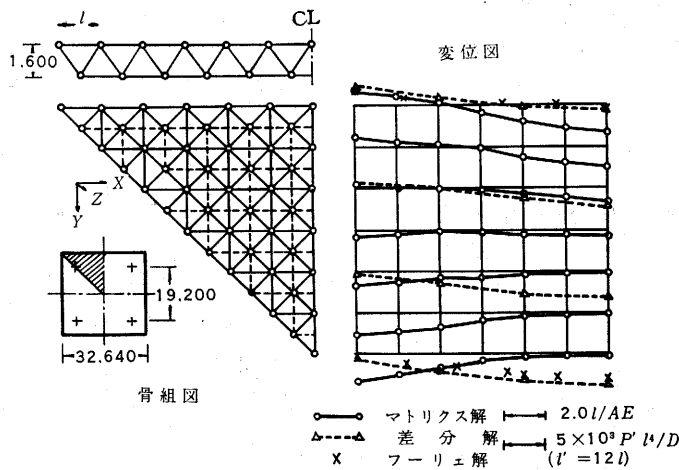


図 1.11 4点支持立体トラス板の変位図

$$w_{II} = \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \alpha_m \xi \cos \alpha_n \eta$$

$$w_{mn} = \frac{4}{\alpha_m \alpha_n (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2} (\sin \alpha_m \cdot \sin \alpha_n - \cos \alpha_m b \cdot \cos \alpha_n b \cdot \sin \alpha_m c \cdot \sin \alpha_n c / c^2)$$

おのおのの未知定数は、境界条件、隅条件で決定でき

る。ここに  $\frac{1}{\alpha_m^3 \cosh \alpha_m}$  において  $\alpha_m^3$  はせん断力の算定

の可能性を予測したものであり、 $\cosh \alpha_m$  は  $A_m$  の値が過小にならぬための工夫である。

図 1.12 a に示す平板において  $c=a/12$ ,  $m, n=1, 3, 5 \dots 37, 39$  の 20 項を採り、 $b=0 \sim 0.9 a$  とした場合の変位を図 1.12 b に示す。

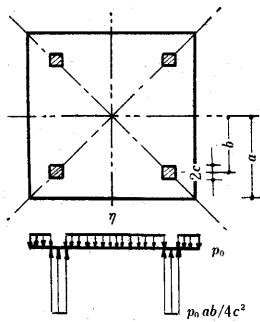


図 1.12 a

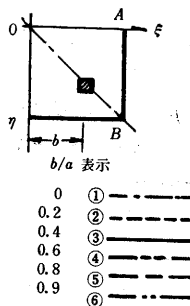
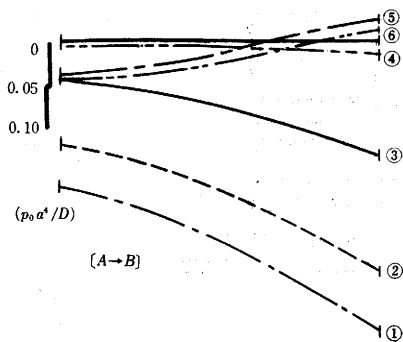
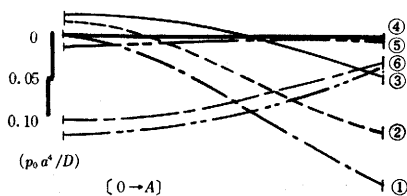
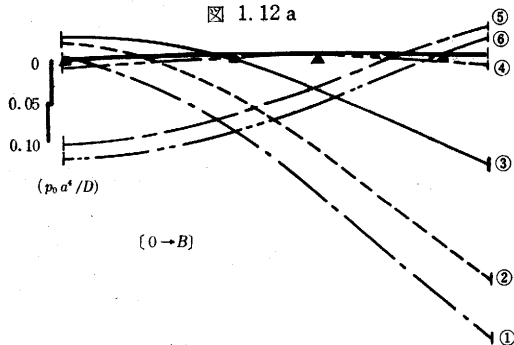


図 1.12 b 4点支持板の支点位置と変位の関係

## 2. 平面応力

壁式 R.C. 構法は、今日中層鉄筋コンクリート集合住宅の典型である。(図 2.1, 写真 2.1 a, b) この計画は昭和 22 年よりはじめられ、最初に施工されたものは高輪アパート (12 坪, 1948 年) であって現在の住宅公園の 2K あるいは 2DK の前身であるといえる。この床板および壁体 (厚 12~18 cm) のみの R.C. 構造は欧米でいう box-framed construction に属し、外壁はもちろん間仕切壁がすべて構造体としての機能を果たしているのがそのおもな特長であり、初期から 4 階建てで設計された。多くの基礎的研究のほかにも実大建造物の静的、動的実験の結果、耐震構造としては剛構造の典型であることが確認され、日本建築学会鉄筋コンクリート分科会でその設計規準が作成された。壁式構造<sup>5)</sup> が当初研究対象となつてから 20 年を経てこれの 5 階建ての計画に当たり、再びこの構造法の再検討 (主として 2DK を対象, 14~15 坪) とそのプレファブ化に伴う研究が住宅公園の委託によって行なわれることになったのである。

この構造物に生じる応力を鉄筋コンクリート板のせん断強さ (および曲げ強さ) の限界内に収めようとすれば、層せん断力の大小が壁量を決定する重要な要素となる。幸いこの剛構造物は地震に対して rocking 振動を生じ、これが地動に対する建物振動の減衰に役立ち (建研における実大実験および振動解析<sup>6)</sup>、適当な例とは言えないが新潟地震におけるアパート群の転倒、写真 2.2), 耐震壁の少ない通常のラーメン構造に比して層せん断力が小さいことが予想されるのである。

ところで構造体の骨組みである壁体、主として開孔をもつ外壁は、ラーメン構造体のように線材の構成とみるわけにはいかない。すなわち

- はり、および柱に相当する壁 (主として有開孔壁) の取扱い方および直交する壁体の有効幅の問題<sup>7)</sup>
- 開口部でかこまれたラーメン節点に相当する部分の取扱い方<sup>8)9)</sup>
- 層せん断力の各部 (壁体) への分布<sup>9)</sup>

などは構造設計に当たって解決せねばならぬ重要な課題である。これらに関する平面応力問題の解明は、鉄線モルタル模型実験で行なわれたが、一方光弾性およびモワレ法でその弾性的挙動が追求された。もっとも重要な結論としてはこの種 R.C. 構造は静的加力に対しては水平荷重震度 0.8 (設計震度の 4 倍) 以上に耐えることが示され、本構造のプレファブ化の可能性が十分示唆されたのである。

以下模型実験とその結果とを総括しよう。

- 2/3 模型の破壊実験<sup>9)</sup>

図 2.2 a に示す点線でかこまれた部分を取り出した構面に水平加力を行なった結果、図 2.2 b~d に示すよ

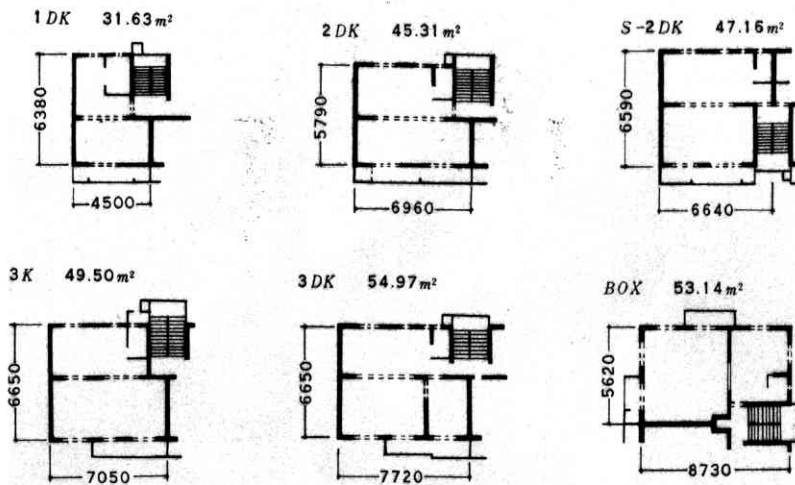


図 2.1 住宅公団アパートの間取



写真 2.1a 五月ヶ丘団地 (大阪)



写真 2.1b 常磐平団地

うなひび割れが発生し、終局耐力は設計震度 0.2 に対し 4.3 の安全率をもつことがわかった。

参考のために表 2.1 に 1 階のせん断耐力と設計用せん断力との関係を示し、図 2.3 に壁のひずみ度分布が示してある。

#### b) 弾性体としての構造計算法<sup>9)</sup>

A, B 構面では、曲げモーメント分布はラーメン計算で十分はりのみ剛域(柱幅)をとり、はり、柱とも曲げ、せん断変形を用いた解が最も実験値に近い。図 2.4 および写真 2.3 に試験体および実験装置を示し、図 2.5 に各種解法による計算値と実験値の比較を示す。

C 構面はラーメン計算に不適当である。

#### c) 直交壁の効果<sup>7)</sup>

軸力  $N$  および曲げモーメント  $M$  を受ける直交壁をもつ壁体の理論的終局強度(○印実験値)は図 2.6 のとおりである。(点線は直交壁のない場合を示す)

#### d) 実験による応力解析

- 写真 2.4 に示す光弾性による応力測定<sup>9)</sup>や写真 2.5 に示すモアレ法<sup>9)</sup>は、線材として解析することが無意味なとき(たとえば C 構面)の応力解析の手段としてきわめて有効である。
- 隅角部におけるひび割れは写真 2.5 に示すように



写真 2.2 新潟地震で転倒した川岸町アパート (新潟市)

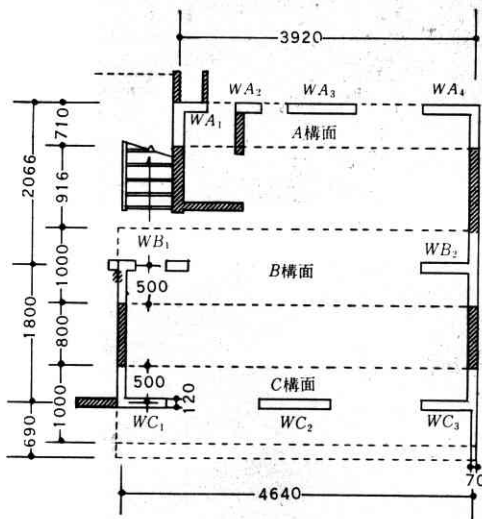


図 2.2 a 構面配置図

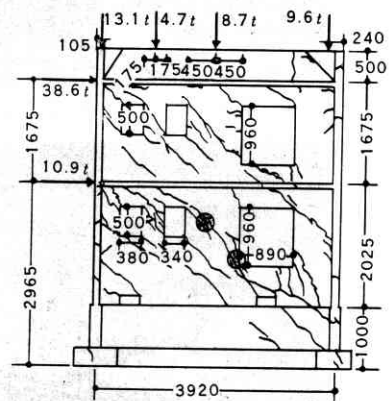


図 2.2 b A 構面ひび割れおよび破壊時の加力 (寸法 mm) 注: ○印の部分がせん断破壊を起こした

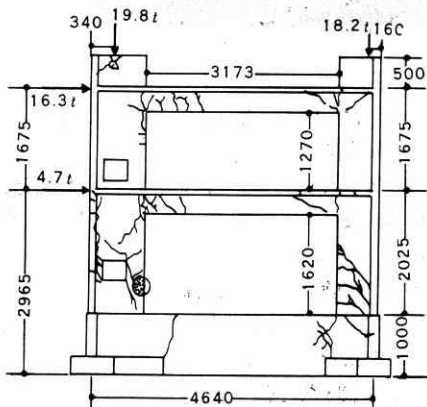


図 2.2 c B 構面のひび割れおよび破壊時の加力 (寸法 mm) 注: ○印の部分がげ曲によって圧縮破壊を起こした

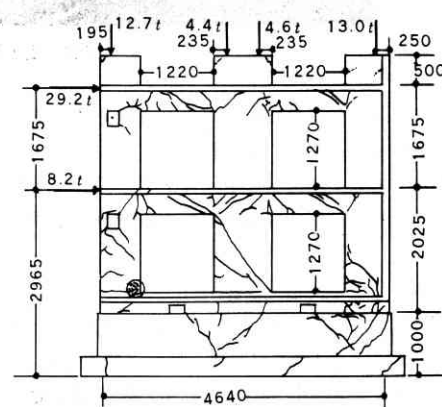


図 2.2 d B 構面のひび割れおよび破壊時の加力 (寸法 mm) 注: ○印の部分が曲げによって圧縮破壊を起こした



表 2.1 1 階のせん断耐力と設計用せん断力の関係

|     |   | A 構面         | B 構面         | C 構面         |                    |
|-----|---|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| 実験値 | $Q_u$ (ton)<br>$\tau_u$ (kg/cm <sup>2</sup> ) | 49.5<br>16.9 | 21.0<br>11.0 | 37.4<br>13.4 | 計 107.9<br>平均 14.2 |
| 設計値 | $Q$ (ton)<br>$\tau$ (kg/cm <sup>2</sup> )     | 9.4<br>3.24  | 6.2<br>3.24  | 9.0<br>3.24  | 計 24.6<br>平均 3.24  |
|     | せん断耐力 $Q_u$<br>設計用せん断力 $Q$                    | 5.2          | 3.4          | 4.1          | 平均 4.3             |

注 i  $Q$  の値は、試験体の縮尺 (2/3) を考慮して、実際の設計値を (2/3)<sup>2</sup> = 4/9 倍した。

ii 実験値  $cF_c \approx 190 \text{ kg/cm}^2$ ,  $cE_c \approx 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$   
 材令 36~85 日,  $sF_{ty} \approx 2,800 \text{ kg/cm}^2$

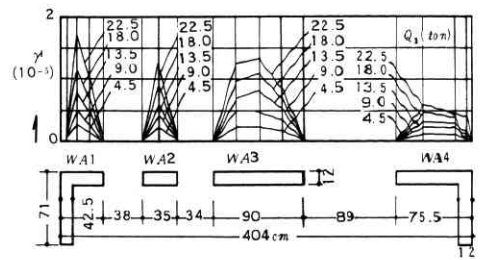


図 2.3 A 構面 1 階のひずみ度分布図

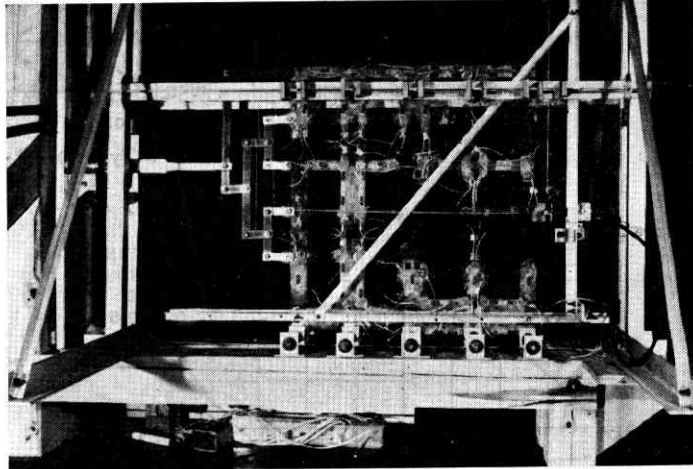
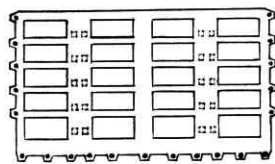
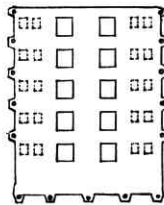


写真 2.3 ひずみ変位の測定



B ラーメン



C ラーメン

図 2.4 試験体形状、アクリル樹脂板 (5mm 厚) より平面模型を切り出し (縮尺 1/30 および 1/40)、地中ばりを杭位置でピン支持し、各階に等分布の水平荷重を与える。柱、はりのひずみ (抵抗線ひずみゲージ) および地中ばり中心線に対する各階の水平変位 (電磁式変位計) を測定した。各測定量は XY レコーダに導き、荷重—ひずみ、荷重—変位曲線を、自動記録させた。

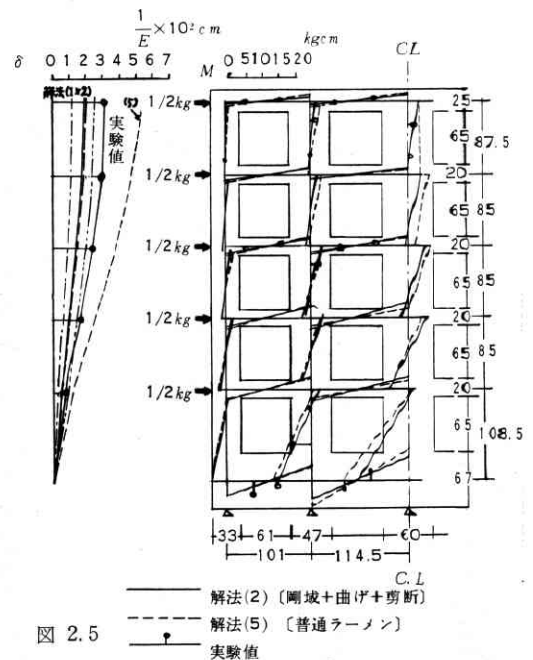


図 2.5

解法(1)…接合部: 剛体, 材: 曲げ変形のみ 解法(2)…接合部: 剛体, 材: 曲げ変形+せん断変形 解法(3)…はりにのみ剛域 (柱, 欄), 材: 曲げ+せん断変形 解法(4)…接合部: せん断変形のみ, 材: 曲げ+せん断変形 解法(5)…剛域なし, 材: 曲げ変形のみ (普通ラーメン)

図 2.5 各種解法による変位および曲げモーメントの比較図

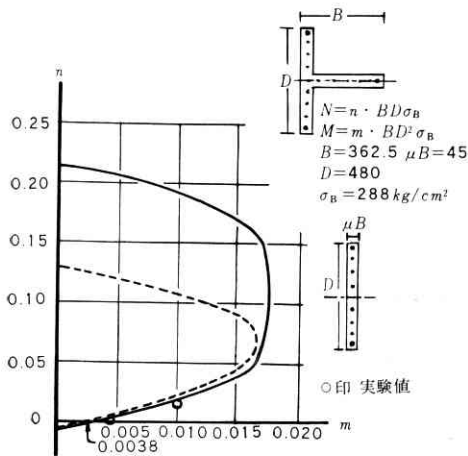


図 2.6 a B Type の降伏曲線

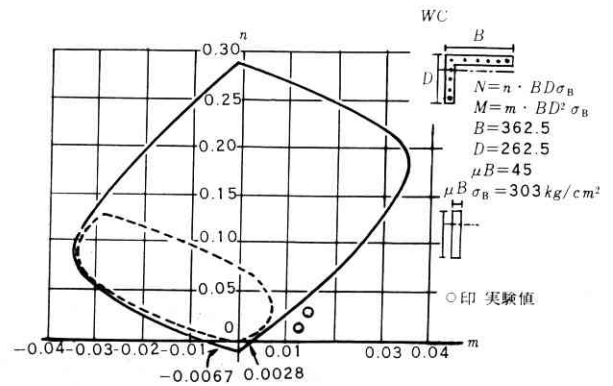


図 2.6 b C Type の降伏曲線

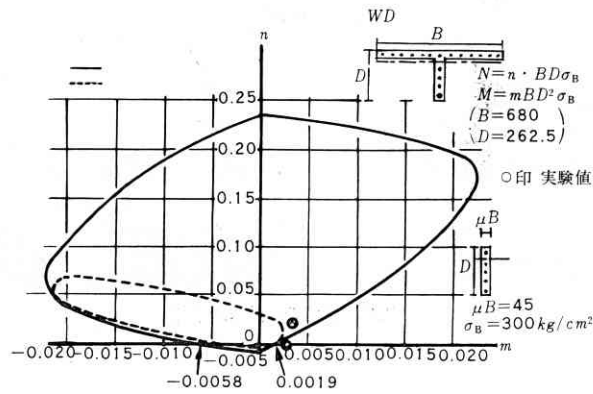


図 2.6 c D Type の降伏曲線

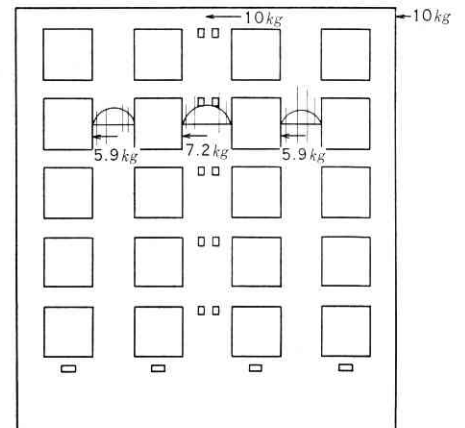
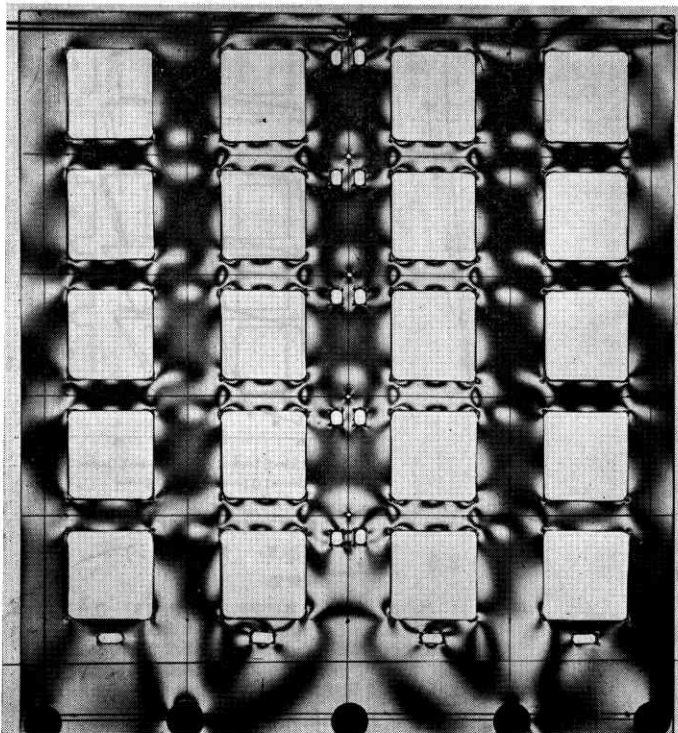


写真 2.4 光弾性実験

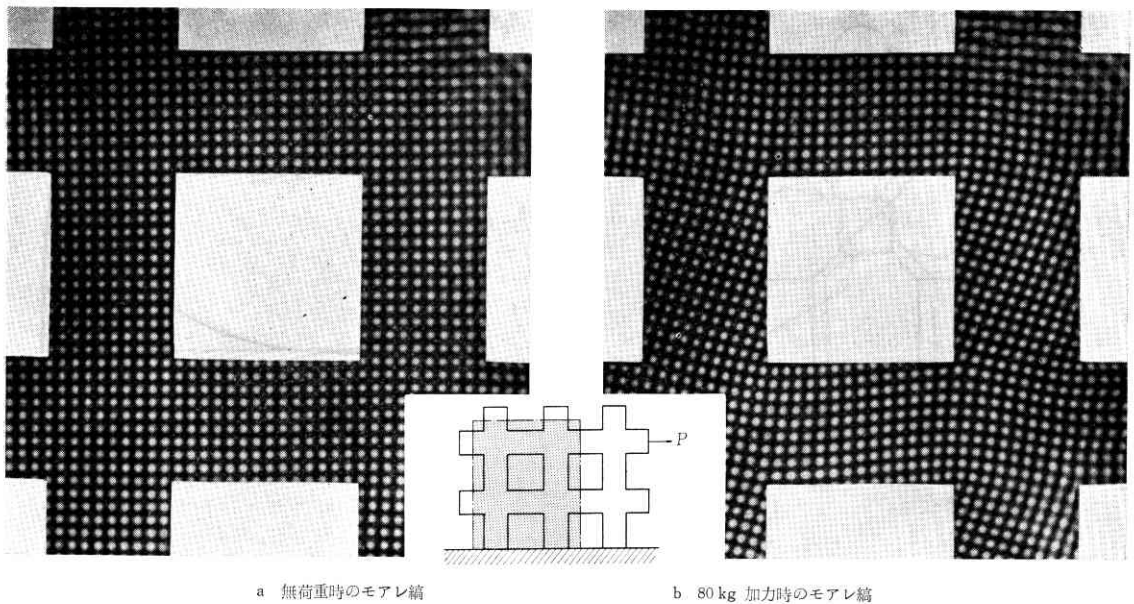


写真 2.5

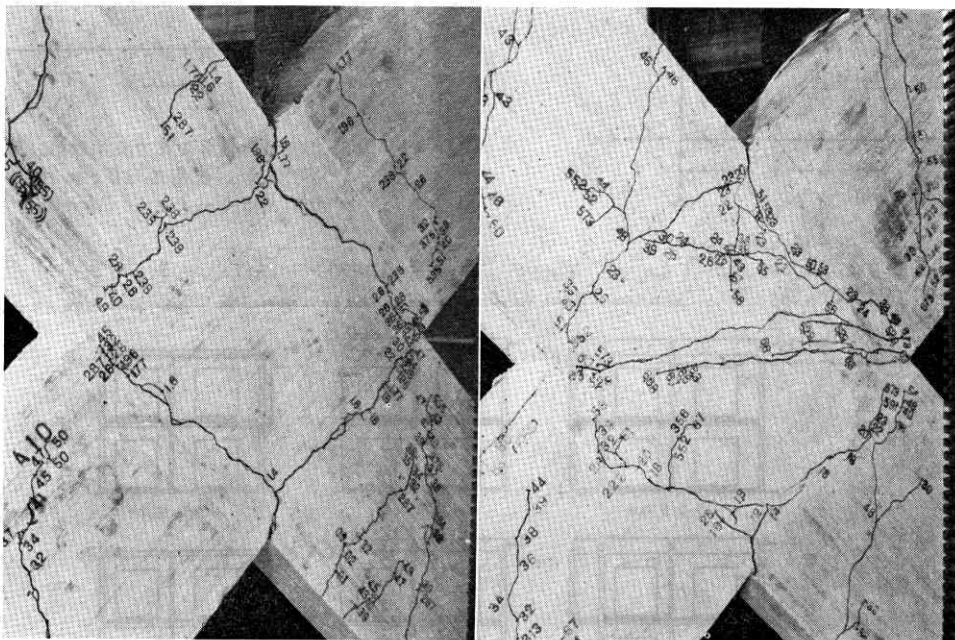


写真 2.6 a はり・柱接合部の破壊実験，通し配筋のみの場合：隅部の曲げ破壊で耐力が決定する

写真 2.6 b 同右，通し配筋に斜筋の補強を施した場合隅部の曲げ耐力が増加し，パネルゾーンのせん断破壊で耐力が決定する

発生し<sup>9)</sup>，図 2.7 に示すような破壊線を生ずるので，隅角補強筋としての斜筋の効果は十分ではない。水平（および垂直）の主筋のボンドが耐力を決定する。

e) ラーメン構造における耐震壁<sup>10)</sup>と壁構造の比較

図 2.8 に示すような厚さ  $t$  をもつ壁が，幅  $2t$  せい 0.2 a のはりと柱でかこまれている時の壁の応力分布を

図 2.9 に示す。（ポアソン比 0.2）

図からわかるように  $\tau$ （せん断応力度）および  $\sigma_y$ （曲げ応力度）が材端近くに集中しており，壁のせん断きれつは，ラーメンの場合には，はりを貫通し壁式の場合にはスラブを貫通し得ることを示す。

f) 壁式プレキャスト R.C. 構造

最近 2 DK をプレファブ化して施工するために，壁式

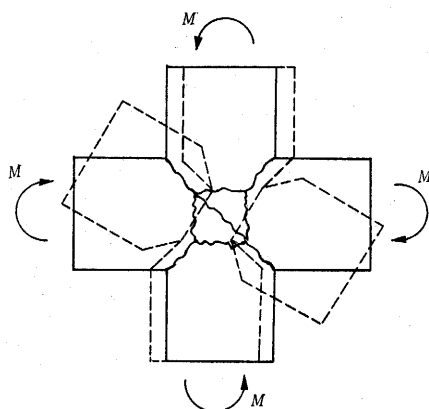


図 2.7 はり・柱接合部の降伏機構

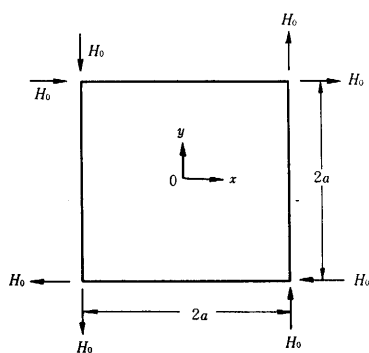


図 2.8

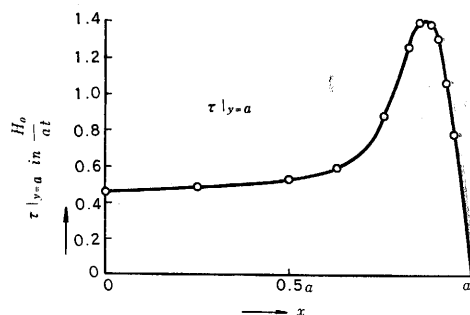
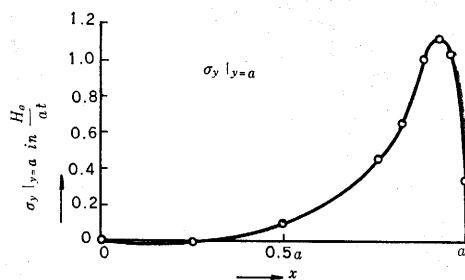
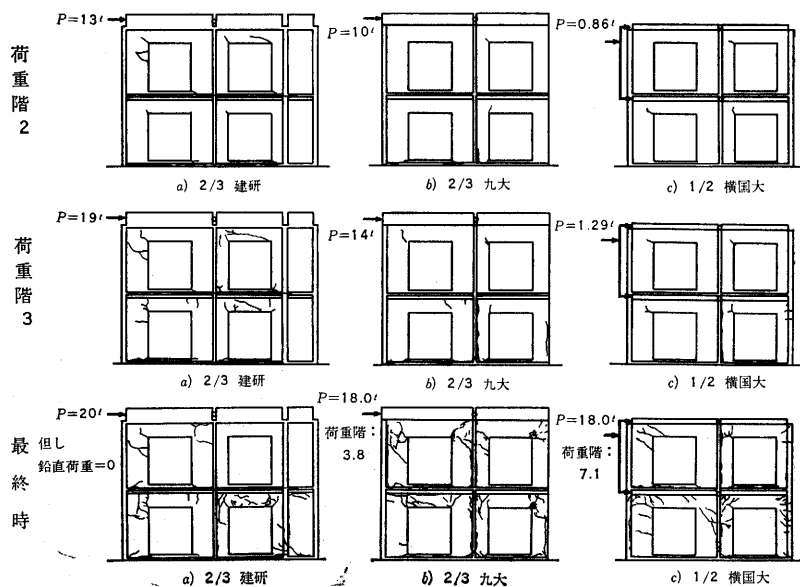
図 2.9 正方形耐震壁の応力集中状態 (節点水平力:  $H_0$ , 壁板の辺長:  $a$ , 板厚:  $t$ , 節点曲げモーメント:  $M_0=0$ )

図 2.10 水平加力実験におけるき裂の発生状況

(荷重階 2 は水平震度  $0.2 \times 2 = 0.4$   
 (荷重階 3 は水平震度  $0.2 \times 3 = 0.6$  を示す)

表 2.2 セン断き裂発生および終局荷重一覧表

| 試験体名                               | 縮尺(層数)               | コンクリート強度                       | 壁断面積                               | セン断き裂発生荷重時 |   |                              | 終局荷重時            |   |                                   |
|------------------------------------|----------------------|--------------------------------|------------------------------------|------------|---|------------------------------|------------------|---|-----------------------------------|
|                                    |                      | $F_c$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\Sigma A$<br>(cm <sup>2</sup> )*2 | $Q(t)$     | $\bar{\epsilon}_s$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $k_s = \bar{\epsilon}_s/F_c$ | $Q(t)$           | $\bar{\epsilon}_u$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\bar{\epsilon}_u/\bar{\epsilon}$ |
| 立 体 実 験 <sup>*1</sup><br>(建 研)     | 2/3<br>(2 F)         | P219<br>W/J216                 | 2310                               | 16         | 6.93  | 0.0316                       | <sup>*5</sup> 19 | 8.22  | 2.94                              |
| 大 型 構 面 実 験 <sup>*1</sup><br>(九 大) | 2/3<br>(2 F)         | P290<br>W/J145                 | 1690                               | 18         | 10.64                                       | 0.0368                       | 18               | 10.64                                       | 3.8                               |
| 中 小 型 構 面 実 験<br>(横 国 大)           | KPCWF 122            | 1/2<br>(2 F)<br>P263<br>W/J332 | 949.5                              | 12         | 12.62                                       | 0.0481                       | 18               | 18.95                                       | 6.74                              |
|                                    | WF 232               | 1/3<br>(2 F)<br>P290<br>W/J360 | 424.0                              | 5.1        | 12.03                                       | 0.0415                       | 6.85             | 16.15                                       | 5.71                              |
|                                    | WF 352               | 1/5<br>(2 F)<br>P355<br>W/J298 | 151.8                              | 1.5        | 9.88  | 0.0278                       | 2.84             | 18.71                                       | 6.60                              |
|                                    | WF 455               | 1/5<br>(5 F)<br>P307<br>W/J173 | 151.8                              | —          | —   | —                            | 1.79             | 11.78                                       | 4.16                              |
|                                    | WF 555 <sup>*3</sup> | 1/5<br>(5 F)<br>P300<br>W/J181 | 151.8                              | 2.36       | 15.15                                       | 0.0519                       | 2.53             | 16.66                                       | 5.88                              |

(設計用平均セン断応力は  $\bar{\sigma}=2.8\text{ kg/cm}^2$  とした)

\*1: B 構面のみ \*2: wet joint 断面を除く

\*3: 引張側 wet joint 鉄筋を補強(12 $\phi$ →6 $\phi$ , 径で 2.38 倍)

\*4: 平均セン断応力/コンクリート強度

\*5: 途中荷重

プレキャスト R. C. 構造 (水平目地 dry joint, たて目地 wet joint) が出現し, この構造の強度を調べる必要から, 実験を計画して 2/3 模型の実験を建築研究所と九州大学に, 1/2 模型の実験を横浜国立大学に依頼して, プレキャスト R. C. の力学的性状と模型実験の寸法効果とを追求した. 図 2.10 にき裂発生の状態を示し, 表 2.2 にき裂発生および終局荷重の一覧を示す.

### 3. 曲 面 板

#### 3.1 曲率線座標における曲面板の基礎式

軽耐弾格納庫試案作成中シェルの理論の解説書としては, W. Flügge 教授 (現 Stanford 大学) の著書 “Statik und Dynamik der Schalen” (新版は註 12) が圧巻であった. 当時日本では小野薫博士による球形ドーム (鶴見) などがまれな例である. シェルの膜応力問題は第二次大戦前から坂博士, “鉄筋コンクリート平面および曲面の構造” で解説され, Handbuch der Eisenbetonbau, Bd. IV 1928 は Fr. Dischinger らの Zeiss Dywidag 工法を掲げたシェルの膜応力を讀める膨大な著書でシェルの力学への入門書としての役割りを十分果たしていた.

鉄筋コンクリートシェルの開発は 1924 年ツアイス工場における切断球殻の試作から始まり, 1926 年デュッセルドルフに母線方向のスパン 23m の薄肉コンクリート円筒形シェルが実施されたのが Z. D. 工法の前身であるといえよう. 軽耐弾格納庫もまた筒形殻に近いものであった.

ところでシェルの膜応力 (トラスでいえば内的静定トラス) は支持状態によってかく乱され, 特にゼロガウス曲率 (円筒, 円錐など) のシェルは曲げ応力の発生を避けることはできないし, 正ガウス曲率 (球殻など) でも支持状態によってはその周辺の応力かく乱を覚悟しなければならない. Dischinger, Finsterwalder らの半円筒屋根 (シリンダーシェル) に関する解法とくに Dischinger

のそれは現代もお強い生命をもち続けている. これらの解そのものはドイツ的香りの強い, 逆にいえばきわめて遠まわりの beam theory の体系を作ったともいえるのである. そして B29 の爆撃下に, Flügge の著書は私にとって良き心の支えだったのである.

Flügge のシェル理論はその解法とくに力のつり合い式や, 応力, ひずみ, 変位の式の誘導に幾何学的図形を多用して, しかもこれらの要素を落とすことなくまとめ上げた点でりっぱであると思う. また本書に掲げる公式の大部分は直交曲線座標 (曲率線座標) しかも回転殻の公式であって個々の曲面についての解である.

1935 年, E. Trefftz<sup>13)</sup> は力のつり合い式をベクトル解析で求め, さらに Complementary Energy (ここでは Castigliano の定理) の変分 (力のつり合い式に Lagrange Factor=変位の成分を乗じる) 計算を行なった. これによって求めた Euler 方程式は Compatibility の条件の一形式ではあるが, 応力と変位とは連立方程式の形をとる. 著者はこの公式をベクトル解析で一貫させた方がまとまりが良いと考えて, 曲率線座標における公式をとりまとめた<sup>14)</sup> (1949 年). この形式は後の Naghdi (1957 年) のそれに近く, さらに一般化された形では Zerna<sup>15)</sup>, <sup>16)</sup> らのテンソルによる表現であり, 1955 年以後の著者および角野博士らの研究<sup>17)</sup> にもつながる.

曲率線座標によるシェルの公式<sup>14)</sup> はつぎのとおりである.

$$x = x(\theta_1, \theta_2), \quad y = y(\theta_1, \theta_2), \quad z = z(\theta_1, \theta_2)$$

および主曲率半径  $R_1(\theta_1, \theta_2)$ ,  $R_2(\theta_1, \theta_2)$  によってシェル中央面上での曲率線座標  $\theta_1, \theta_2$  が定義される. この流動座標における一点での二つの接線および法線の方角 1, 2, 3 は図 3.1 の示すとおりである.

$$e_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta_1}\right)^2}$$

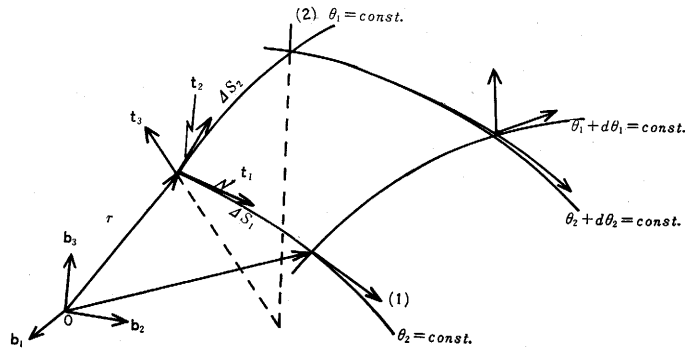


図 3.1

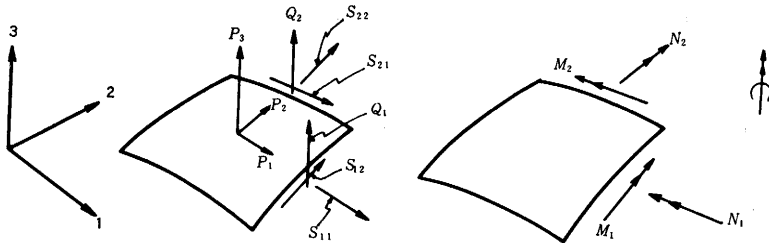


図 3.2

$$e_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta_2}\right)^2}$$

図 3.2 に示すような面要素における力のつり合いは、Trefftz より次のごとくである。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta_1}(S_{11}e_2) + \frac{\partial}{\partial \theta_2}(S_{21}e_1) + S_{12}\frac{\partial e_1}{\partial \theta_2} - S_{22}\frac{\partial e_2}{\partial \theta_1} \\ & + Q_1\frac{e_1e_2}{R_1} + P_1e_1e_2 = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \theta_2}(S_{22}e_1) + \frac{\partial}{\partial \theta_1}(S_{12}e_2) + S_{21}\frac{\partial e_2}{\partial \theta_1} - S_{11}\frac{\partial e_1}{\partial \theta_2} \\ & + Q_2\frac{e_1e_2}{R_2} + P_2e_1e_2 = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \theta_1}(Q_1e_2) + \frac{\partial}{\partial \theta_2}(Q_2e_1) - S_{11}\frac{e_1e_2}{R_1} - S_{22}\frac{e_1e_2}{R_2} \\ & + P_3e_1e_2 = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \theta_1}(M_1e_2) + \frac{\partial}{\partial \theta_2}(N_2e_1) + N_1\frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_2} - M_2\frac{\partial e_2}{\partial \theta_1} \\ & - Q_1e_1e_2 = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \theta_2}(M_2e_1) + \frac{\partial}{\partial \theta_1}(N_1e_2) + N_2\frac{\partial e_2}{\partial \theta_1} - M_1\frac{\partial e_1}{\partial \theta_2} \\ & - Q_2e_1e_2 = 0 \\ & \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} - (S_{21} - S_{12}) = 0 \end{aligned}$$

著者による応力とひずみ、ひずみと変位の公式はつぎのとおりである。

#### A. 応力とひずみ

$$S_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\left(\kappa_1 - \frac{\epsilon_1}{R_1}\right)$$

$$S_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\left(\kappa_2 - \frac{\epsilon_2}{R_2}\right)$$

$$S_{12} = Gh\gamma + \frac{Gh^3}{12}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\kappa_{12}$$

$$S_{21} = Gh\gamma + \frac{Gh^3}{12}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\kappa_{21}$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left\{\kappa_1 + \nu\kappa_2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\epsilon_1\right\}$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left\{\kappa_2 + \nu\kappa_1 + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\epsilon_2\right\}$$

$$N_1 = \frac{Gh^3}{12}\left\{\kappa_{12} + \kappa_{21} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\gamma_{12}\right\}$$

$$N_2 = \frac{Gh^3}{12}\left\{\kappa_{21} + \kappa_{12} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\gamma_{21}\right\}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

#### B. ひずみと変位

$$\epsilon_1 = \frac{1}{e_1}\frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \frac{u_2}{e_1e_2}\frac{\partial e_1}{\partial \theta_2} + \frac{u_3}{R_1}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{e_2}\frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} + \frac{u_1}{e_1e_2}\frac{\partial e_2}{\partial \theta_1} + \frac{u_3}{R_2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{e_1}\frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} - \frac{u_1}{e_1e_2}\frac{\partial e_1}{\partial \theta_2}, \quad \gamma_{21} = \frac{1}{e_2}\frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} - \frac{u_2}{e_1e_2}\frac{\partial e_2}{\partial \theta_1}$$

$$\gamma = \gamma_{12} + \gamma_{21}, \quad \omega: 3 \text{ 軸回りの回転角}$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \frac{1}{e_1 e_2} \left\{ \frac{\partial(e_1 u_1)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial(e_2 u_2)}{\partial \theta_1} \right\}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{e_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1} + \frac{\varphi_2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \theta_2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2} + \frac{\varphi_1}{e_1 e_2} \frac{\partial e_2}{\partial \theta_1}$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{e_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1} - \frac{\varphi_1}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \theta_2}, \quad \kappa_{21} = \frac{1}{e_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_2} - \frac{\varphi_2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_2}{\partial \theta_1}$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{e_1} \frac{\partial u_3}{\partial \theta_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{e_2} \frac{\partial u_3}{\partial \theta_2} + \frac{u_2}{R_2}$$

( $\varphi$  は 1, 2 軸まわりの回転角)

### 3.2 円筒殻および円錐殻

#### A. 円筒殻

円筒形屋根は曲げ、特に円弧方向の曲げモーメント  $M_\varphi$  が重要な応力となると、単なるはり理論では説明できない構造体となる。もっとも等分布荷重を受けるふちばりのない単独円筒殻の  $M_\varphi$  は、円弧の長さを  $s$  とすれば  $M_\varphi \doteq -0.05 \text{ ps}^2$  で近似できるが、図 3.4 に見るようにふちばりの剛性によって変形  $w$  およびモーメント  $M_\varphi$  は著しく変化する。

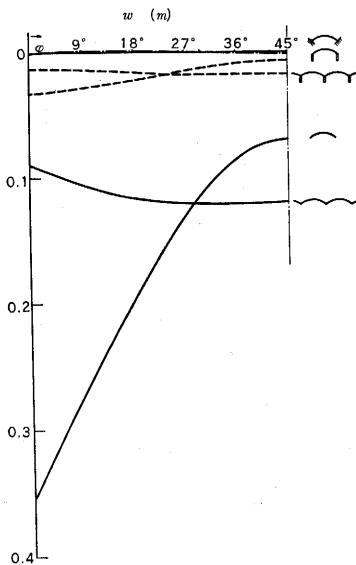


図 3.3

円筒殻の精密解は、荷重に対する膜応力解と、応力かく乱を処理するための曲げ解とで構成され、実際問題に適用するためにいろいろな工夫がなされ、また数値表も数多くあるが、著者は Dischinger の精解を用いても、他の略解などに比べて大した労力も計算時間の差もないと確信している。一番めんどろな曲げ解については、特性方程式をコンピューターで解き、これらの根の計算値を用いて、表 3.1 から曲げ解が求められるのである。円筒殻の計算のチェックをさせられた経験では、1 回で正解が求められた例を記憶していない。図 3.3 は今後のこの種の問題の解の正否の判断に役立つと思う。

表 3.1 において  $\alpha_{\frac{1}{2}}$ ,  $\beta_{\frac{1}{2}}$  は特性方程式

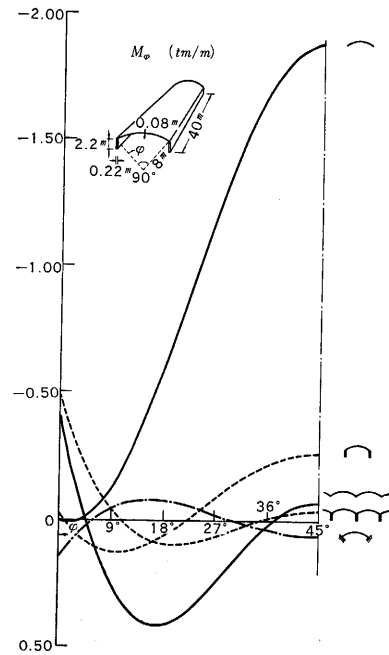


図 3.4 各種ふち条件における変位および応力

$$m^8 + (2 - 4\lambda^2)m^6 + \{1 - (8 - 2\nu)\lambda^2 + 6\lambda^4\}m^4 + \{(-4 + 2\nu)\lambda^2 + 6\lambda^4 - 4\lambda^6\}m^2 + (4 - 3\nu^2)\lambda^4 - 2\nu\lambda^6 + \lambda^8 + \frac{1 - \nu^2}{k}$$

の解の実部および虚部である。

上式中  $\lambda = \frac{n\pi a}{l}$ ,  $k = \frac{t^2}{12a^2}$ ,  $\nu$ : ポアソン比,  $a$ : 曲率半径,  $t$ : 曲板厚,  $l$ : 曲板長. 次に表 3.1 の中の記号を一括して説明する。

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad E: \text{ヤング率},$$

$$B = \frac{Et}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \nu_{\frac{1}{2}} = \alpha_{\frac{1}{2}}^2 - \beta_{\frac{1}{2}}^2$$

$$\phi_{\frac{1}{2}} = 2\alpha_{\frac{1}{2}}\beta_{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{\nu_{\frac{1}{2}} + \nu\lambda^2}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \phi_{\frac{1}{2}}^2\}} - \frac{2(1 + \nu)\lambda^2\phi_{\frac{1}{2}}^2}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \phi_{\frac{1}{2}}^2\}^2}$$

$$\delta_{\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{\frac{1}{2}}}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \phi_{\frac{1}{2}}^2\}} + \frac{2(1 + \nu)\phi_{\frac{1}{2}}(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \phi_{\frac{1}{2}}^2\}^2}$$

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}(\nu_{\frac{1}{2}} - 2\lambda^2) + \beta_{\frac{1}{2}}\phi_{\frac{1}{2}} - \nu\lambda^2\alpha_{\frac{1}{2}}}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \phi_{\frac{1}{2}}^2\}}$$

$$+ \frac{2(1 + \nu)\lambda^2\phi_{\frac{1}{2}}\{\alpha_{\frac{1}{2}}\phi_{\frac{1}{2}} - \beta_{\frac{1}{2}}(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)\}}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \phi_{\frac{1}{2}}^2\}^2}$$

$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{\beta_{\frac{1}{2}}(\nu_{\frac{1}{2}} - 2\lambda^2) - \alpha_{\frac{1}{2}}\phi_{\frac{1}{2}} - \nu\lambda^2\beta_{\frac{1}{2}}}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \phi_{\frac{1}{2}}^2\}}$$

表 3.1

|                                   | $e^{-\alpha_1 \varphi \cos \beta_1 \varphi}$  | $e^{-\alpha_1 \varphi \sin \beta_1 \varphi}$  | $e^{-\alpha_2 \varphi \cos \beta_2 \varphi}$  | $e^{-\alpha_2 \varphi \sin \beta_2 \varphi}$  | 共通乗数                                       |
|-----------------------------------|---|---|---|---|--|
| $w$                               | $c_1$   | $c_2$   | $c_3$   | $c_4$   | $\sin \lambda \xi$                         |
| $u$                               | $-\gamma_1 c_1 - \delta_1 c_2$  | $\delta_1 c_1 - \gamma_1 c_2$   | $-\gamma_2 c_3 - \delta_2 c_4$  | $\delta_2 c_3 - \gamma_2 c_4$   | $\lambda \cos \lambda \xi$                 |
| $v$                               | $-(a_1 c_1 - b_1 c_2)$  | $-(b_1 c_1 + a_1 c_2)$  | $-(a_2 c_3 - b_2 c_4)$  | $-(b_2 c_3 + a_2 c_4)$  | $\sin \lambda \xi$                         |
| $N_\varphi$                       | $(\alpha_1 a_1 - \beta_1 b_1 - 1) c_1$<br>$-(\alpha_1 b_1 + \beta_1 a_1) c_2$   | $(\alpha_1 b_1 - \beta_1 a_1) c_1$<br>$+(\alpha_1 a_1 - \beta_1 b_1 - 1) c_2$   | $(\alpha_2 a_2 - \beta_2 b_2 - 1) c_3$<br>$-(\alpha_2 b_2 + \beta_2 a_2) c_4$   | $(\alpha_2 b_2 + \beta_2 a_2) c_3$<br>$+(\alpha_2 a_2 - \beta_2 b_2 - 1) c_4$   | $\frac{B}{a} \sin \lambda \xi$             |
| $N_x$                             | $\gamma_1 c_1 + \delta_1 c_2$   | $-\delta_1 c_1 + \gamma_1 c_2$  | $\gamma_2 c_3 + \delta_2 c_4$   | $-\delta_2 c_3 + \gamma_2 c_4$  | $\frac{B \lambda^2}{a} \sin \lambda \xi$   |
| $N_{x\varphi}$<br>$N_{\varphi x}$ | $(\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 \delta_1 - a_1) c_1$<br>$+(\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 + b_1) c_2$             | $(-\alpha_1 \delta_1 + \beta_1 \gamma_1 - b_1) c_1$<br>$+(\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 \delta_1 - a_1) c_2$            | $(\alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 \delta_2 - a_2) c_3$<br>$+(\alpha_2 \delta_2 - \beta_2 \gamma_2 + b_2) c_4$             | $(-\alpha_2 \delta_2 + \beta_2 \gamma_2 - b_2) c_3$<br>$+(\alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 \delta_2 - a_2) c_4$            | $\frac{B \lambda}{2a} \cos \lambda \xi$    |
| $M_\varphi$                       | $-(\nu_1 c_1 - \psi_1 c_2)$   | $-(\psi_1 c_1 + \nu_1 c_2)$   | $-(\nu_2 c_3 - \psi_2 c_4)$   | $-(\psi_2 c_3 + \nu_2 c_4)$   | $\frac{D}{a^2} \sin \lambda \xi$           |
| $M_x$                             | $c_1$   | $c_2$   | $c_3$   | $c_4$   | $\frac{D \lambda^2}{a^2} \sin \lambda \xi$ |
| $M_{x\varphi}$<br>$M_{\varphi x}$ | $\alpha_1 c_1 - \beta_1 c_2$  | $\beta_1 c_1 + \alpha_1 c_2$  | $\alpha_2 c_3 - \beta_2 c_4$  | $\beta_2 c_3 + \alpha_2 c_4$  | $\frac{D \lambda}{a^2} \cos \lambda \xi$   |
| $Q_\varphi$                       | $\{\alpha_1 (\nu_1 - \lambda^2) - \beta_1 \psi_1\} c_1$<br>$-\{\beta_1 (\nu_1 - \lambda^2) + \alpha_1 \psi_1\} c_2$   | $\{\beta_1 (\nu_1 - \lambda^2) + \alpha_1 \psi_1\} c_1$<br>$+\{\alpha_1 (\nu_1 - \lambda^2) - \beta_1 \psi_1\} c_2$   | $\{\alpha_2 (\nu_2 - \lambda^2) - \beta_2 \psi_2\} c_3$<br>$-\{\beta_2 (\nu_2 - \lambda^2) + \alpha_2 \psi_2\} c_4$   | $\{\beta_2 (\nu_2 - \lambda^2) + \alpha_2 \psi_2\} c_3$<br>$+\{\alpha_2 (\nu_2 - \lambda^2) - \beta_2 \psi_2\} c_4$   | $\frac{D}{a^3} \sin \lambda \xi$           |
| $Q_x$                             | $-\{\nu_1 - \lambda^2\} c_1 - \psi_1 c_2$   | $-\{\psi_1 c_1 + (\nu_1 - \lambda^2) c_2\}$   | $-\{\nu_2 - \lambda^2\} c_3 - \psi_2 c_4$   | $-\{\psi_2 c_3 + (\nu_2 - \lambda^2) c_4\}$   | $\frac{D \lambda}{a^3} \cos \lambda \xi$   |
| $V_\varphi$                       | $\{\alpha_1 (\nu_1 - 2\lambda^2) - \beta_1 \psi_1\} c_1$<br>$-\{\beta_1 (\nu_1 - 2\lambda^2) + \alpha_1 \psi_1\} c_2$ | $\{\beta_1 (\nu_1 - 2\lambda^2) + \alpha_1 \psi_1\} c_1$<br>$+\{\alpha_1 (\nu_1 - 2\lambda^2) - \beta_1 \psi_1\} c_2$ | $\{\alpha_2 (\nu_2 - 2\lambda^2) - \beta_2 \psi_2\} c_3$<br>$-\{\beta_2 (\nu_2 - 2\lambda^2) + \alpha_2 \psi_2\} c_4$ | $\{\beta_2 (\nu_2 - 2\lambda^2) + \alpha_2 \psi_2\} c_3$<br>$+\{\alpha_2 (\nu_2 - 2\lambda^2) - \beta_2 \psi_2\} c_4$ | $\frac{D}{a^3} \sin \lambda \xi$           |

(ただし  $w, u, N_\varphi, N_x, M_\varphi, M_x, Q_x$  については,  $\varphi$  を  $\bar{\varphi}$ ,  $c$  を  $\bar{c}$  にしたものを加える,  
 $v, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}, M_{x\varphi}, M_{\varphi x}, Q_\varphi, V_\varphi$  については,  $\varphi$  を  $\bar{\varphi}$ ,  $c$  を  $-\bar{c}$  にしたものを加える.)

$$2(1+\nu) \frac{\lambda^2 \psi_{\frac{1}{2}} \{\beta_{\frac{1}{2}} \psi_{\frac{1}{2}} + \alpha_{\frac{1}{2}} (\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)\}}{\{(\nu_{\frac{1}{2}} - \lambda^2)^2 + \psi_{\frac{1}{2}}^2\}^2}$$

以上述べた解は,  $x=0, l$  が単純支持で求められているのは, 多少問題を残しており, 母線方向の連続殻についての ASCE (1951 年ほか) の recommendation では, 連続ばり理論を代用させているが, 曲げモーメント  $M_x$  は  $M_\varphi$  の 1 桁以上低い値であるので, 一応はり理論の適用で十分であると思う。これは著者らが  $x=0, l$  固定の解の特別な場合として, 周辺固定の円筒殻の解<sup>18)</sup> を求めた結果からの推論である。

次に円筒殻の実施例として, 著者が設計した大日本インキ工場 (写真 3.1) 戸塚カントリークラブ (写真 3.2) を掲げておく。

戸塚カントリークラブは円弧方向スパン 29.250 m, 母線方向 11.830 m (カンチレバーの長さ), 22.666 m (中央スパン) の逆円筒屋根 (丹下研究室) で 1/20 の模型実験の結果から, 構造強度の予測と配筋の合理性が検討されたが, 載荷試験<sup>19)</sup>の結果から主応力線方向の配筋の有効なことが見られるのである。図 3.5 に 1/20 模型のひび割れパターンと主応力線の関係を示す。

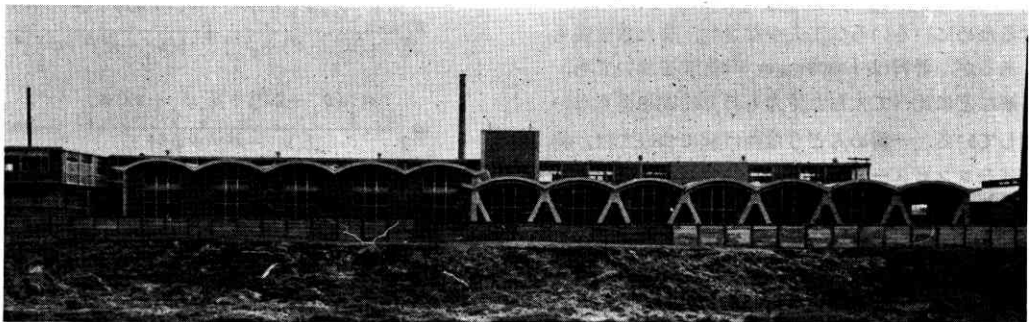


写真 3.1 大日本インキ工場



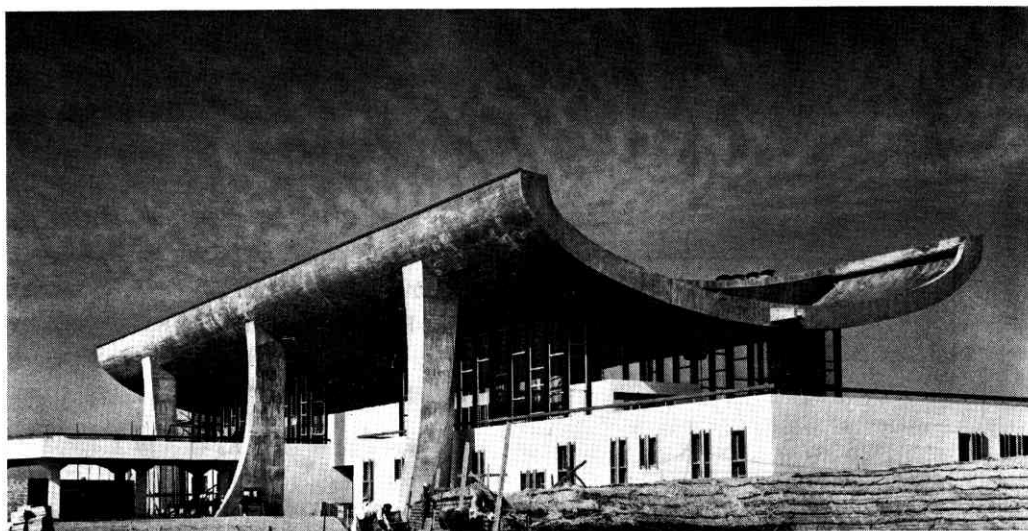


写真 3.2 戸塚カントリークラブ (丹下研究室 1961 年)

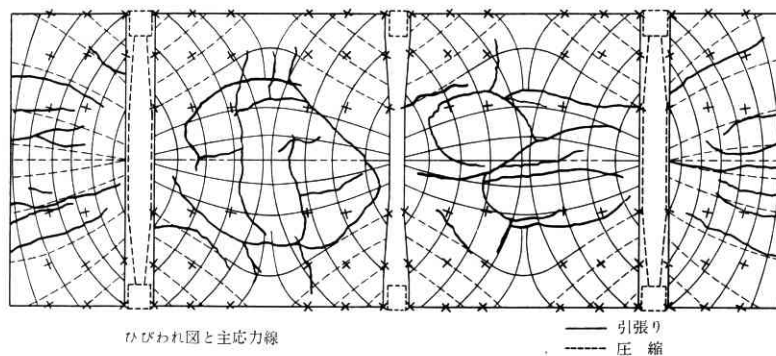


図 3.5 ひびわれ図と主応力線



写真 3.3 広島児童図書館

### B. 円 錐 殻

円錐殻の研究は倒立円錐殻を R. C. 構造で実施する計画が広島児童図書館 (丹下研究室, 1953 年, 写真 3.3) 設計を機にはじめられた。戦後のシェル構造としては日本では最初の建物であると思う。著者もシェル構造体の実施では最初の経験であったので応力解析, 模型実験のほ

か, 丹念な現場実験<sup>20)</sup>(主として温度および雪荷重に対する変形, 応力測定)を行なった。この建物には今日なお構造的な欠陥は見られない。

このシェルは a. 円錐 (厚 12 cm) → b. ドーナツ → c. 円筒 (20 cm) の 3 部分からなり a, b 部分の膜応力は図 3.6 のとおりである。ここに  $\sigma_\theta$  は母線方向応力,

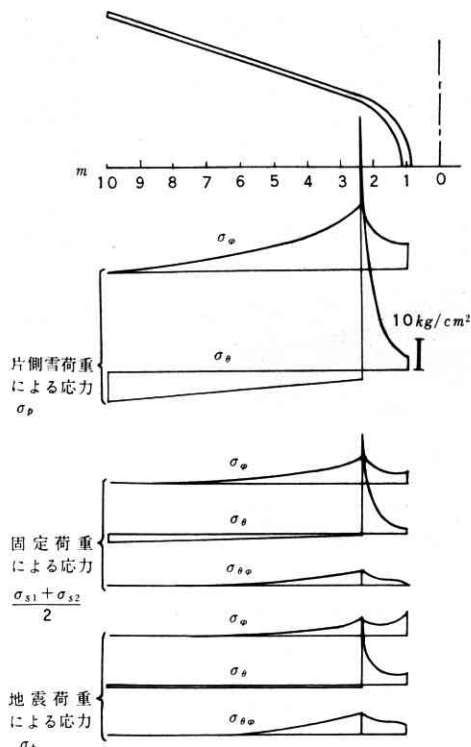


図 3.6 各種荷重による応力度

$\sigma_\theta$  はリング方向応力,  $\tau_{\phi\theta}$  は面内せん断応力度であって, 曲げ応力の導入はしていないから,  $\sigma_\theta$  すなわちリング方向の変位は連続していないが, 最も重要なのは先端の  $\sigma_\theta$  の値で, 水平面上の半径  $l$  (ここでは  $10\text{ m}$ ) と円錐の傾角  $\alpha$  ( $\tan \alpha = 1/3$ ) に対して

$$N_\theta = pl \cos \alpha$$

なる引張力が支配的応力であることがわかる。

### 3.3 偏平球殻<sup>21), 22)</sup>

#### A. 偏平球殻の公式

愛媛県民館(丹下研究室, 写真 3.4)はスパン  $50\text{ m}$  の R. C. 偏平球殻 (shallow spherical shell) で, M. I. T. 講堂 (Eero Saarinen) とほとんど同時に建設された。ただし後者は deep shell である。当時この県民館は R. C. 球殻としては世界で有数の大きさのものであった。(もっとも重量ドーム (石) の deep shell ではローマ: パンテオン B. C. 26 は  $43.5\text{ m}$  の直径をもっている) ところで薄肉球殻の理論は古くから発展したが, ほとんどが対称変形を論じたものである。非対称問題については Reissner, Bijlaard<sup>23)</sup> (1957 年) らの論文も見られるが, 著者らは独自の立場でこれを開発した。まず面内応力は, 図 3.7 を参照して

$$\left. \begin{aligned} N_\phi &= \frac{1}{\phi} \phi' + \frac{1}{\phi^2} \phi'' + K_0 \frac{1}{\phi} \left( \frac{\cos}{\sin} \right) \theta \\ N_\theta &= \phi'' - K_0 \frac{1}{\phi} \left( \frac{\cos}{\sin} \right) \theta \\ N_{\theta\phi} &= \frac{1}{\phi^2} \phi' - \frac{1}{\phi} \phi' + K_0 \left( \frac{-\sin}{\cos} \right) \theta \end{aligned} \right\}$$

で表示される。力のつり合い式および適合条件式の解は

$$\begin{aligned} n=0 (\text{対称}) \quad w &= K_1 + A \operatorname{ber}_0 \xi + B \operatorname{bei}_0 \xi + C \operatorname{ker}_0 \xi \\ &\quad + D \operatorname{kei}_0 \xi \\ \phi &= K_4 \log \phi + B \operatorname{ber}_0 \xi - A \operatorname{bei}_0 \xi \\ &\quad + D \operatorname{ker}_0 \xi - C \operatorname{kei}_0 \xi \end{aligned}$$

応力の未知定数は  $A \sim D, K_4$  (膜応力) の 5 個 (二つの端部での応力 6 個に対して対称軸方向の力のつり合い一つ)

$$\begin{aligned} n=1 (\text{逆対称}) \quad w &= \{ K_1 \phi + A \operatorname{ber}_1 \xi + B \operatorname{bei}_1 \xi \\ &\quad + C \operatorname{ker}_1 \xi + D \operatorname{kei}_1 \xi \} \left( \frac{\cos}{\sin} \right) \theta \\ \bar{\phi} &= \left\{ K_4 \frac{1}{\phi} + B \operatorname{ber}_1 \xi - A \operatorname{bei}_1 \xi \right. \\ &\quad \left. + D \operatorname{ker}_1 \xi - C \operatorname{kei}_1 \xi \right\} \left( \frac{\cos}{\sin} \right) \theta \end{aligned} \quad (1)$$

応力の未知定数は  $A \sim D, K_1$  (膜応力) および  $K_4$  (膜応

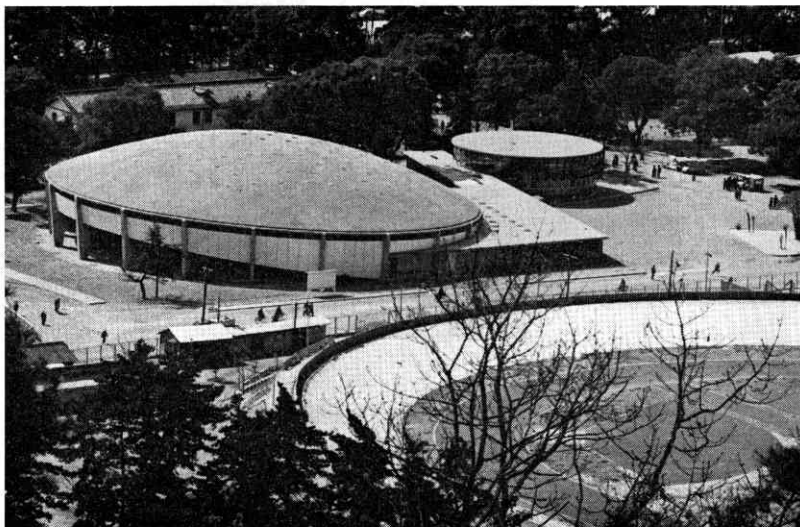
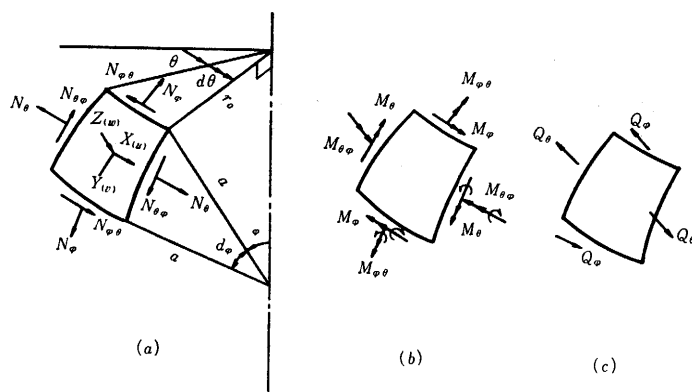


写真 3.4 愛媛県民館



面内応力および変位, 荷重

曲げモーメントおよび  
捩りモーメント

せん断力

図 3.7

力) の 6 個 (応力 8 個に対して  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  における軸方向の力のつり合いおよびこれと直角方向の軸に關するモーメントのつり合い計 2 個)

$$\left. \begin{aligned} n \geq 2: w = & \{K_1 \varphi^n + K_2 \varphi^{-n} + A \operatorname{ber}_n \xi + B \operatorname{bei}_n \xi \\ & + C \operatorname{ber}_n \xi + D \operatorname{kei}_n \xi\} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n \theta \\ \bar{\phi} = & \{K_3 \varphi^n + K_4 \varphi^{-n} + B \operatorname{ber}_n \xi - A \operatorname{bei}_n \xi \\ & + D \operatorname{ker}_n \xi - C \operatorname{kei}_n \xi\} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

応力の未知数は  $A \sim D$ ,  $K_1 \sim K_4$  ( $K_3, K_4$  は膜応力の項) の 8 個。

ただし,

$$\beta^4 = 12(1-\nu^2) \frac{a^2}{t^2}, \quad \phi = \frac{Et}{a\beta^2} \phi, \quad \xi = \beta \phi$$

$\operatorname{ber}_0 \equiv \operatorname{ber}$ ,  $\operatorname{bei}_0 \equiv \operatorname{bei}$ ……: Kelvin 関数

また, 曲げモーメント, 捩りモーメントは次式から求まる。

$$M_{\varphi} = -\frac{D}{a^2} \left\{ w'' + \nu \left( \frac{1}{\varphi} w' + \frac{1}{\varphi^2} w'' \right) \right\}$$

$$M_{\theta} = -\frac{D}{a^2} \left\{ \frac{1}{\varphi} w' + \frac{1}{\varphi^2} w'' + \nu w'' \right\}$$

$$M_{\theta\varphi} = -\frac{(1-\nu)D}{a^2} \left( \frac{1}{\varphi} w' \right)'$$

ただし  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $t$ : 殻厚,  $E$ : ヤング係数,

$\nu$ : ポアソン比 (1)(2) は無荷重状態の式であるが, 実際問題としては逆対称荷重における応力が重要である。温度, 特に非対称温度分布は R. C. シェルの変形および応力を圧倒的に支配するので, ここに逆対称温度分布に対する次のような特解が必要となる。

$T = C\varphi \cos \theta$  に対し

$$\phi_0 = 0, \quad w_0 = -C\alpha \varphi \cos \theta$$

$T_0 = C\varphi \cos \theta$  に対し

$$\phi_0 = C \frac{Et^2 \alpha}{6(1-\nu)a} \varphi \cos \theta, \quad w_0 = 0$$

$w + w_0$ ,  $\phi + \phi_0$  がこの場合の一般解である。

ここに  $T(\varphi, \theta)$  は厚さ方向に一樣な温度,  $\pm T_0(\varphi, \theta)$  は上下縁の温度で板の中央面で 0 となるような直線分布を仮定する。

## B. 偏平球殻の特性

### 1. R. C. 球殻の座屈

球殻の座屈崩壊の例は, i. a. s. s. の報告で, 欧州で鉄骨球殻シェルが雪荷重で壊破したことを聞いたが, あまり例を見ない。等分布荷重に關し座屈限界荷重  $P_{cr}$  は次のとおり与えられる。

$$P_{cr} = \alpha E \frac{t^2}{R^2}$$

$\alpha = 1.156$  (古典座屈理論)  $\sim 0.0535$  (Haas 博士の著書における実験値の最小) から,  $t = 10$  cm のコンクリートシェルを  $P_{cr} = \gamma t$  ( $\gamma$  はコンクリートの比重  $2.3 \text{ t/m}^3$ )  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  として, 自重による限界の  $R$  を求めると  $R = 325 \text{ m} \sim 70 \text{ m}$  となる。

すなわち Positive Gaussian Curvature の曲面, とくに球殻は, 膜応力状態の確保以外に座屈理論の立場から, 実際問題としてきわめて経済的な構造体であるといえる。またコンクリートの引張強度を  $20 \text{ kg/cm}^2$  とすると,  $R = 175 \text{ m}$  の無筋コンクリートプラネタリウムも設計可能だという理屈でもある (hoop tension  $N_{\theta} = pR$ )。Nervi の鉄筋コンクリートによるオリンピック競技場が球殻で設計されたのは, 一つにはこの理由が裏付けをしている。

### 2. 鉛直荷重による撓み

鉛直荷重  $500 \text{ kg/m}^2$  に対する天頂の撓みはつぎのとおりである。

表 3.2

| $R$  | ローラー      | ピン      |
|------|-----------|---------|
| 50 m | 51.45 mm  | 2.57 mm |
| 80 m | 126.38 mm | 6.65 mm |

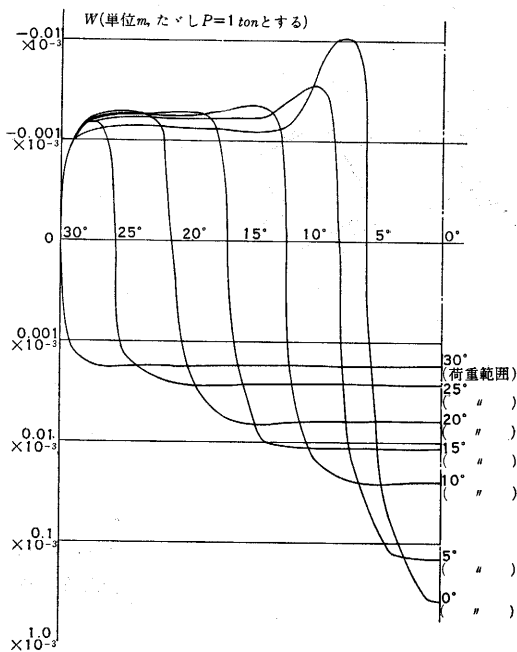


図 3.8 偏平球殻の荷重範囲と変位  $w$  の関係  
(半開角  $30^\circ$ )

ピンでは膜応力状態の範囲が広いから、撓みはきわめて小さい。そして分布荷重  $X=0$ ,  $Y=p\varphi$ ,  $Z=p$  下ではほとんど膜応力状態の変位 ( $(2+\nu)\frac{pa^2}{Et} + \text{const.} = \text{const.}$ ) を示すことは、全荷重  $P$  を集中荷重から全面等分布荷重へ変化させた時の図からも推察される。ただし、図 3.8 は  $X=Y=0$ ,  $Z=p=\text{const.}$  の場合である。

### 3. 非対称変形

実施されたドームの設計例から見て、水平方向の震度 0.2 は逆対称温度変化  $T \cos \theta$  ( $T=10^\circ\text{C}$ ) による応力で十分カバーする。たとえば端部がピンのときの端部近傍に生じる最大曲げモーメントは  $M_\varphi = \pm 0.34 \text{ tm/m}$  であり、地震応力の応力は温度によるものの一桁下である。

偏平球殻の設計例をつぎに掲げる。

#### i 愛媛県民館 (1953 年) (写真 3.4)

R.C. 球殻、スパン 50 m,  $R=50 \text{ m}$ , 最小殻厚 12 cm, 自重による水平変位約 1 cm に対してローラーで設計し、コンクリートを後打ちしてこの部分を剛節とし風圧、地震力に抵抗させた。図 3.9 に支点の詳細を示す。

#### ii 晴海国際見本市<sup>24)</sup> (1953 年)

$R=55 \text{ m}$ , 地盤面における半径 60.732 m (鉄骨部分のスパン約 100 m), せい 1 m の鉄骨トラスである。写真 3.5 に内部を、図 3.10 に各部の寸法を示す。

#### iii 内ノ浦ロケットセンターの巨大アンテナ (1963 年)

アンテナ口径 18 m, 平均厚 407 mm, 材料耐蝕アルミニウム (52 S)  $E=7200 \text{ kg/mm}^2$  サンドイッチ板 (表皮厚 3 mm), 曲率半径  $R=13.456$ , (数値計算三菱電機森川、藤田両氏) 写真 3.6 に全貌を示す。

#### iv 原子炉圧力容器

ほとんど閉じた球殻では, shallow shell の理論はもちろん適用されないから deep shell の理論を組立てなければならない。これについては, 対称変形については Hetényi (1937 年) の実用解が, 精密解に一致することを示しているが, コールダーホール型原子炉圧力容器

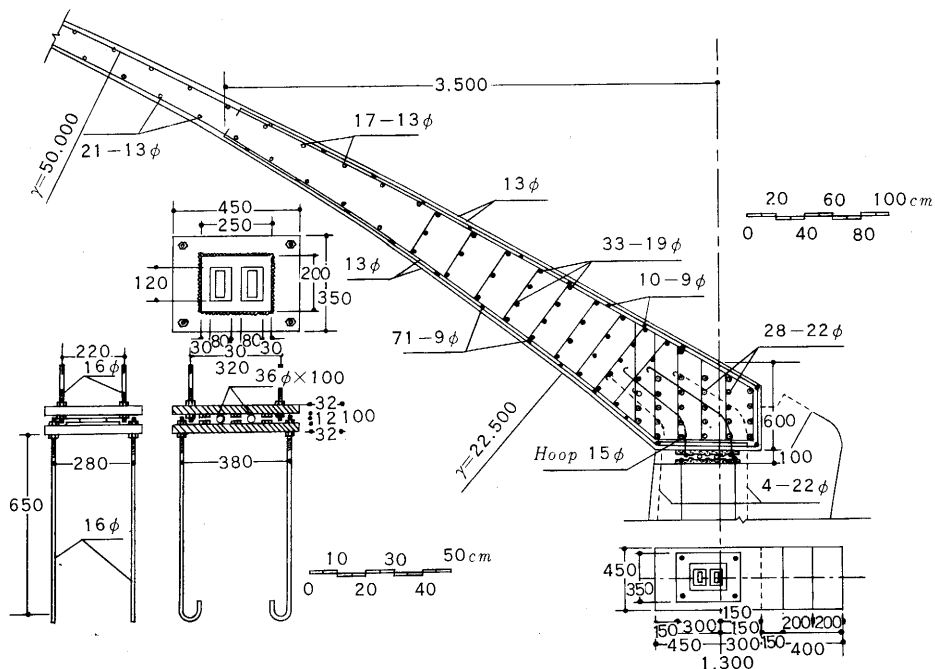


図 3.9 シェル支持部詳細図



写真 3.5 東京国際貿易センター内部

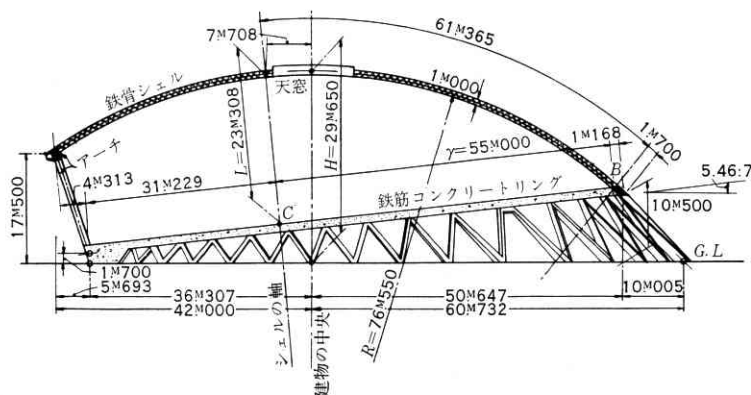


図 3.10 ドームの各部

(アルミキルド鋼 76 mm 厚  $R=9.15$  m) の耐震設計<sup>25)</sup>に当たり非対称変形に対する解が必要になった。この種の文献としては Havers (1935 年) の解が見出されるだけであるが、本論文はパラメータが多く、応力解析にはあまり有効でない。

新しく非対称の解を求め、また Hetényi の対称問題の解に対応する非対称問題の解を誘導したのが下の論文<sup>26)</sup><sup>27)</sup>である。この構造物は常時応力の最大値  $1,846 \text{ kg/cm}^2$  に対し、地震力 (水平震度 0.6) による最大応力は  $705 \text{ kg/cm}^2$  で設計された。

図 3.11 に地震力を受けた時の変位を示す。

### 3.4 E.P. シェルと H.P. シェル

#### A. 偏平殻の一般式<sup>28)</sup>

$x, y$  座標における偏平殻 shallow shells の一般式はつぎのとおりである。力のつり合い式

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 k_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = Z - k_x \int X dx - k_y \int Y dy - \frac{\alpha E t^2}{6(1-\nu)} \nabla^2 T_0 \quad (3)$$

ただし

$$k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \int X dx, \quad N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \int Y dy,$$

$$N_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

適合条件式

$$\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \phi + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{Et} \left\{ \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy - \nu \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right\} - \alpha \nabla^2 T \quad (4)$$

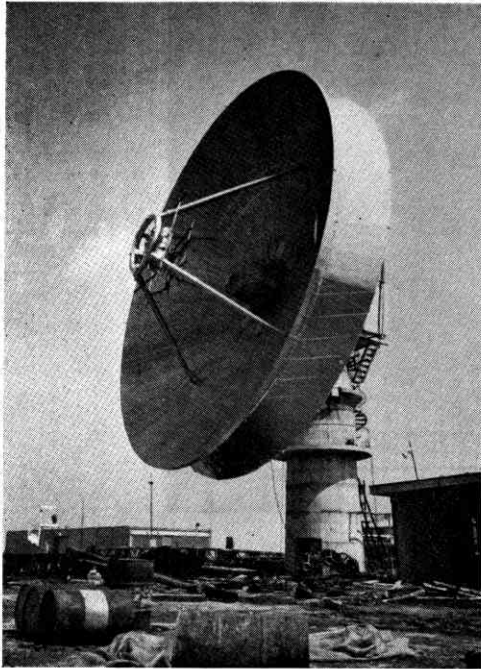


写真 3.6 内ノ浦ロケットセンター巨大アンテナ

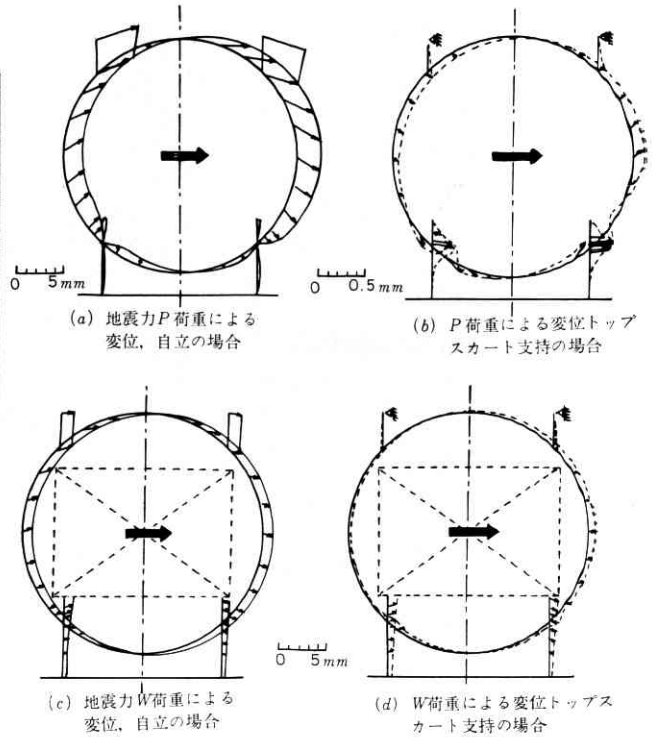


図 3.11 水平加力時の変位図

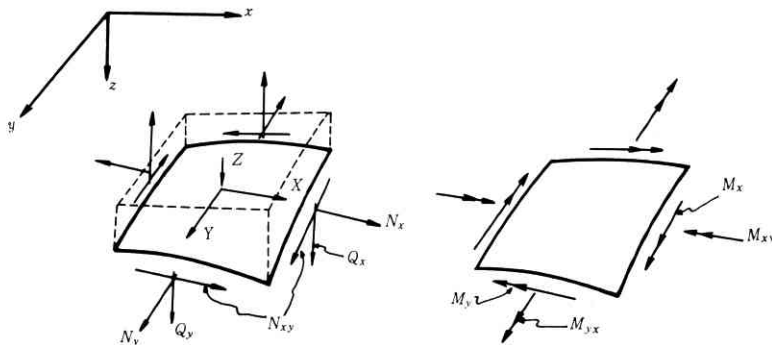


図 3.12

ここに

$$M_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha T_0}{t} \right\},$$

$$M_y = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha T_0}{t} \right\},$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

以下、せん断力  $Q_x, Q_y$ , 換算せん断力  $V_x, V_y$  は平面板の式と同じ

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E: \text{ヤング係数}, \nu: \text{ポアソン}$$

ン比,  $t$ : 板厚

$z = z(x, y)$ : 曲面の座標,  $\alpha$ : 線膨張係数,

$T(x, y)$ :  $Z$  方向の一様な温度変化

$\frac{2z}{t}T_0(x, y)$ : 板厚方向に直線的に変化する温度

$w$ :  $Z$  方向の変位 (撓み)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

荷重  $X, Y$  をポテンシャル  $\Omega$  で定義すればすなわち,

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

のときは

$$(3) \text{ の右辺 } = Z + (k_x + k_y)\Omega - \frac{\alpha Et^2}{6(1-\nu)} \nabla^2 T_0$$

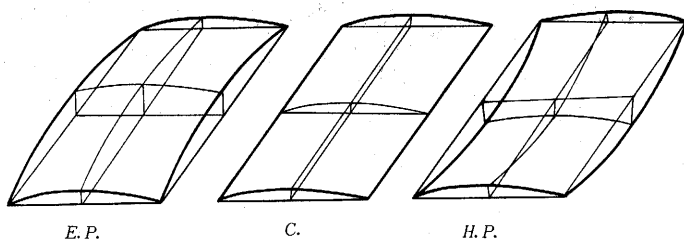


図 3.13

$$(3) \text{の右辺} = -\frac{1-\nu}{Et} \nabla^2 \Omega - \alpha \nabla^2 T$$

である。

以上の式はウラソフ (1950 年) 型の式であるが、温度応力その他を付加してこれを完結してある。

本式は膜応力を論じた A. Pucher (1934 年) の論文の実用化であり、また一般化でもあるが、現在これらの公式は欧米ともに広く偏平シェルの公式として認めている。

#### B. E.P. シェルと H.P. シェル

2 次曲面

$$Z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f)$$

に対して

$$k_x = a \equiv \frac{1}{R_x}, \quad k_y = b \equiv \frac{1}{R_y}, \quad k_{xy} = c$$

となる。

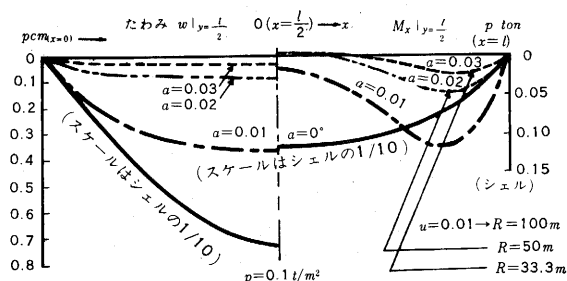
$c(\text{捩率})=0$  として Gaussian Curvature は  $\frac{1}{R_x} \cdot \frac{1}{R_y}$  で定義される。

$$\text{i} \quad \frac{1}{R_x} \cdot \frac{1}{R_y} > 0: \text{Positive Gaussian Curvature} \\ (\text{Elliptic Paraboloid: E.P.})$$

$$\text{ii} \quad \frac{1}{R_x} \cdot \frac{1}{R_y} = 0: \text{Zero Gaussian Curvature} \\ (\text{Cylinder})$$

$$\text{iii} \quad \frac{1}{R_x} \cdot \frac{1}{R_y} < 0: \text{Negative Gaussian Curvature} \\ (\text{Hyperbolic Paraboloid: H.P.})$$

鉄筋コンクリートシェルとして E.P. シェル(i)は最も剛性強度の高いシェルであって、Zeiss 工場での試作が最初であると記録されている。E.P. シェルには球殻のもつ特性がほとんど生かされていて、等分布荷重に対して、ローラー支持でも撓みおよび曲げ応力は小さく、面内力は全面圧縮状態を保つ。図 3・14 は  $t=15\text{ cm}$ 、スパン  $18\text{ m}$  の正方形 R.C. 板について  $R \rightarrow \infty$  (平板) から  $R=100\text{ m}$ ,  $50\text{ m}$ ,  $33.3\text{ m}$  (E.P.) へ変化させたときの撓み  $w$  と曲げモーメント  $M_x$  の変化であり、表 3.3 は鉄線モルタル試験体 (正方形板)、スパン  $100 \sim 150\text{ m}$ 、厚  $0.6 \sim 1.1\text{ cm}$ 、各種妻壁厚の変化 (固定度の変化) に対する実験結果で、平板の強度との比較がなされている。



\*  $a=0$  (実線は平板で  $w, M$  の目盛は10倍して読む)

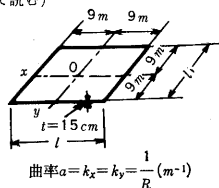


図 3.14 平板と E.P. シェルのたわみおよび応力

表 3.3

| R(cm)    | 終局荷重*                               | 平板の耐力 1 に対する倍率 |
|----------|-------------------------------------|----------------|
|          | コンクリート強度 $\times$ (板厚) <sup>2</sup> |                |
| $\infty$ | 3.2 ~ 4.2                           | 1              |
| 500      | 4.0 ~ 4.8                           | 1.2            |
| 250      | 5.0 ~ 9.8                           | 2.0            |
| 125      | 19.5 ~ 32.0                         | 6.9            |

\* 左は固定度小、右は大  
る<sup>29)</sup>。

切断球殻の実施例は大日本インキ工場 (東京、志村、(1957 年)、スパン  $22.5\text{ m} \times 22.5\text{ m}$  の Premabhai Hall (印度、Ahmedabad、未着工、図 3.15) および変形 4 次曲面シェルとして紡績工場 (印度、Ahmedabad) など、写真 3.7, 3.8 は 1958 年に行なった模型実験の試験体である。

ところで  $\left| \frac{1}{R_x} \right| = \left| \frac{1}{R_y} \right| = \frac{1}{R}$  の場合 (1), (2) 式は等分布荷重  $p_0$  を受けるシェルについて次式のようになる。

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \pm \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = p_0$$

$$\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

+ は E.P. であり - は H.P. である。



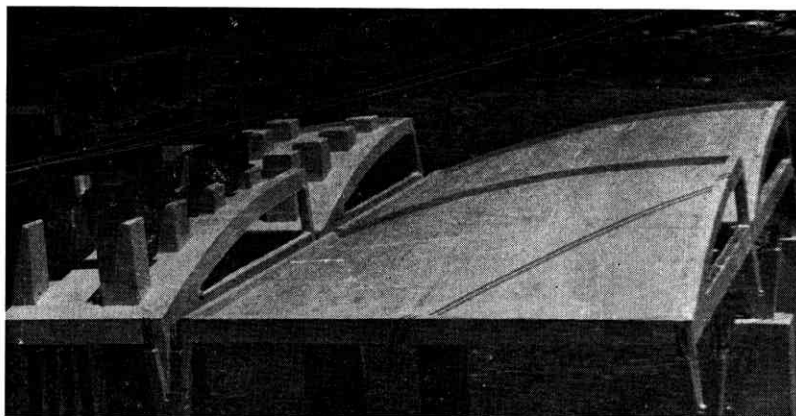


写真 3.7 アショカミルに採用された4次曲面シェルの模型実験

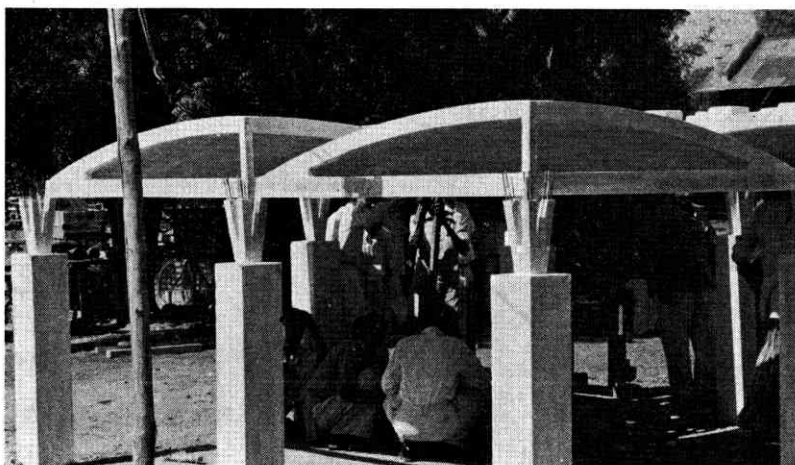


写真 3.8 同 上

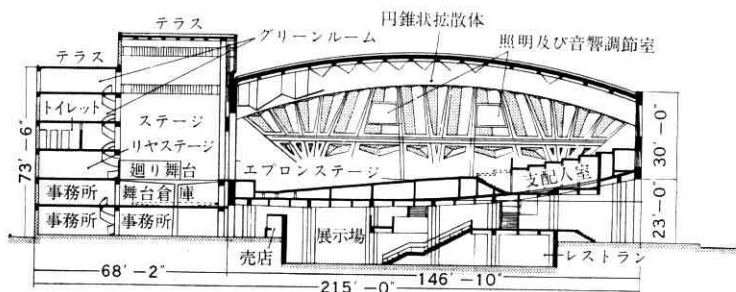


図 3.15 Premabhai Hall.

このシェルの正方形板(辺長  $a$ )としてローラー支持で解き、板中央の撓み  $w_0$  を算出すると、

$$w_0 = \frac{16 p_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_n \sum_m \frac{1}{mn} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(m^2 + n^2)^2 + \alpha_{mn}^2 \beta^2}$$

ここに

$$m, n = 1, 3, 5, \dots, \infty, \beta^2 = \frac{E a^4 t}{\pi^4 D R^2} = \frac{12 a^4}{\pi^4 R^2 t^2}$$

$$\alpha_{mn} = 1 \text{ (E. P.)}, \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \text{ (H. P.)}$$

$\beta = 0$  は平板であるが、 $\beta \neq 0$  について変形は E. P. では明らかに平板より小さく、H. P. では  $m=n$  で平板と変わらないことがわかる。  $m, n=1, 3$  だけでは  $R = a = 12 \text{ m}$ ,  $p_0 = 500 \text{ kg/m}^2$ ,  $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\beta = 1.234 \times 10^3$  に対し、

$$\text{E. P.: } w_0 = 0.0235 \text{ cm}$$

$$\text{平板: } w_0 = 14.6 \text{ cm}$$

$$\text{H. P.: } w_0 = 15.3 \text{ cm}$$

である。しかし板の撓みの平均値  $\bar{w}$  を求めると、



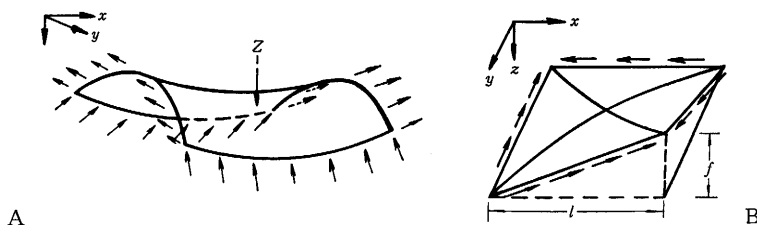


図 3.16

$$\bar{w} = \frac{64 p_0 a^4}{\pi^8 D} \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2 + \alpha^2 m n \beta^2}$$

となり、明らかに H. P. も平板よりは小さな平均撓みをもっている。いうならば、E. P. シェルが力の流れがきわめてなだらかであるのに対して、H. P. シェルは変形が躍動し、応力が激烈に変化することを想像するのである。

またシェル構造物での失敗例が EP—円筒—H. P. の順に増していることは、H. P. シェルのこの性格に起因するとも思われるのである。

### 3.5 H. P. シェル

#### A. H. P. シェルの膜応力

H. P. シェルの使い方に A, B 2 種類ある。

$$z = \frac{1}{2} a (x^2 - y^2) + (x, y \text{ の 1 次式}), \quad z = Cxy + (x, y \text{ の$$

1 次式)において  $C=a$ ,  $\left[C = -\frac{f}{l^2}\right]$  ならば A, B 曲面は同じ曲面であることがわかる。いま  $Z=p_0=\text{const.}$  とし B では

$$N_{xy} = -\frac{p_0}{2C} = \frac{p_0 l^2}{2f}$$

なる反力があれば膜応力は成立する。

$$\text{また A では } N_x = \frac{p_0}{2a} (\text{引張り}), \quad N_y = -\frac{p_0}{2a} (\text{圧縮})$$

なる反力で膜応力が成り立つ。

$N_{xy}(B)$  は純せん断応力であり、 $C=a$  では  $N_x, N_y$  (A) はその主応力なのである。このような支え方、あるいはこれに、ごく近い支え方をしないと、H. P. 曲面の応力はただちに膜応力状態から曲げ応力状態に移行する。そして曲げ応力発生状態は、E. P. 曲面ではきわめて局部的であるのに、H. P. 曲面では全領域にわたって著しい。前節の例は、A について  $N_x=N_y=0$  の支え方をしたから平板に近くなったのであって、E. P. 曲面ではこのような現象は起こらない。ふちばりの伸縮 0、その自重 0 のときは図 3.16. B のようなシェル純膜応力状態が成立する。メキシコの Candela はこのような連続 H. P. 曲面を数多く実施した。

#### B. 変形予測のむずかしさ

図 3.17 のようなシェルは H. P. シェルの基本形であるが、上述のとおり曲げ応力の全面的支配が想像され

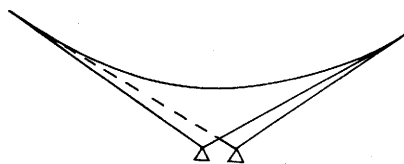
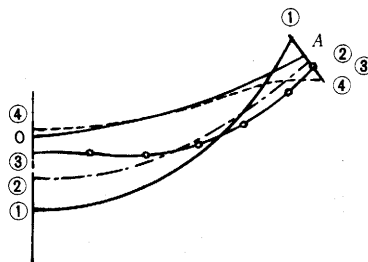


図 3.17



- ① タイのない場合 ローラ支持
- ② タイのある場合 タイの伸び大
- ③ タイのある場合 タイの伸び小
- ④ 支点の移動 0 の場合

図 3.18 2 点支持 HP シェル A0 線上のたわみ曲線

る。

脚部をローラー支持し、つぎにこれに tie を入れて tension を与えピン（脚部移動なし）の状態に移る間のシェル中央および先端の変位に着目すると、変形の土さえ捉えるのに困難を感じると思う。

図 3.18 は図 3.17 に示す H. P. シェルの支持されない隅を結ぶ対角線上の撓みの比較を示したものである。

#### C. Negative Gaussian Curvature の利用

Negative Gaussian Curvature をもつ曲面の性格を膜応力だけについて述べることにしよう。

膜応力の近似解は、温度変化をゼロ、 $k_{xy}=0$ ,  $X=Y=0$ ,  $Z=-p_0=\text{const.}$  について(3)式で、

$$k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad N_x = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \dots \dots \text{とし、} D=0 (\text{曲げ剛性 } 0) \text{ とすると、}$$

$$N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = p_0 \quad (5)$$

もし  $N_x=N_y=N$  ならば(5)式は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p_0}{N} \quad (6)$$

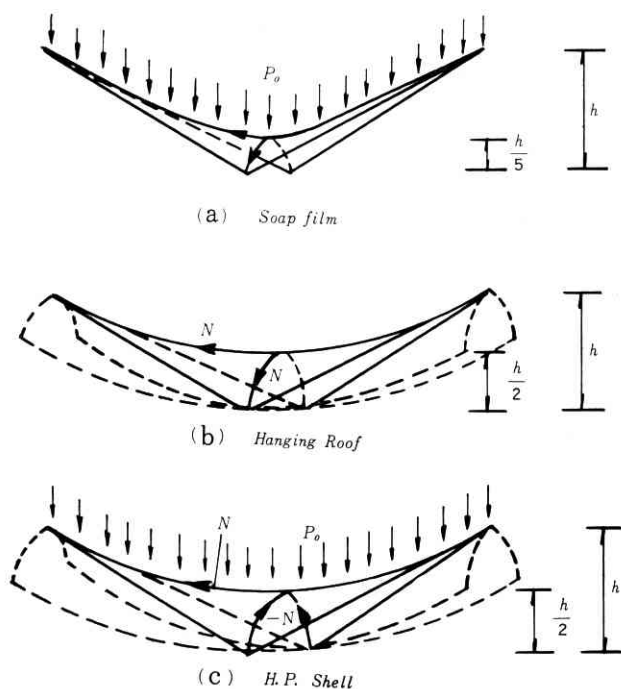


図 3.19 曲面形および荷重と内部応力の比較

となり、これは表面張力  $\frac{N}{2}$  なる石鹸膜であり一般に

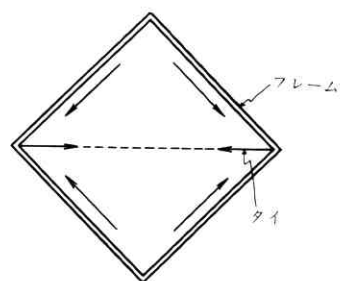


図 3.20

Liquid Surface  $z$  を求める近似式であり、力の流れは図 3.19(a) のようになる。

また(5)式で  $N_x=N_y=N$ ,  $p_0=0$  は  $x, y$  方向に元応力を与えたり吊り屋根構造の無荷重状態の式であって

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

で、力の流れは図 3.19(b) のようになる。

また  $N_x = -N_y = N$ ,  $p_0 \neq 0$  では

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p_0}{N} \quad (8)$$

となり、力の流れは図 3.19(c) のようになる。これはまた図 3.16A に相当し、またBにも対応する。

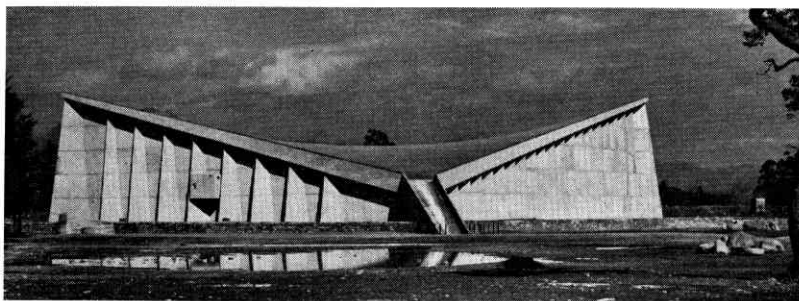


写真 3.9 静岡駿府会館

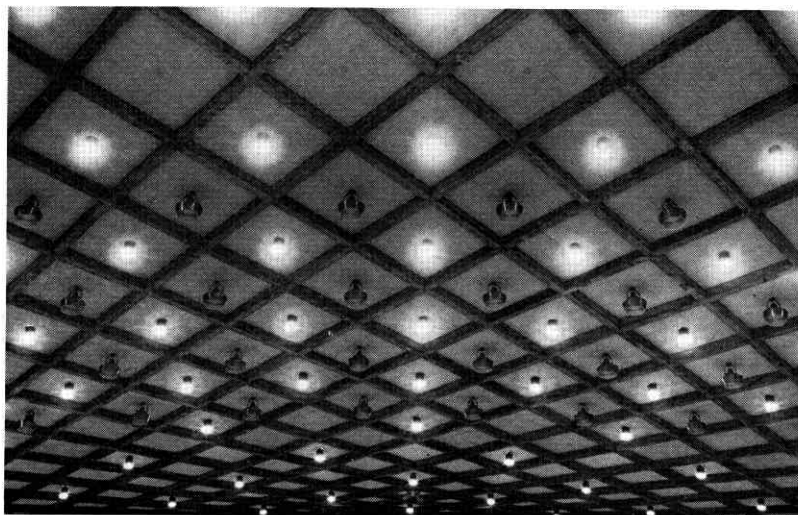


写真 3.10 同上内部格子型リブ

そして(7)で作られる曲面の一つ

$$z = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$$

(A)あるいは  $z = cxy$  (B)

はそのまま(8)において

$$N_x = -N_y = N = \frac{p_0}{2a} \quad (A)$$

あるいは

$$N_{xy} = N = \frac{p_0}{2c} \quad (B)$$

の場合の曲面となる。

このように荷重と曲面の形と応力の符号が3者で著しく異なることがわかるのである。Negative Gaussian Curvature の特質である。次に H. P. シェルの実施例を掲げる。

a) 静岡駿府会館 (1957 年)

スパン 40 m, シェルスラブは曲げモーメントに抵抗するため格子型リブをもっており, 図 3.19 に示すように縁ばりのスラストをタイによって処理している。

写真 3.9, 3.10 に駿府会館の全貌および格子型リブの様子を示す。

b) 下関市体育館<sup>30)</sup> (1963 年)

幅約 48 m, 長さ 70 m の平面で, 固定席 2,000, 移動席 2,000, 舞台は移動式になっている。

写真 3.11, 3.12 に下関市体育館の鉄骨模型と正面を示す。

c) 東京カテドラル聖マリア大聖堂<sup>31)</sup>

(1964 年)

8 枚の鉄筋コンクリート H. P. シェルを壁のように立てて結合した構造である。写真 3.13 に全景を示す。

D. 吊り屋根構造とオリンピック屋内競技場

(1964 年)<sup>32), 33)</sup>

写真 3.14 に示すオリンピック屋内水泳場は図 3.21 のような構造組織をもつ吊り屋根構造である。

吊り綱 Tragseile (下向き凸) と押え綱 Spannseile (上向き凸) による network の構造は 2 次元的には吊り橋構造で開発された構造法であるが, 平行した一群の吊り綱にはほぼ直交する一群の押え綱に元応力を与えることにより, 両者とも元応力をもった構造体を形作る。主として元応力自身が風圧, 地震力に対して屋根面の変形を復元するから, 元応力はいわば重量を伴わない補剛材として活躍するのである。しかしながらこれらの network 自身は曲げ剛性はなく, すべて面内の応

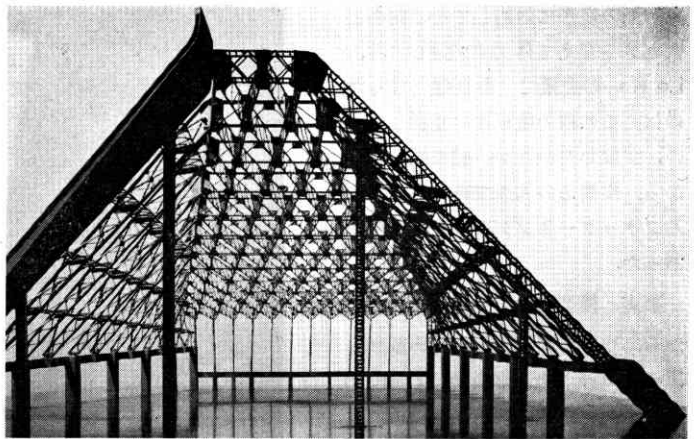


写真 3.11 下関市体育館鉄骨模型

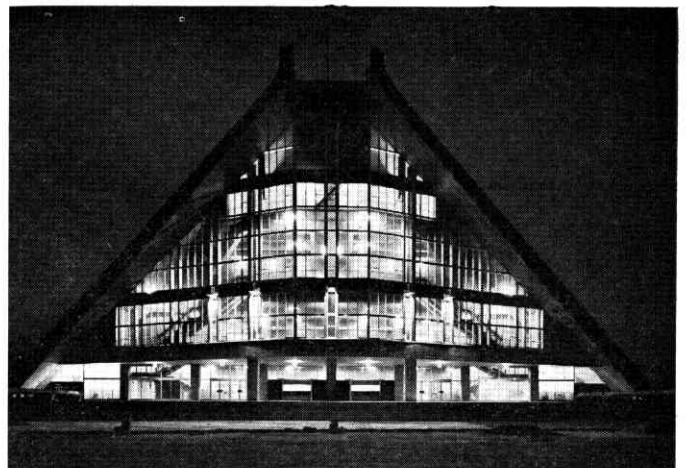


写真 3.12 下関市体育館正面

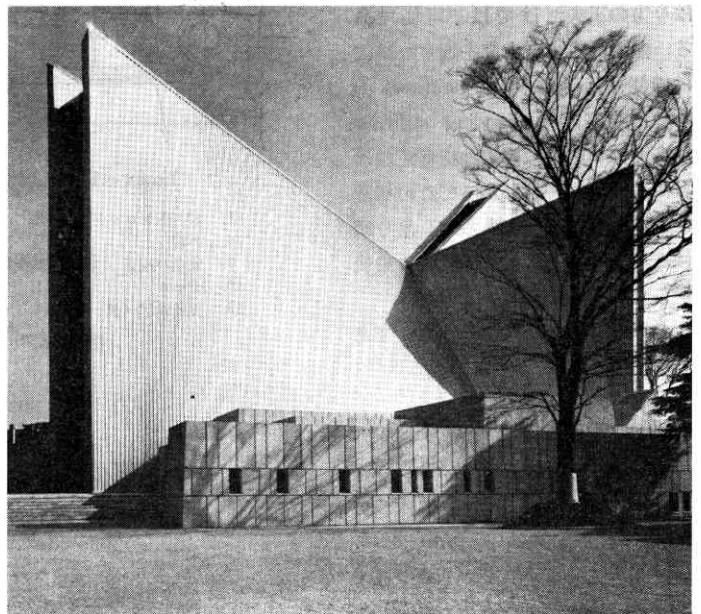


写真 3.13 東京カテドラル聖マリア大聖堂

力が面の変形に対応してその向きと大きさを覚えて外力に抵抗する。  
i. a. s. s. の会議で一番問題となったのは、この種の屋根面は変形しやすい。すなわち剛性が一般に弱いことから、柔構造の弱点である風に対するフラッターリングの現象の心配であった。

事実、模型実験  $\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{30}\right)$  の結果から、次固有周期として対称振動： $T=0.89$  秒，非対称振動： $T=0.86$  秒が予測（実際の構造物は屋根鉄板葺の剛性のため  $T=0.42, 0.67$  秒と低下した）されたので、前者を曲げ、後者を振り振動と考えて周期の一致によるフラッターリングの現象を避けるために図 3.22 に示すような oil damper を用いてメインロープの振動の減衰強化を図った。

またこの構造では図 3.20 に見るようにトップライトを取るために 2 本のメインケーブルの間を開く必要があったので、図 3.23 に示すような回転サドルが柱頭に設けてある。写真 3.14 にその取付作業の様子を示す。

もともとこの吊り屋根構造の形は周辺の剛な構造物の形状で規制され、任意曲面の構成は、ケーブルのはり方の工夫だけでは不可能である。曲面構成の自由度を増すためには伸び剛性 extensional stiffness  $B$  の他に曲げ剛性 bending stiffness  $D$  をもつ半剛性の構造物を考えなければならない。したがってこの構造は押え綱はロープであるが、吊り綱は途中にピンをもつ鉄骨ビームを使用したのである。

曲面構成の式はつぎのとおりである。

$z$ : 求める曲面の形

$z_0$ : 荷重や P. S. を加える前の曲面

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ B_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} = 0$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$+ H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + p_{z0} = 0$$



写真 3.14 オリンピック屋内競技場内部

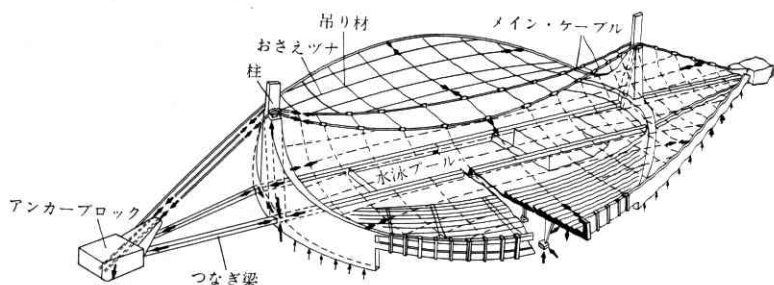
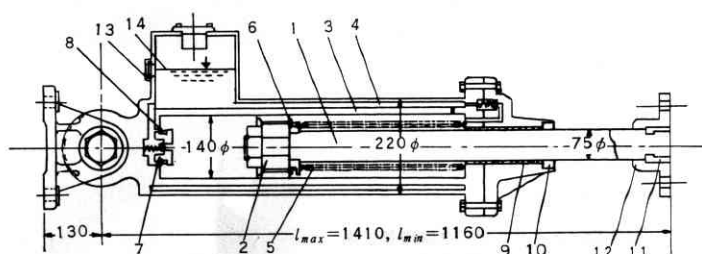


図 3.21 構造組織図



$L_{max}=1,410, L_{min}=1,160$  (ストローク 250)

- |            |             |             |
|------------|-------------|-------------|
| 1. ピストンロッド | 2. ピストン     | 3. 内管       |
| 4. 外管      | 5. 戻しパネ     | 6. 吸入バルブ(A) |
| 7. 安全バルブ   | 8. 吸入バルブ(B) | 9. ベアリング    |
| 10. シール    | 11. リングキー   | 12. フランジ    |
| 13. オイルゲージ | 14. ダンパーオイル |             |

図 3.22 オイルダンパーの機構

$w = z - z_0$  (bracing cable, Spannseile)

$H_y$ : 押え綱の tension, P. S. ならびに荷重  $p_{z0}$  によって定まる。

$$H_x = B_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$H_x$ : 吊り鉄骨の tension

$u$ :  $x$  方向 (吊り鉄骨方向) 変位

$u, w$  の与え方で  $B_x(x, y), D_x(x, y)$  がいろいろな値

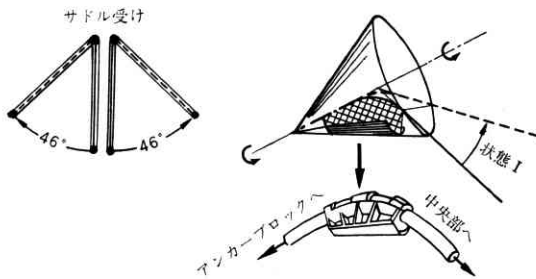


図 3.23 回転サドルの原理

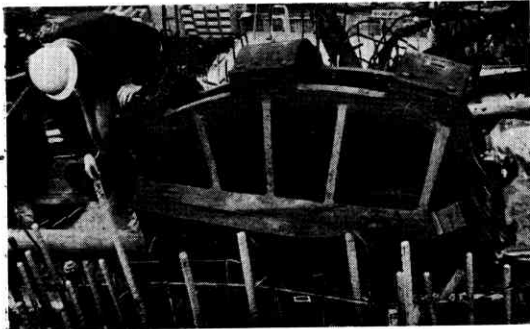


写真 3.15 回転サドルの取付作業

で求められるのが最終の  $B_x, D_x$  は許容応力度(強度), 形状(美観), 経済性で定まる。  $B_x, D_x$  が求まれば一方

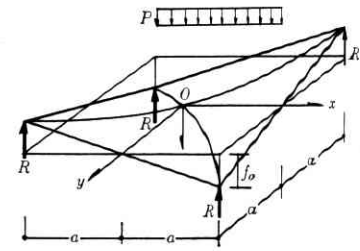


図 3.24

向 ( $x$  方向) に曲げ抵抗をもつシェルの基本式が組み立てられる。

#### D. 4 点ローラー支持の偏平 H.P. シェルの解<sup>31)</sup>

図 3.24 に示すように、シェル厚  $t$ , スパン  $2a$ , 曲面の座標  $Z=cxy$  の H.P. シェルが均分布荷重  $p$  を受け四隅でローラー支持されている場合の基礎微分方程式は

$$D\nabla^2\nabla^2w + 2C\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = p$$

$$\frac{1}{Et}\nabla^2\nabla^2\phi - 2C\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} = 0$$

である。  $x=a\xi$ ,  $y=a\eta$ ,  $\alpha_m = \frac{m\pi}{2}$ ,  $\alpha_n = \frac{n\pi}{2}$  において上式を  $w=w_0+w_1+w_2$ ,  $\phi=\phi_0+\phi_1+\phi_2$  として解くと次のようになる。

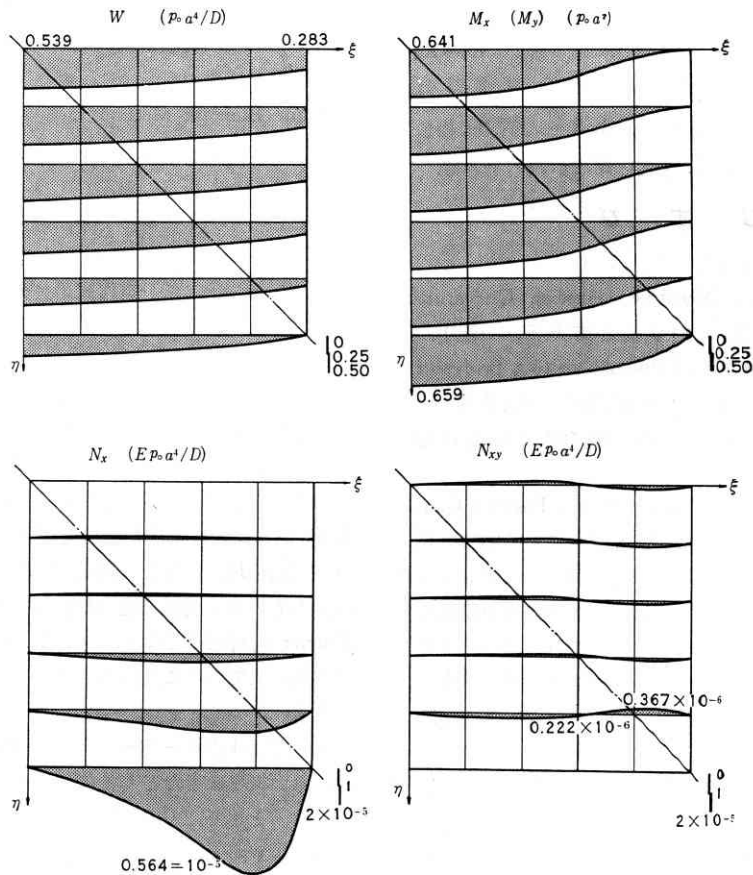


図 3.25 4 点支持 H.P. シェルの変位および応力図

一般解:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{n=1,3,\dots} w_{1n}(\eta) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \alpha_n \xi + \sum_{m=1,3,\dots} \bar{w}_{1m}(\xi) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \alpha_m \eta \\ \phi_1 &= \sum_{n=1,3,\dots} \phi_{1n}(\eta) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \alpha_n \xi + \sum_{m=1,3,\dots} \bar{\phi}_{1m}(\xi) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \alpha_m \eta \\ w_{II} &= K_1 + K_2(\xi^4 + \eta^4) + K_3(\xi^6 + \eta^6) + K_4 \\ &\quad \left( \xi^8 + \eta^8 - 10080 \frac{J_0}{ch} \xi^2 \eta^2 \right) \\ \phi_{II} &= -48 J_0 K_2 \xi \eta - 120 J_0 K_3 (\xi^3 \eta + \xi \eta^3) \\ &\quad - 336 J_0 K_4 \left( \xi^5 \eta + \xi \eta^5 - 240 \frac{J_0}{ch} \xi \eta \right) \\ \frac{1}{J_0} &= 24(1 - \nu^2) (ca) \left( \frac{a}{t} \right)^3 \end{aligned}$$

特別解: (周辺単純支持 H. P. シェルの級数解を用いる。

$$\begin{aligned} w_0 &= \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \alpha_n \xi \cdot \cos \alpha_m \eta \\ \phi_0 &= \sum_m \sum_n \phi_{mn} \sin \alpha_n \xi \cdot \sin \alpha_m \eta \\ w_{mn} &= \frac{4(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 \sin \alpha_m \cdot \sin \alpha_n}{\left\{ \alpha_m^2 + \alpha_n^2 \right\}^4 + \frac{2ch}{J_0} \alpha_m^2 \alpha_n^2} \cdot \frac{pa^3}{D} \\ \phi_{mn} &= \frac{8ch \cdot \sin \alpha_m \cdot \sin \alpha_n}{(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^4 + \frac{2ch}{J_0} \alpha_m^2 \alpha_n^2} \cdot \frac{pa^3}{D} \end{aligned}$$

周辺および隅点の境界条件から得られる無限連立 1 次方程式 (有限個を採用) を解くと,  $w_{1n}, \bar{w}_{1m}, \phi_{1n}, \bar{\phi}_{1m}$   $K_1 \sim K_4$  が決定しシェルの応力, 変位が求められる. 図 3.22 は  $f_0/a = \frac{1}{4}$ ,  $t/a = \frac{2}{3} \times 10^{-2}$ ,  $m, n = 1, 3, \dots, 37, 39$  場合の変位および応力図である. 図中  $W$  は  $aw$  である.

## む す び

いよいよ本論が終論となった.

H. P. 曲面, 一般に Negative Gaussian Curvature の曲面構造がなぜ必要かということである. 一昨年, W. Flugge 教授 (Stanford Univ.) が visiting professor として京大に招かれ, 東京での特別講演 (司会著者) の際に H. P. 曲面の不利な点を強調されたことを思い起こす.

- “1) 飛行機 (戦闘機) の風防ガラスは Positive Gaussian Curvature をもつ. 機銃掃射による開口の発生は, シェル全体にはなんら影響はなく (このシェルは開口の有無にかかわらずほとんど全領域が膜応力状態を保ちつづけて安泰である) 飛行士はハンカチで穴をふさいでも基地に無事帰還できるであろう.
- 2) 胴体 (Zero Gaussian Curvature) の被害はときに致命的である.
- 3) Negative Gaussian Curvature をもつシェルはもっと不利な構造である”. と

にもかかわらず, 世界の建築家は Negative Gaussian Curvature を求める. 欧も, 米もまた最近ではソ連も

この現象は, 単に Positive Gaussian Curvature あるいは Zero Gaussian Curvature をもつ曲面が内部空間として不適当 (音響上焦点ができる) だから Negative Gaussian Curvature がよいというだけではない. 共通した現代感覚によるものだと私は思う.

故 E. Torroja 教授 (スペイン) の作品の重要なひとつ (円筒殻) が, スペインの内乱の際, 独, 伊の爆撃で破壊した. もちろん鉄筋コンクリートシェルの破壊は一瞬にして起こるものではない. 局部破壊 → 座屈 → クリープ → 崩壊までに数日を要した. この詳細は i. a. s. s. (International Association for Shell Structures) の会議で丹念に報告された. しかしこのことはどうでもよい. 彼の著書 “Philosophy of Structures” で彼はこう述べている. “構造家が構造物を設計するときの (外力) 荷重として, 破壊を目的とした人為的外力には, エンジニアとしてなんら責任を感じない. このことについては私は, まことに気楽である” (一人為的破壊力は常に建設力を上まわるものである). と,

そこで人為的破壊力どころではなく, 重力という自然現象のなかで H. P. シェルの能力の判定をおこなうことを考える. それには, 最も不利な境界条件においてこのシェルがどんな挙動を示すかを知るのがよいと思う.

私はシェルの実用解析では, 差分解析が最上であると考えている. これは生研に OKITAC 5090 が入ってから特にこれを感じた.

Finite Element Method は平面応力などについてはことにスカッとしてぐあいがよいが, 平板については必ずしも納得し得ないものがある. (実際には利用を試みてはいるが) したがって平面応力と平板応力の結合であるシェルの問題については, すでに微分方程式が成立している以上, 微分方程式の差分解析が, 少なくとも現在においては最上の工学的な方法であると信ずることにゆるぎはない. しかし一方, 多少 idealize しても, この略算 (差分法, F. E. M. など) の精度を判定するパラメータとして, Fourier 解析が最も信頼できる解析法であるという信念もまた全く棄てきれないのである.

古巣「平板」の解析法にもどり, Fourier 解析が, H. P. シェルのもっとも不利な境界条件である四点ローラー支持の場合に対して満足な解答を与えうるか否かを試みたものが, 前項で述べた解析である. この解析には Fourier 解析だけでなく, コンピュータ利用のための工夫が盛られていることに着目されれば, 著者望外の幸せである.

結論は, 4 点ローラー支持の H. P. 曲面の力学的現象は, 平板とほとんど大差ないことが裏づけられたことである. そして, 力の流れはきわめて素直なことである. もしも曲面内の流れの躍動各部の変形の気ままさ, また境界条件の微妙な変化に対応する過敏なまでの反応

が見られるときは、これを境界条件への抵抗と考えると理解できるような気がする。H. P. シェル、一般に Negative Gaussian Curvature の曲面が 20 世紀の建築において曲面構造の主役であることもその内蔵する反発力に起因するのかも知れない。(1968 年 4 月 18 日受理)

## 文 献

- 1) 坪井善勝：弾性固定版に関する諸論文，建築学会論文集，13, 14, 15号，1939年，17号，1940年
- 2) 坪井善勝：T梁に関する理論的研究，建築学会論文集，21号，1941年，26号，1942年
- 3) 坪井善勝：“□形壁体の曲げ”(Box-framed construction) 建築学会論文集，25号，1942年，九大工学集報，17巻1号
- 4) 坪井善勝：合板の剛性係数の測定，第一陸軍航研，1944
- 5) 坪井善勝：鉄筋コンクリート壁式構造について，建築雑誌昭和27年5月
- 6) 坪井善勝，田治見宏：On the Rocking Vibration of a Structure, Proceedins of the 2nd Japan National Congress for App. Mech., 1952
- 7) 坪井善勝，末永保美，重信恒雄：壁式 R. C. 構造に関する基礎的研究，日本建築学会論文報告集 No. 131, 昭和42年1月
- 8) 坪井善勝，宮崎俊二：ラーメン部材および節点応力の光弾性学的研究，日本建築学会研究報告，昭和26年6月
- 9) 坪井善勝，川股重也，田中尚，松井源吉，矢代秀雄，富井政英，田治見宏：壁式 R. C. 構造の再検討(その1～9)，日本建築学会論文報告集，昭和40年9月
- 10) 坪井善：勝耐震壁の応力解析，日本建築学会論文報告集，No. 46, 1953
- 11) 坪井善勝，加藤六美，平加謙一，末永保美，川股重也：壁式プレキャスト鉄筋コンクリート構法に関する研究，日本建築学会論文報告集，昭和41年10月
- 12) W. Flügge: Stress in Shells, 1962, Springer
- 13) E. Trefftz: Ableitung der Schalenbiegungsgleichungen mit dem Castiglianoschen Prinzip, Z. A. M. M., Bd 15 Heft 1/2, 1935
- 14) 坪井：曲面板基礎式の誘導，1949年10月応力大会講演，応用力学4巻23号，1951. 8
- 15) W. Zerna: Beitrag zur allgemeine Schalenbiegetheorie, Ingen. Arch, 1949
- 16) Green and Zerna: Theoretical Elasticity, Oxford 1954
- 17) 坪井，角野：a) 殻構造一般論の幾何学的考察 1955. 8 (日本建築学会関東支部)  
b) Variational Principles and Stability Conditions in the Theory of Finite Deformation on an Elastic Body, Proceedings of 7th Japan National Congress for App. Mech., 1957  
c) General Bending Theory of Thin Shells Proceeding of 10th Japan National Congress for App. Mech., 1960
- 18) 坪井善勝，末岡植佑：周辺固定円筒殻のフーリエ解析，日本建築学会論文集，昭和40年9月
- 19) Y. Tsuboi and M. Kawaguchi: Design of a Concrete Shell Roof Structure in the Shape of an Inverted Cylinder, Proc. of the World Conference Shell Structures, 1964
- 20) 坪井善勝：広島児童図書館の構造設計，生産研究15巻7号1943年
- 21) Y. Tsuboi and K. Akino: Design and Construction of R. C. Shell of Nonuniform Thickness Supported on Roller System, Abh. Brücken und Hochbau, Zürich, Bd 15, 1955
- 22) 坪井：偏平球殻理論とその応用，生研報告，14巻1号，昭和39年(1946年3月)
- 23) P. P. Bijlaard: Computation on Stress from Local Loads in Spherical Pressure Vessels or Preessur, Vessel Heads, Weld Research Council Bulletins Series No. 34, 1957
- 24) Y. Tsuboi: Die Stahlrippenkuppel auf dem Messegelände in Tokyo, Der Stahlbau: Wilhelm Ernst Sohne, Heft 10, 1962
- 25) 坪井，秋野，川股，鄭：“コールドホール型原子炉圧力容器の応力解析”生産研究，12巻6号，昭和35(1960)
- 26) Y. Tsuboi and K. Akino: Theories and Applications of Antisymmetrical Bending State for Spherical Shell and Cylindrical Shell. 生研報告，11巻2号，昭和36(1961)
- 27) Y. Tsuboi and S. Kawamata: An Apoximate Solution for the Antisymmetrical Bending Theory of nonshallow Spherical Shells, 生産報告，11巻3号，昭和36(1961)
- 28) 坪井：曲面構造，丸善，1965
- 29) 坪井，青木：“実験による截断球殻の特性の考察”建築学会論文集，31号，1955: 33号，1955他
- 30) Y. Tsuboi: Gymnase Municipal De Shimonoseki Japan, L'architecture D'aujourd'hui
- 31) Y. Tsuboi and R. Nasukawa: Hyperbolic Paraboloidal Shell Structure, bulletin of i. a. s. s. n. 28, 1960
- 32) Y. Tsuboi and M. Kawaguchi: Design Problems of a Suspension Roof Structure 生研報告，15巻2号，昭和40年(1965)
- 33) Y. Tsuboi und M. Kawaguchi: Probleme beim Entwurf einer Hängedachkonstruktion anhand des Beispiels der Schwimmhalle für die Olympischen Spiele in Tokyo, Der Stohlbau, Heft Berein, 1966
- 34) Y. Tsuboi and K. Nakata. "Stress analysis of hyperbolic paraboloidal shell supported at four corners", Proceedings of the Symposium of the Highrise and Long-span Structures, Dec. 1967
- 15) M. O'Keeffe and W. J. Moore: J. Chem. Phys. 36 (1962) 3009.
- 16) T. F. Swank and K. R. Lawless: Advances in X-Ray Analysis Vol. 10, p. 234. Plenum Press, New York (1967)
- 17) 本間禎一：生産技術研究所報告，15, 3 (1965) 34.
- 18) 本間禎一，米岡俊明：第62回日本金属学会講演概要，p. 56 (1968).

(p. 41 よりつづく)

- 12) K. R. Lawless: *Energetics in Metallurgical Phenomena* Vol. 1 (edited by W. M. Mueller) p. 410. Gordon and Breach, New York, (1965).
- 13) 本間禎一：第61回日本金属学会シンポジウム講演予稿，p. 181 (1967).
- 14) H. Wieder and A. W. Czanderna: J. Phy. Chem. 66 (1962) 816.