

弾塑性問題とマトリックス法

Analysis of the Elastic-plastic Problems by the Matrix Method

山 田 嘉 昭*

Yoshiaki YAMADA

1950年代のはじめ頃からたい頭してきたマトリックス有限要素法は土木・建築・造船・航空・機械・金属工学など工学のあらゆる分野に驚異的な速度で浸透しつつある。ここでは弾塑性問題を対象とし、連続体と骨組(トラス)について、最近の手法とコンピュータによる計算結果を述べる。連続体の取扱いの出発点は、筆者がさきに報告した簡単な形の塑性応力-ひずみ剛性マトリックスである。

1. ま え が き

材料力学とくに構造物の弾性設計が、マトリックス法によって書きかえられつつあることは、いまでは周知のことからである。一度この新しい手法を知れば、たいていの人々は、従来の方法で記述されている材料力学をほとんど要らないものと思ってしまう。マトリックス法では一つの例題を解き、その計算機プログラムの開発に成功すれば、同種の問題はすべて解けたことになる。このような解析の組織化は、研究者にとっても、企業体にとっても、はなはだ大きな魅力である。弾性問題の領域におけるマトリックス法の輝かしい成功に刺戟され、それを塑性・粘弾性・その他、材料の非線形特性の問題に拡張適用しようとするのは、きわめて自然なことといわなければならない。

本特集号では、マトリックス法の現状と将来についていろいろな角度から解説と展望が試みられ、また最近の成果のいくつかが速報の形で報告されることになっている。したがって、ここでは重複を避け、筆者が久しく専門分野としてきたところの塑性力学、その中でもとくに弾塑性問題に焦点をあわせ、マトリックス法の応用とその可能性について概説することにした。

2. 弾塑性問題の解析のいままで

材料または構造物の一部分または全体に降伏を生じ、塑性の状態になると、応力とひずみの間に、弾性問題において Hooke の法則であらわされるような 1 対 1 の関係が成立しなくなる。そこで全変形過程を何段階かに分割し、応力およびひずみの増分 (increment) の概念を導入して問題を取扱わなければならない。Hooke の法則に代わり、弾塑性問題の解析に広く用いられている応力-ひずみ関係式は Reuss の式¹⁾²⁾である。

弾塑性問題の最も簡単な例題として、しばしば引用されるのは、平面ひずみ状態におけるブロックの圧縮である。ブロックは x 方向の変形を拘束され、 y 方向に一

様な圧縮力を受ける(図 1 参照)。この問題の弾性解は、Hooke の法則を適用して、簡単に

$$\sigma_x = \nu\sigma_y, \quad \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_y, \quad \sigma_z = 0, \quad \varepsilon_z = 0$$

と求められる。ただし σ は応力、 ε はひずみ、 ν はポアソン比、 E は縦弾性係数、添字はそれぞれ関連する座標軸の方向をあらわす。

図 1 の平面ひずみ問題では、ブロックの全体が一樣な圧縮状態にあり、したがって弾性域と塑性域を区別してその境界である刻々の弾塑性境界を求める必要はない。しかしながら、よく知られているように、Reuss の式を用いた弾塑性解析は長々としたものになる³⁾。図 2 は、材料を非硬化性とし、 σ_y と σ_x について平面ひずみ圧縮

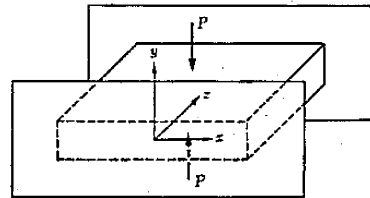


図 1 平面ひずみ条件下のブロックの圧縮

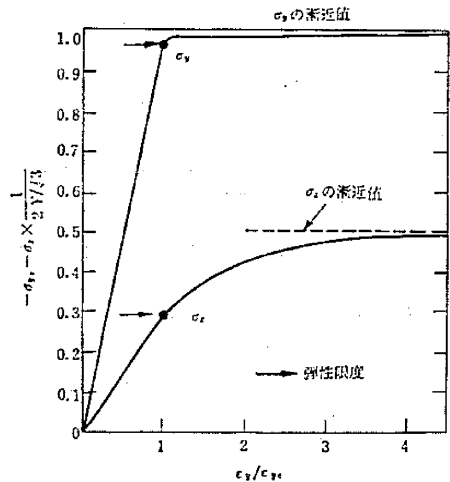


図 2 平面ひずみ条件下の圧縮における応力

* 東京大学生産技術研究所第 1 部

問題の弾性解とその後の弾塑性解を示したものである。

図2にみられるように非硬化性材料の弾塑性状態の応力(または荷重)は、ひずみ(または変形)の増加とともに、ある一定値に漸近しあるいはある最終値に到達する。ただしとくにことわらない限り、物体要素の位置の変化を無視するものとする。リミット・アナリシスは弾塑性変形を追跡することなく、すなわち中間の計算をとばして、上のような荷重の漸近値または最終値を求めようとするきわめて特色のある手法である。図1の問題における応力の漸近値は

$$\sigma_y = -\frac{2}{\sqrt{3}}Y, \quad \sigma_z = -\frac{1}{\sqrt{3}}Y$$

ただし Y は圧縮降伏応力である。図3(b)のような非硬化性の剛塑性体を仮定し Lévy-Mises の方程式を適用すれば、容易に同じ結果が得られることもよく知られている。

弾塑性問題の第2の例として、図4は、内圧を受ける厚肉円管の解を示したものである。円管の内半径と外半径はそれぞれ a および b 、内壁側の塑性域と外壁側の弾性域をわかつ弾塑性境界の半径は c である。

図4の解では、Trescaの降伏条件を用いているので、非硬化性材料の半径応力 σ_r と円周応力 σ_θ の計算は簡単である。しかしながら軸応力 σ_z や変形の計算は容易でなく、また Mises の降伏条件を用いる場合には、 σ_r と σ_θ の計算にも非常な労力を必要とする。このような問題は、いままで差分法によって取扱われていたが、最近ではそれに対抗して、マトリックス法による解も発表されはじめた⁴⁾。

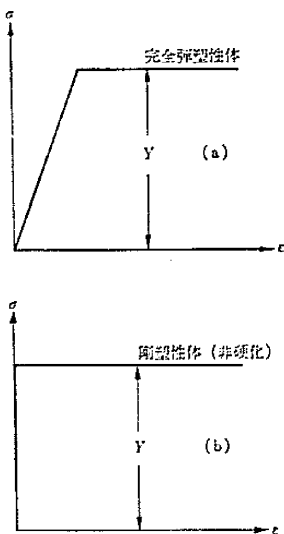


図3 弾塑性および剛塑性体

図4の $c/b=0.4$ は弾性限度、 $c/b=1.0$ は塑性域が外壁に達した全塑性状態の応力分布を示す。弾性論は前者を、またすでに述べたように、リミット・アナリシスは後者を取扱うものである。目的に応じて、そのいずれも有用であろうが、中間($c/b=0.4\sim 1.0$)における弾塑性状態の応力とくに σ_θ の分布が弾性および全塑性状態のいずれとも比較して

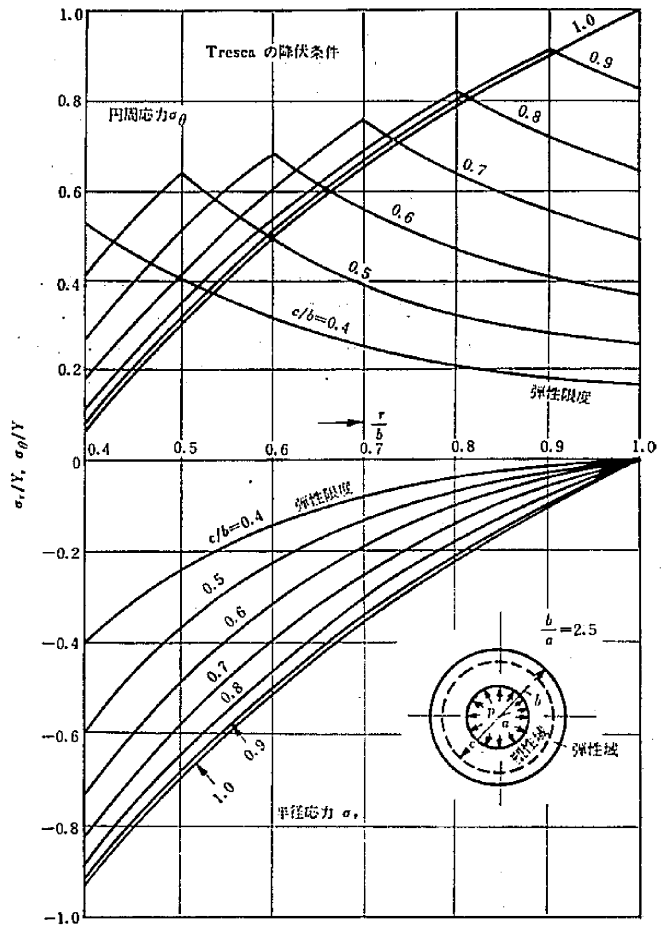


図4 内圧を受ける厚肉円管の円周応力 σ_θ と半径応力 σ_r の分布

かなりちがっていることに注目したい。弾塑性状態で、多少の塑性降伏領域があったとしても、それに近接する弾性領域が大きな応力を受持ち*、円管全体としての強度は、いぜんとして維持されることになる。強度設計においてわれわれが最も知りたいところのものは、解析が可能であれば、リミット・アナリシスなどで取扱っている極限状態よりはむしろ、このような弾塑性状態における挙動なのである。

終わりに第3の例として半無限体に剛体ポンチを押し込む問題を考える。図5(a)は弾性解を示し、(b)はすべり線場の理論を適用して得られた有名な Prandtl の解である。弾性解ではポンチの隅Aに大きな応力集中(理論的には無限大)があり、もし弾性解が実際に成立つものとするれば、ほとんど荷重がゼロの状態でもA点に破断を生じなければならない。ところが実際の材料は塑性を持ちその永久変形能力によって降伏するので**、応力は無限大とならないし、また普通は破断も起こらない。

* 綱引きを例にとれば、前にならんでいる人が疲れても、うしろの人が一そう頑張って負けないような状態。それまで一歩力を受持っていた人には休んでもらい、残りの人が助けて、全体としての崩壊あるいは破断を防ぐことになる。

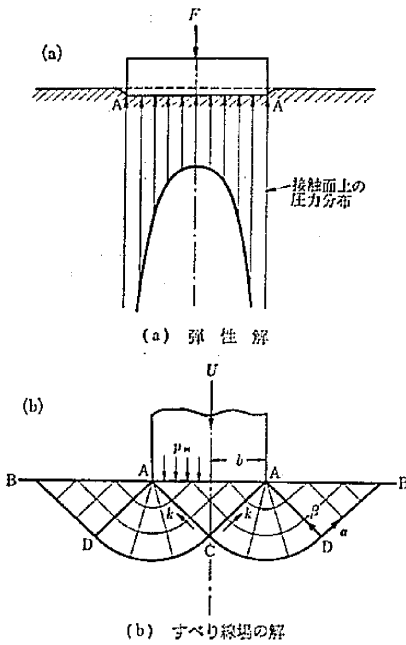


図 5 剛体ポンチの半無限体への押し込み

図 5 (a) は、鋭い切欠きや接触の隅における弾性解がまったく非現実的なものであることを示すよい例である。一方において (b) の解は、金属の硬さや塑性接触の問題などに応用され、有用であることが認められているが、(a) の解からあまりにも飛躍している。(a) と (b) の間を結ぶ弾塑性問題の解が待望されるゆえんであり、そのような解析がなされない限り、材料強度の研究も、今後にはほとんど進展を期待することができないといえる。

3. 連続体の弾塑性問題とマトリックス法

連続体を取扱う場合、マトリックス法では、物体を何個かの有限の数からなる要素に分割する。われわれは連続体を小さな要素（結晶や結晶粒など）の集合の平均的な性質をあらわすものとして取扱っているが、新しい手法（有限要素マトリックス法とよばれる）は、連続体を原始の集合要素に還元するかにみえ、はなはだ興味を覚えるのである。このことから、新しい手法は、微視的な材料強度の領域と巨視的連続体の力学の橋渡しをする大きな可能性を内包しているといわなければならない。

マトリックス法による連続体の弾塑性問題の取扱いが弾性問題のそれと異なる点は、次の二つに帰着する。

(1) 変形を何段階かにわけ、刻々の変化を追跡しなければならないこと（塑性変形は、はじめにも述べたように増分的であるから）。この場合、各変形段階ごとに

物体を有限個に分割したとの要素に、新しく降伏が生じるかを判定することが必要となる。

(2) 塑性状態になった要素について、弾性の Hooke の法則に代わる塑性の応力-ひずみマトリックスを必要とすること。

(1) は単に計算の回数あるいは時間だけの問題でありまた順々に降伏してゆく要素を一つずつ追跡する方法を用いるならば、要素の降伏や除荷などの判定も比較的容易である⁵⁾⁶⁾。(2) については、Reuss の式を逆変換した形の簡単な応力-ひずみマトリックスが、最近になって筆者により見出された⁷⁾。その際には、一般的な手法で式の誘導を行なったので、ここで理解しやすい形で、証明を繰り返すことにしたい。

Reuss の式は、普通は次の形で書きあらわされている。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x &= \sigma'_x d\lambda + d(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z)/E \\ d\epsilon_y &= \sigma'_y d\lambda + d(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z)/E \\ d\epsilon_z &= \sigma'_z d\lambda + d(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)/E \\ d\gamma_{xy} &= 2\tau_{xy} d\lambda + d\tau_{xy}/G \\ d\gamma_{yz} &= 2\tau_{yz} d\lambda + d\tau_{yz}/G \\ d\gamma_{zx} &= 2\tau_{zx} d\lambda + d\tau_{zx}/G \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし $d\epsilon_x, \dots, d\gamma_{xy}, \dots$ はひずみ増分, $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ は応力, E と G はそれぞれ縦および横弾性係数, ν はポアソン比をあらわす。また $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ および σ'_z は次の式で定義される偏差応力である。

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma$$

ただし

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

(1) 式におけるせん断ひずみ $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ は工学の定義にしたがったもので、テンソルの定義の 2 倍をあらわすことに注意が必要である。(1) 式を逆変換して、応力増分 $d\sigma_x, \dots, d\tau_{xy}, \dots$ をひずみ増分 $d\epsilon_x, \dots, d\gamma_{xy}, \dots$ で表示した剛性マトリックスを求めるには、正值の比例係数 $d\lambda$ を応力増分であらわした式を用いるのが簡便である。ところで $d\lambda$ が次の式で与えられることはよく知られている¹¹⁻¹³⁾。

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}H'} \quad (2)$$

ただし $\bar{\sigma}$ は相当応力をあらわし

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2) \quad (3)$$

H' は、引張りまたは圧縮試験で得られる応力-ひずみ曲線のこう配、すなわち材料の加工硬化率をあらわし、考えている状態における相当応力 $\bar{\sigma}$ の関数として一義的に定まる。(3) 式を微分形であらわし、(2) 式に代入して $d\bar{\sigma}$ を消去すると

$$d\lambda = \frac{9}{4\bar{\sigma}^2 H'} (\sigma'_x d\sigma'_x + \sigma'_y d\sigma'_y + \sigma'_z d\sigma'_z + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} + 2\tau_{yz} d\tau_{yz} + 2\tau_{zx} d\tau_{zx})$$

(前ページ) ** 結晶粒の大きさ、介在物、切欠き近傍の仕上げ精度などは小さな領域に生じる最初の降伏に影響を与える。しかし全体としての強度に及ぼす影響はそれほど大きくないであろう（ここでは疲労強度などを別として）。

上の式を、次の関係

$$\begin{aligned} d\sigma_x' &= d\sigma_x - d\sigma, & d\sigma_y' &= d\sigma_y - d\sigma, \\ d\sigma_z' &= d\sigma_z - d\sigma, \\ \sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' &= 0, & d\sigma &= \frac{1}{3}d(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned}$$

を用いて書きかえると

$$d\lambda = \frac{9}{4\sigma^2 H'} (\sigma_x' d\sigma_x + \sigma_y' d\sigma_y + \sigma_z' d\sigma_z + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} + 2\tau_{yz} d\tau_{yz} + 2\tau_{zx} d\tau_{zx}) \quad (4)$$

(4)式を(1)式に代入し、簡単のため $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ の問題を考えることにすると

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \left(\frac{9\sigma_x'^2}{4\sigma^2 H'} + \frac{1}{E}\right) d\sigma_x + \left(\frac{9\sigma_x' \sigma_y'}{4\sigma^2 H'} - \frac{\nu}{E}\right) d\sigma_y \\ &\quad + \left(\frac{9\sigma_x' \sigma_z'}{4\sigma^2 H'} - \frac{\nu}{E}\right) d\sigma_z + \frac{9}{2\sigma^2 H'} \sigma_x' \tau_{xy} d\tau_{xy} \\ d\varepsilon_y &= \left(\frac{9\sigma_x' \sigma_y'}{4\sigma^2 H'} - \frac{\nu}{E}\right) d\sigma_x + \left(\frac{9\sigma_y'^2}{4\sigma^2 H'} + \frac{1}{E}\right) d\sigma_y \\ &\quad + \left(\frac{9\sigma_y' \sigma_z'}{4\sigma^2 H'} - \frac{\nu}{E}\right) d\sigma_z + \frac{9}{2\sigma^2 H'} \sigma_y' \tau_{xy} d\tau_{xy} \\ d\varepsilon_z &= \left(\frac{9\sigma_x' \sigma_z'}{4\sigma^2 H'} - \frac{\nu}{E}\right) d\sigma_x + \left(\frac{9\sigma_y' \sigma_z'}{4\sigma^2 H'} - \frac{\nu}{E}\right) d\sigma_y \\ &\quad + \left(\frac{9\sigma_z'^2}{4\sigma^2 H'} + \frac{1}{E}\right) d\sigma_z + \frac{9}{2\sigma^2 H'} \sigma_z' \tau_{xy} d\tau_{xy} \\ d\gamma_{xy} &= \frac{9\sigma_x' \tau_{xy}}{2\sigma^2 H'} d\sigma_x + \frac{9\sigma_y' \tau_{xy}}{2\sigma^2 H'} d\sigma_y + \frac{9\sigma_z' \tau_{xy}}{2\sigma^2 H'} d\sigma_z \\ &\quad + \left(\frac{9\tau_{xy}^2}{\sigma^2 H'} + \frac{1}{G}\right) d\tau_{xy} \end{aligned}$$

$\sigma_z = 0$ の平面応力問題では、上の式に $d\sigma_z = 0$ とおき、 $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\tau_{xy}$ について解けば、所要の応力-ひずみ剛性マトリックスが得られる。 σ_z がゼロでない一般の問題では、逆変換を行なった結果をマトリックスの形式であらわすと

$$\begin{pmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = 2GD^p \begin{pmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

応力-ひずみ剛性マトリックス D^p は

$$D^p = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_x'^2}{S} & & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_x' \sigma_y'}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_y'^2}{S} & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_x' \sigma_z'}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_y' \sigma_z'}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_z'^2}{S} & & \\ \frac{\sigma_x' \tau_{xy}}{S} & \frac{\sigma_y' \tau_{xy}}{S} & \frac{\sigma_z' \tau_{xy}}{S} & \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{S} & \end{pmatrix} \quad (6)$$

ただし

$$S = \frac{2}{3} \sigma^2 \left(1 + \frac{H'}{3G}\right) \quad (7)$$

弾性の問題において、(5)式と(6)式に対応する式はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = 2GD^e \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$D^e = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

である。弾性の問題がマトリックス有限要素法で解かれているならば、塑性状態になった要素の応力-ひずみマトリックスを D^e から D^p におきかえるだけで、ほとんど同じ計算機プログラムを用いて、弾塑性問題の解析を行なうことができる。これはマトリックス法の大きな特徴であり、その無限ともいうべき有用性の一つの証拠ともなっている。

(6)式の D^p には、(7)式から明らかのように、加工硬化率 H' で与えられる材料の加工硬化特性が組み込まれている。また要素の位置の変化、すなわち変形前後の要素の座標のちがいを、計算機のプログラムで考慮することも可能である。こうしてわれわれは、有限要素法によって、理想的な完全塑性材料あるいは非硬化性剛塑性体などの仮定、ひいてはそのような理想材料を基礎とするリミット・アナリシス、すべり線場の理論などを、特別な場合を除いて*、ほとんど必要としない段階にまで到達したのである。また必要であれば、リミット・アナリシスで取扱っている極限状態を、塑性域の広さが十分に広がった極限として、数値計算の自然の結果として求めることも可能である。

図6は、筆者と吉村・桜井が求めた解の1例を示す⁶⁾。試験片は90°のV型切欠きみぞを持ち、その寸法は図に示したとおりである。計算の便宜上、軸荷重を2Pとおき、図6の曲線はPの増加とともに** 塑性域がどのように生長していくかをあらわしている。切欠き底から発達していった塑性域は、Pが700kgに達する前後で試験片の中心対称軸上に到達する。この段階では試験片の中央にまだ弾性域が残っているが、荷重-伸び曲線に急激な曲がりが見られる。したがってわれわれは、二つの切欠き底から発達してきた塑性域が試験片の中心対称軸上で出会い、融合した瞬間に材料の剛性が実質上はゼロ

* 特別な場合の一つとして、すべり線場の理論による幾何学的に相擬な変形の取扱いが考えられる。

** 試験片の最小断面の幅は40mm、厚さは1mm、降伏応力 $Y = 300 \text{ kg/mm}^2$ 、したがって最小断面と同じ寸法を持つ引張試験片では、降伏点において $P = 600 \text{ kg}$ となる。

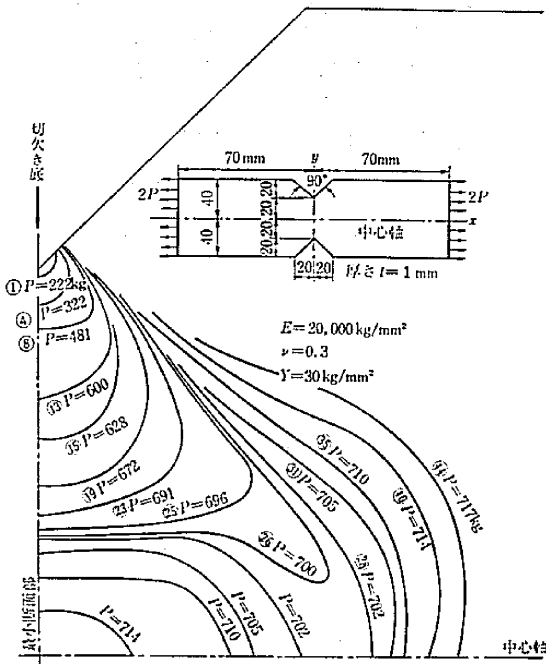


図 6 90° V 型切欠き引張り試験片における塑性域の成長(解を 1/4 象限について示す)

に低下したものとみなすことができる。これは本問題の弾塑性解析によって、はじめて明らかとなった事実の一つである。リミット・アナリシスの極限状態における荷重は、上述の 700 kg をたかだか数パーセント越える値と考えられる。しかしそれに達するには、塑性域が最小断面部を貫通し、さらにそのちにも塑性域が広がって、大きな変形が必要である。

図 6 の例から明らかなように、新しい手法では塑性域の生長を刻々追跡することができ、また荷重-変形曲線を求めることによって、強度上好ましくない剛性の低下についても詳細な情報を得ることができる。このことは次節で取扱う骨組構造において、とくに有用である。従来のリミット・アナリシスでは、崩壊荷重や崩壊の様子が得られたとしても、崩壊に達するまでの過程を知ることができなかつた。したがって、経済的でしかも安全な構造物を設計しようとする目的に、ごく限られた情報を提供するにすぎなかつたのである。

4. 骨組構造の弾塑性解析

骨組構造は定義により、有限個の部材からなる構造物である。したがって有限要素マトリックス法で解が得られたものとなれば、それは個々の構造物に適用される理論のわく内において、明らかに厳密解である*。ここで

* 連続体では、物体を分割する要素の数および分割のパターンによって、数値解析の結果が影響される。たいいていの場合、分割要素の数を増すことによって厳密解に収束するが、計算機容量のため分割の数には制約がある。

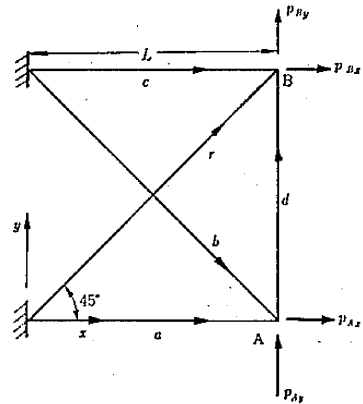


図 7 簡単な平面トラス

は図 7 に示す簡単な平面トラスを例題に選び、その弾塑性変形を追跡して(著者の未発表論文による)、骨組構造の弾塑性解析プログラム開発の序説としたい。

図 7 の骨組について全体座標 (x, y) を図のように選ぶと、よく知られているマトリックス弾性解析の手法⁸⁾を用いて、節点 A および B に作用する外力 (P_A, P_B) と、節点変位 (d_A, d_B) を結ぶ次の関係式が得られる。ただし部材はすべて、縦弾性係数 E の同じ材料からなり、その断面積 A も同一、また水平材と垂直材の長さ L は等しいものとする。

$$\begin{pmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ P_{Bx} \\ P_{By} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{Ax} \\ d_{Ay} \\ d_{Bx} \\ d_{By} \end{pmatrix} \quad (10)$$

(10)式を逆変換すると

$$\begin{pmatrix} d_{Ax} \\ d_{Ay} \\ d_{Bx} \\ d_{By} \end{pmatrix} = (K^c)^{-1} \begin{pmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ P_{Bx} \\ P_{By} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(K^c)^{-1} = \frac{L/AE}{3+4\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 2(1+2\sqrt{2}) & 2(1+\sqrt{2}) & -1 & 1+2\sqrt{2} \\ 2(1+\sqrt{2}) & 2(5+3\sqrt{2}) & -(1+2\sqrt{2}) & 9+4\sqrt{2} \\ -1 & -(1+2\sqrt{2}) & 2(1+2\sqrt{2}) & -2(1+\sqrt{2}) \\ 1+2\sqrt{2} & 9+4\sqrt{2} & -2(1+\sqrt{2}) & 2(5+3\sqrt{2}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

外力が $P_{Ay}=2P_{Ax}$, $P_{Bx}=P_{By}=0$ の特別な場合について(11)式と(12)式から節点変位 (d_A, d_B) を求め、さらに五つの部材 a, b, c, d, r の軸力を求めると

$$\frac{P_a}{P_{Ax}} = 2, \quad \frac{P_b}{P_{Ax}} = -\sqrt{2}, \quad \frac{P_c}{P_{Ax}} = -1,$$

$$\frac{p_d}{p_{Ax}} = -1, \quad \frac{p_r}{p_{Ax}} = \sqrt{2} \quad (13)$$

部材 a の軸力は引張りで絶対値が最も大きく、したがって、図7の骨組の降伏は部材 a から始まる。部材の断面積を A 、降伏応力を Y とすれば、最初の降伏を生じる弾性限度の荷重は、次のようになる。

$$p_{Ax}^c = \frac{1}{2}AY, \quad p_{Ay}^c = AY \quad (14)$$

図7の骨組は1次の不静定構造であるから、弾性限度で部材 a が降伏すると静定構造となる。したがって非硬化性の材料では、部材 a の受持つ軸力が AY で与えられることに注意して*、力のつりあいから

$$\left. \begin{aligned} p_a &= AY, \quad p_b = -\sqrt{2}AY + \sqrt{2}p_{Ax}, \\ p_c &= AY - 3p_{Ax}, \quad p_d = AY - 3p_{Ax}, \\ p_r &= -\sqrt{2}AY + 3\sqrt{2}p_{Ax} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

が導かれる。一般に、(11)式および(12)式と同様の剛性マトリックス表示から、組織的に(15)式を導くこともでき、電子計算機による計算ではいまでもなく、その方が有利であるが、ここでは方法の記述を省略することにした。(15)式から、次に降伏を生じる部材を r として、そのときの荷重 p_{Ax}^c を求めると、部材 r の軸力は引張りであるから、

$$p_{Ax}^c = \frac{2 + \sqrt{2}}{6}AY = 0.569AY \quad (16)$$

(16)式を(15)式に代入して、 p_{Ax}^c の外力のもとにおける各部材の軸力を求め、(13)式と(14)式から得られる弾性限度の軸力と比較すると、表1のようになる。

表1 平面トラスの解析例

| p_{Ax}/AY | 弾性限度 | 崩壊のとき |
|-------------|--------|-----------|
| | 0.500 | 0.569 |
| p_a/AY | 1 | 1 |
| p_b/AY | -0.707 | -0.609 |
| p_c/AY | -0.500 | -0.707 |
| p_d/AY | -0.500 | -0.707 |
| p_r/AY | 0.707 | 1 |
| 降伏部材 | 部材 a | 部材 a, r |

表1にみられるように、(16)式の荷重に対し、どの部材の軸力の絶対値も AY を越えることがない。したがって、(16)式はここで考えているトラスの崩壊荷重(の正解)を与える。上の例では、(16)式の荷重において部材 a と r の二つに降伏が生じるので、図7のトラスは運動的学メカニズムとなり、崩壊を生じることは明らかである。組織的なマトリックス解析では、 a と r が降伏し

* トラスでは、材料を非硬化性とする、降伏を生じた部材内の応力は一定値にとどまる。非硬化性材料の棒の St. Venant ねじりの弾塑性問題においても同様の事情が成り立ち、塑性状態になった領域内の応力は、その値も方向も一定値に保たれる。このような一様な安定性のゆえに、トラスやねじりの弾塑性問題の取扱いは比較的簡単である。

のち、(12)式に相当する剛性マトリックスをつくるとそれが特異性 (singularity) を持ち、崩壊荷重に達したことが自動的にわかる。このこともマトリックス弾塑性解析の一つの大きな利点である。なお、表1の数値を観察すると、部材 a に降伏を生じてのち、荷重の増加とともに、部材 b の軸力の絶対値がかえって減少することは興味がある。

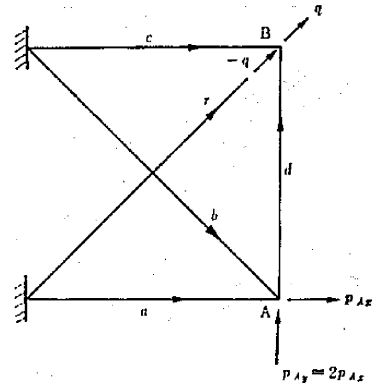


図8 骨組の切断と静定化

図7の骨組を、リミット・アナリシスの下界法⁸⁾によって取扱う場合は次のようになる。図8のように骨組に切断を入れ、不静定力の対を $(-q, q)$ とすれば、力のつりあいをマトリックスであらわして

$$\begin{pmatrix} p_{Ax} \\ p_{Ay} \\ p_{Bx} \\ p_{By} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ p_c \\ p_d \\ p_r \end{pmatrix} \quad (17)$$

(17)式を逆変換すると

$$\begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ p_c \\ p_d \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{Ax} \\ p_{Ay} \\ p_{Bx} \\ p_{By} \\ q \end{pmatrix} \quad (18)$$

さきに取扱ったと同様に、 $p_{Ay} = 2p_{Ax}$ 、 $p_{Bx} = p_{By} = 0$ の特別な場合を考えると、崩壊荷重の下界では、どの部材の軸力の絶対値も AY を越えてはならないので、(18)式から

$$\left. \begin{aligned} -AY &\leq 3p_{Ax} + \frac{q}{\sqrt{2}} \leq AY, \\ -AY &\leq -2\sqrt{2}p_{Ax} - q \leq AY, \\ -AY &\leq \frac{q}{\sqrt{2}} \leq AY, \\ -AY &\leq -q \leq AY \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

下界法では、(19)式の不等式を満足する p_{Ax} の最大値を求めることが要求される。複雑な構造物では、下界を求める目的に線形計画法 (linear programming) が用いられるが、ここで取扱っている例題では、(19)式を図式

に解いて、簡単に(16)式と同じ結果に到達することができる。

リミット・アナリシスの下界法と弾塑性解析をここで取扱っている例題について比較すると、崩壊荷重 $p_{A\pm}$ を求める問題は、前者では、(19)式の不等式を満足する $p_{A\pm}$ の最大値、後者では、(15)式を満足する $p_{A\pm}$ の最小値を求める問題（各部材の軸力の絶対値が AY を越えないという条件のもとで）に帰着する。リミット・アナリシスでは、部材の降伏の歴史を追跡していないので、不等式を取扱う必要があり、線形計画法を用いるとしても計算は複雑である。問題によって、現在の電子計算機でも、なお容量が不足することのあるのは、このためである。

一方において弾塑性解析では、(15)式のように不等式でない普通の連立1次方程式を取扱い、次に降伏する部材（例題では部材 r ）を予測し、降伏が引張りによるものか圧縮によるものかを判断して、解を求めるだけで十分である。この場合、次に降伏する部材をたとえば部材 b と仮定したため、予測を誤ったとしても、数回の試行で正しい解に到達する。また自動的に予測を修正して、正しい解に導く計算機プログラムをつくることも困難でない。さらに弾塑性解析の大きな特徴は、弾性限度に達してのち、部材がつつぎに降伏していく順序がわかり、また各段階における荷重と変形を正確に知ることができることである。計算の過程で、材料の加工硬化特性を考慮に入れることも可能である*。以上のような結果をデータとして弾塑性解析の利点を要約ふえんし、それを本稿の結論に代えると、次のようである。

(1) 一つの計算機プログラムの中で、最初に弾性解が得られるので、弾性解を基礎とする設計も可能である。この場合、最初に降伏する部材の断面寸法あるいは強度を増し、構造物全体の弾性限度を増すことができる。

* 骨組構造では、一つの部材が降伏し、次の部材が降伏するまでの荷重増分の間隔が本質的に有限で、しかもその値が大きいのが普通である。したがって、材料の加工硬化としては、直線の硬化則が、最も取扱いやすいことになる。

(2) 目的とする設計を、どこに重点をおいて行なうかを合理的に決断することができる。すなわち、リミット・アナリシスで取扱っている構造物全体としての崩壊も含めて、どの部材が降伏する段階をもって、目的とする構造物を安全とみなすか否かについて選択の自由がある。たとえば弾性限度は低い崩壊までは十分に余裕のある設計、崩壊の一步手前に達しても崩壊まではゆとりのある設計、局所的な崩壊によって危険を検知し構造全体の崩壊を避けるような設計など、いずれも自在に行なうことができる。

(3) 以上を基礎に、最小重量の設計を、目的に応じて合理的に体系化することも可能である。

(4) むすびとして、弾塑性解析は、いままでよく然と用いられていた安全係数を適確にはあくする上に有効で、合理的な設計に基礎を与えるものである。構造物には切欠きや穴などの応力集中部が必ず存在し、そのような部分における多少の降伏を避けることは不可能である。このことを前提とし、単なる弾性解の適用を拒否するならば、設計の要点は、個々の問題に応じて、どの程度までの降伏あるいは塑性域の生長を許容するかということに帰一する。構造全体としての強度ばかりでなく、疲労や破壊など材料強度の分野においても、今後の研究に弾塑性解析が与えるであろうところの影響はきわめて大きいものと考えられるのである。（1968年2月28日受理）

文 献

- 1) R. ヒル：塑性学（邦訳 培風館，1954）。
- 2) W. ジョンソン，P. B. メラー：塑性加工学 1（邦訳 培風館，1965）。
- 3) 山田嘉昭：塑性力学（日刊工業新聞社，1965）。
- 4) P. V. Marcal: *Int. J. mech. Sci.* 7 (p. 229, 1965).
- 5) 山田嘉昭，吉村信敏：コンピュータ使用によるマトリックス構造解析講習会テキスト（日本鋼構造協会，1968）。
- 6) Y. Yamada, N. Yoshimura and S. Sakurai: *Int. J. mech. Sci.* 10 (1968), 印刷中。
- 7) 山田嘉昭：生産研究 19 (p. 75, 1967)。
- 8) R. K. Livesley: *Matrix Methods of Structural Analysis* (Pergamon Press, 1964)。

