

# マトリックス法による 2 次元平面応力場の解析

Analysis of Two-dimensional Problems by Matrix Method

吉 村 信 敏\*

Nobutoshi YOSHIMURA

マトリックス法 (有限要素法) による連続体解析の一つとして、2 次元平面応力問題の解析の原理と、研究の現状を解説する。マトリックス法には、変位法 (Displacement Method) と応力法 (Force Method) があるが、連続体の解析には変位法がもちいられる。以下にマトリックス法とあるのはすべてマトリックス変位法のことである。

## 1. マトリックス法による連続体解析の原理

マトリックス法による連続体 (板・殻・3 次元体など) の応力解析の原理を簡単にのべてみよう。解析しようとする連続体を板の場合には、三角形・長方形平板要素、3 次元物体の場合には四面体・直方体要素などによって分割する。つまり連続体をこのような小さな要素 (有限要素という) の集合体としてモデル化する。図 1 はその一例で、有孔長方形板を三角形平板要素で分割したものである。

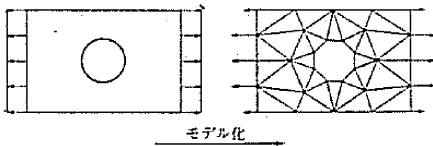


図 1 有孔長方形板のモデル化

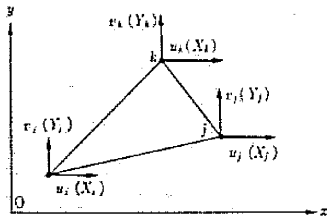


図 2 平面応力場における三角形平板要素とその節点変位および節点力 (カッコ内)

そして有限要素の頂点を節点 (node) と称して、各要素は節点をかいして連結されており、内力は節点を通じてのみ伝わるものとする。一方各要素について、その要素の節点の変位とそれに対応して節点に生ずる力 (節点力) の列ベクトルを定義し、この二つの列ベクトルの関係をマトリックスであらわし、これを剛性マトリックス (Stiffness Matrix) と称する。たとえば図 2 にしめす平面応力場における三角形平板要素  $ijk$  の節点変位の列ベクトルは節点  $i, j, k$  の  $x$  および  $y$  方向の変位からなり、

$$\delta^T = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k\} \quad (1)$$

また節点力の列ベクトルは節点  $i, j, k$  の  $x$  および  $y$  方向の力からなり、つぎのようにあらわされる。

$$f^T = \{X_i, X_j, X_k, Y_i, Y_j, Y_k\} \quad (2)$$

(ここに上添字  $T$  は転置行列をあらわす)

そしてこの要素の節点変位のベクトルと節点力のベクトルの関係は、この要素の剛性マトリックス  $k$  (6 行 6 列) によってつぎのようにあらわされる ( $k$  をもとめる方法については後でのべる)。

$$f = k\delta \quad (3)$$

このように各要素について節点力と節点変位の関係をもとめておき、これを使って節点 (ここを通じてのみ力が伝わるとしている) の一つ一つについて、つりあいの式をたてると、これらの式は節点変位に関する連立 1 次方程式となる。マトリックスの形でかくと

$$F = Kd \quad (4)$$

となる。ここに  $K$  は構造全体の剛性マトリックスと呼ばれ、境界条件を考慮しつつ各要素の剛性マトリックス  $k$  を組み合わせたものであり、 $F$  は節点に働く外力を、 $d$  は節点の変位をあらわす列ベクトルである。

$F$  は荷重条件として与えられるから、(4) 式を  $d$  についてといて節点変位  $d$  をもとめれば、構造内のすべての節点の変位が決定され、これから各要素の応力やひずみをもとめることができるのである。これがマトリックス法による連続体の応力解析の概略である。

連続体を有限個の要素で分割して、その要素の特性を節点変位と節点力の関係式 (剛性マトリックス) で置き換えるのであるから、いかにして連続体としての性格をそこなわないで剛性マトリックスをもとめるかということがマトリックス法のキーポイントになるのである。この際もっとも重要なことは、各有限要素の間で変位の連続性がたもたねばならないこと——すなわち、要素の間に“すき間”や“かさなり合い”が生じないこと——である。この変位の連続条件を満足しないかぎり、要素をいかに小さく分割しても正解への収束は保証されないで、十分な注意が必要である<sup>1)</sup>。

\* 東京大学生産技術研究所第 2 部

2. 2次元平面応力場

マトリックス法による連続体解析のうち、一番はやくから手がつけられたのが平面応力場問題である。というのは平面応力場については正解への収束を保証する剛性マトリックスが容易に得られたためと思われる。そして現在ではマトリックス法は平面応力解析のための最も有力な手段となっている。たとえば弾性応力集中問題ではマトリックス法が2次元光弾性実験にとってかわりつつある。さらに板・殻・3次元体などさらに高度な問題の解析をマトリックス法で行なう際のいろいろな手法の検討のためにも平面応力場はよく例にとられ、マトリックス法の“演習場”としての役割もはたしている(この際平面応力場には従来から多くの研究成果が蓄積されていることが非常に有利な点になっている)。本文では平面応力場解析におけるマトリックス法による成果を紹介しあわせて数値計算上の問題点あるいは今後の展望などをのべることにする。

3. 平面応力場における有限要素と剛性マトリックス

平面応力場解析のためにもちいられる有限要素のうちもっともよく使われているのが三角形平板要素(図2)であろう。わが国の大学・研究所・民間会社で開発された平面応力問題解析のプログラムは、すべてこの三角形要素を採用している。要素内の変位はつぎのように仮定される(ただし  $\alpha_1 \sim \alpha_6$  は未定係数)。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがって、ひずみはつぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x = \alpha_2, \quad \epsilon_y = \partial v / \partial y = \alpha_6 \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = \alpha_3 + \alpha_5 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

剛性マトリックスは仮想仕事の原理をもちいてもとめられる<sup>4)</sup>。結果のみをしめすと

$$K = \bar{t} A N^T \cdot D \cdot N \quad (7)$$

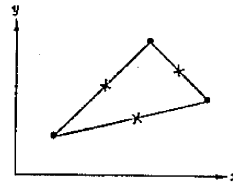
ここに  $\bar{t}$ : 要素の板厚,  $A$ : 三角形要素の面積

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1, & \nu, & 0 \\ \nu, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & (1-\nu)/2 \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_j - y_k, & y_k - y_i, & y_i - y_j, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & x_k - x_j, & x_i - x_k, & x_j - x_i \\ x_k - x_j, & x_i - x_k, & x_j - x_i, & y_j - y_k, & y_k - y_i, & y_i - y_j \end{pmatrix}$$

ここに  $x_m, y_m$  は節点  $m$  の  $x$  および  $y$  座標をあらわす。

この三角形平板要素は、(5)式からわかるように要素の各辺は変形後も直線をたもち変位の連続条件は完全にみたされているので、正解への収束が約束されており、剛性マトリックスの計算が比較的容易であることが大きな特長である。しかし(6)式からわかるように、ひずみや応力が要素内で一定であるので、計算の結果もまったく値からなめらかな応力分布を得るにはかなりの熟練を



×あらたに付け加える節点  
図3 改良三角形要素

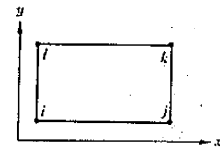


図4 長方形要素

場合変位は

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

のように仮定する。ひずみや応力は  $x$  あるいは  $y$  の1次関数になる<sup>7)</sup>。

以上はいずれも変位の連続条件を満足する変位を仮定していたが、その他に応力やひずみの連続性を重視するあまりに、変位の連続条件がみだされていような変位を仮定してもとめた剛性マトリックスが“二、三の例題をといたところ、良い結果を得た”と称して初期の外国の文献にしばしば見られるが、このようなやり方は常に正解へ収束するとはかぎらないことに注意すべきである。

ともかく、いろいろな剛性マトリックスが提案されているが、普通の三角形要素がもっとも一般性があり、計算も容易なので現在のところ平面応力場解析ではもっともよく使われている。

4. 数値計算

実際の計算では、構造全体の剛性方程式(4)は数百元から数千元になるが、このような非常に多元の連立1次方程式をどのようにして、電子計算機で取り扱うかが大きな問題である。平面応力問題では、その解法は

① くり返し法による直接解法 (Gauss Seidel 法など)

② 逆行行列演算を基本とした方法 (Unit 分割法など) の二つの流れにわけることができるであろう。Gauss Seidel 法については数値計算の書物によくのべられているので説明は省略するが、Unit 分割法は立体骨組解析の有名なプログラム FRAN にもちいられている方法で逆行列的方法のもっとも進歩したものと考えられるが、構造全体をいくつかの単位に分割し、これを使って全体の計算を小規模な逆行列計算の積み重ねに変換してしまうというものである<sup>2)</sup>。

Gauss Seidel 法は、構造全体の剛性マトリックス  $K$

(この項のほとんどがゼロ)の非零エレメントだけを記憶することによって計算機の記憶装置を有効に使えること、直接解法であるから誤差の評価がしやすいことなどの長所がある一方、荷重条件が変わると計算をもう一度やりなおさねばならない、計算時間が推定しにくいといった短所もある。

一方、ユニット分割法は、荷重条件が変わっても逆行列の演算そのものは共通なので計算を再度くり返す必要がない、計算時間が推定しやすく、その時間内に一応の答は得られるという長所があるが、得られた解の精度がわからない、構造の形状・要素分割によってはユニット分割がほとんど役をなさないことがあるといった短所もある。

骨組構造の場合には、計算すべき荷重条件が多いこと、形状の性質上ユニット分割などの手法に適しているなどの理由で、逆行列的手法が採用されているようである。

平面応力場の場合には、二つの方法の優劣を断定することはむずかしく、当研究所においても坪井研究室のプログラムは Gauss-Seidel 法を川井研究室のそれはユニット分割法を採用している。しかし比較的小規模でくり返しの多い計算にはユニット分割法が、大規模な問題には Gauss-Seidel 法がすぐれているようである。

5. 静的応力場の解析

マトリックス法による平面応力場の静的応力の解析については、すでに多くの研究者によって良好な結果が得られることが確認されており<sup>67)</sup>、商用のプログラムもあるほど普及している。ここでは少し変わった問題についてのべてみよう。

平板のなかに補強材が入っている場合は、板の剛性の他に、梁要素の剛性（一般に曲げ剛性は無視）を計算して(4)式につけ加えればよい。筆者らはこの思想をもちいてフランジ付き角接手 (corner connection) の解析をおこなった<sup>4)</sup>。この手法をもちいて大型船の局部強度の解析がおこなわれており、実験と良く一致した結果が報告されている<sup>6)</sup>。

2次元応力場で重要なもう一つの問題は“変位型境界条件”の問題である<sup>5)</sup>。従来境界条件として応力が与えられる応力型境界値問題についての研究が多かったが、問題によっては境界条件が変位で与えられる変位型境界値問題も重要である。この場合には、(4)式の  $d$  を、変位型境界条件で規定される変位の成分  $d_2$  とそうでない変位の成分  $d_1$  にわけ、これに対応して外力のベクトル  $F$  も  $F_2$  と  $F_1$  にわけ、力のつりあいから  $F_1=0$  に注意して、(4)式を分割 (Partition) すると、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \dots & \dots \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$d_2$  は境界条件から与えられるので、(9)式から  $d_1$  をも

とめれば、変位型境界の問題はとけたことになる。

図5は有孔正方形板の応力集中の研究のために作製された試験片であるが、その試験機による引張り試験においては板のアスペクト比、試験片部とチャック部の板厚の比の関係から変位型条件に近い（つまり変位一定で引張られている）と思われるので、変位型問題として解析し、最小断面のひずみ分布について計算値と実験値をくらべたのが図6である。応力型とした場合の解にくらべて変位型の解が実験ときわめてよく一致していることがわかる。

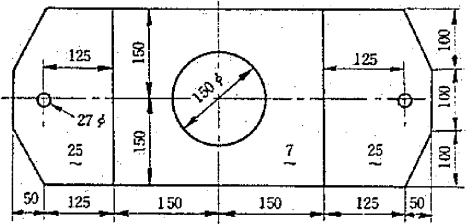


図5 有孔試験片

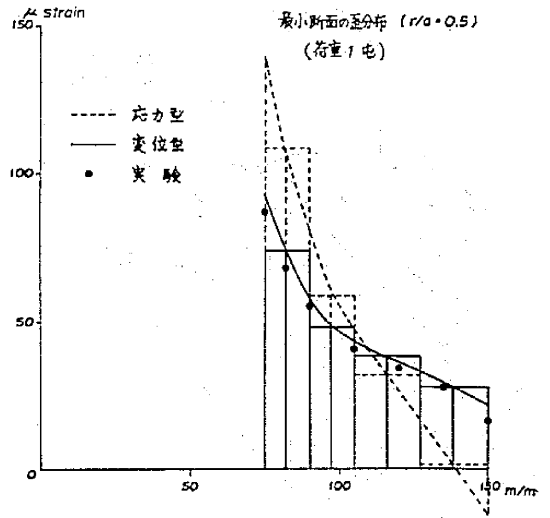


図6 最小断面のひずみ分布 (荷重 1 ton)

6. 熱応力解析<sup>5)</sup>

マトリックス法による熱応力の解析の手法は弾性学におけるそれとまったく同じである。まず熱変形を完全に拘束するために必要な節点力を要素の剛性マトリックスを使ってもとめる。

そのときの応力  $\sigma_1$  はつぎのようになる。

$$\{-\alpha ET/(1-\nu), -\alpha ET/(1-\nu), 0\} \text{ (第1段階)}$$

ここに  $\alpha$ : 線膨張係数,  $T$ : 温度上昇,  $E$ : ヤング率。つぎに第1段階でもとめた節点力の符号を逆にして節点に加え、拘束を解放して変位・ひずみ・応力  $\sigma_2$  をもとめる (第2段階)。変位およびひずみはそのまま解であるが、応力は  $\sigma_1 + \sigma_2$  が解になる。

図7にしめすような縦横比2の周辺自由長方形板に

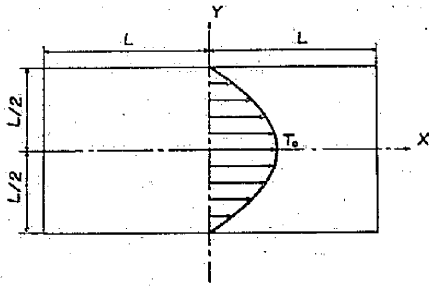


図 7  $y$  方向にのみ変化する温度分布を受ける周辺自由長方形板

$$T(x, y) = 4T_0(L^2/4 - y^2)/L^2$$

なる温度分布を与えた場合を考える。対称性から板の右上半部だけを考慮して計算した。図 8 に熱応力の分布 ( $\sigma_x$ ) を等高線にてしめす。図中には Przemieniecki の精密解も同時に書きこんであるが、両者はよく一致している。

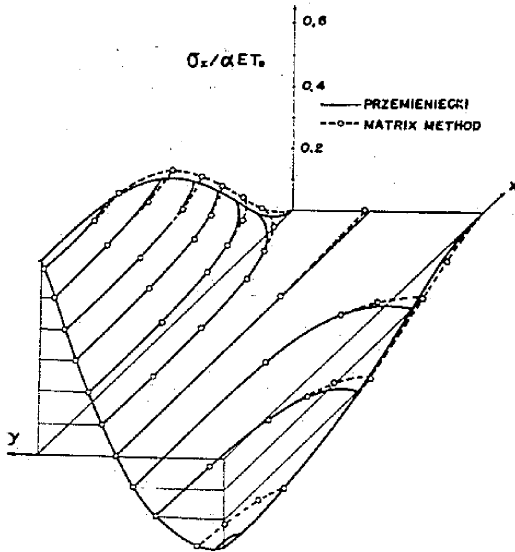


図 8 熱応力分布 ( $\sigma_x$ )

### 7. 固有振動数解析<sup>9)</sup>

マトリックス法は動的な問題の解析においても有力である。この場合には有限要素内に分布している慣性力を等価な節点力に置きかえればよい。等価な節点力は、分布している慣性力のなす仕事と節点力のなす仕事を等置して得られる。各要素について等価節点力を計算し、構造全体のつりあいを考えて、(4)式のかわりに、つぎのような式がえられる。

$$Kd + M\ddot{d} = F(t) \tag{10}$$

固有振動数解析の場合には、 $F=0$  であつて  $\ddot{d} = -\lambda^2 d$  であるから (10) 式は

$$(K - \lambda^2 M)d = 0 \tag{11}$$

という特性方程式になり、(11)式をとけばよいのである

が、 $\det|K - \lambda^2 M| = 0$  となる  $\lambda^2$  をもとめるという手法は元数が増すと非常に困難になる。そこで (11) 式をつぎのように一般の特性方程式：

$$(K^{-1}M - \lambda^{-2})\ddot{d} = 0 \tag{12}$$

のように変形して反復法 (Power Method) で計算するといった手法をとるのが普通である。しかし  $K^{-1}$  の演算にも限度があるので、(11)式の形のままで特性方程式を解くことが望ましいのであるが、決め手となるような数値計算法はまだないようである。

例として図 9 にしめすような長方形平板の面内振動をあつかった。図 10 はとくに  $x \cdot y$  両軸に対称な振動について、 $L_2/L_1$  をかえながら固有振動数をもとめたものである。ただし周波数は長さ  $L_1$  の棒の縦 1 次固有振動数  $F_{L1} = \sqrt{E/\rho}/2L_1$  で無次元化してある。図 10 には Redwood がセラミック板についておこなった実験値もともにしめしてあるが、マトリックス法はよい一致をしめている。

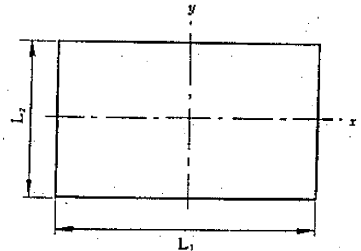


図 9 周辺自由長方形板

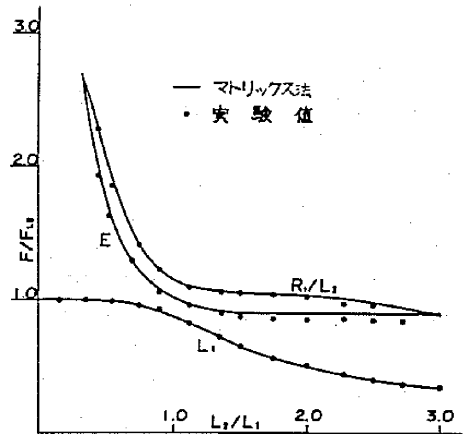


図 10  $x, y$  両軸に対称な振動モードの固有振動数

(10)式に減衰の項を加えて

$$Kd + R\dot{d} + M\ddot{d} = F(t) \tag{13}$$

のようにすると、動的応答の問題となり、差分法を導入してとくことができる。

### 8. 将来の問題

以上のべてきたように、平面応力場で考えられるほとんどすべての問題について (p.54 へつづく)

研究速報

表 1 計算値と厳密解との比較 ( $M_1=4, G=10^\circ$ )

	$\tau_{xx}$		$\tau_{yz}$	
	計算値	厳密解	計算値	厳密解
A	0	0	1.27135	1.27324
B	-0.64781	-0.63662	0	0
C	-0.06471	-0.06366	1.24450	1.26686
D	-0.44861	-0.44563	0.90474	0.90928
E	-0.19226	-0.19099	0.50926	0.50930

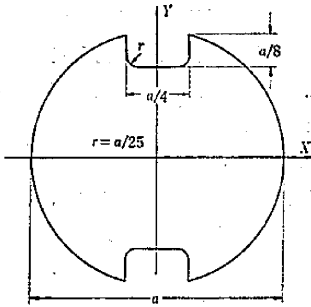


図 5 キーみぞをもつ丸棒

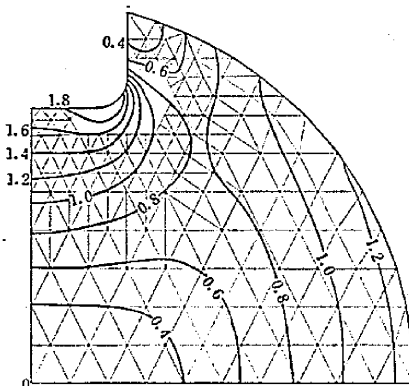


図 6 要素分割および $\tau$ の等高線

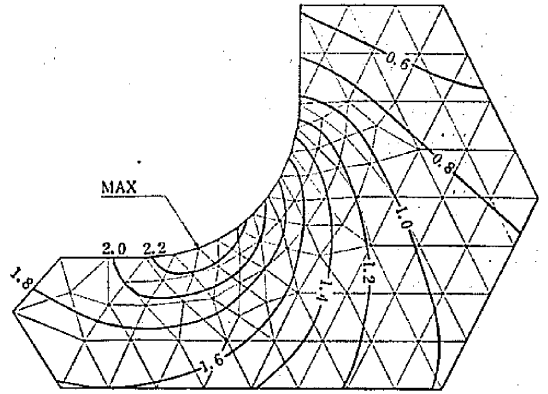


図 7 キーみぞすみ部の要素分割および $\tau$ の等高線

じりによる剪断応力の分布やみぞのすみ部の応力集中を本方法で解析してみた。対称性から第 1 象限のみ考慮して図 6 の細線でしめすように要素分割した。キーみぞすみ部については、応力分布を正確に知るために、図 7 の細線でしめすようにさらにこまかく分割した。要素数は 389、節点数は 223 である、計算の結果もとまった  $\tau_{xx}$  および  $\tau_{yz}$  から合剪断応力  $\tau = \sqrt{\tau_{xx}^2 + \tau_{yz}^2}$  を計算し、この等高線をえがき図 6 および図 7 に太線でしめた。ただし図中の数値は  $\tau_{nom} = 16 M_1 / \pi a^3$  で無次元化したものである。最大の  $\tau$  を生ずる点を図 7 中に MAX でしめた。その値は  $2.49 \tau_{nom}$  であったが、Leven<sup>1)</sup> の理論計算および実験 (ただしキーみぞは一つ) の結果と考えあわせて、よい結果であろう。なお、計算所要時間は、HITAC 5020 (32 K) にて 330 秒であった。

(1968 年 2 月 6 日受理)

文 献

- 1) M. M. Leven, Pro. of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. 7-No. 2, p. 141 (1950)
- 2) 信原, 同上 5, vol. 3, No. 19 (1967)
- 3) 吉村, 同上 7, vol. 3, No. 22 (1967)
- 4) 吉識・川井・吉村, マトリックス法による船体構造解析に関する研究—第 1 報, 造船協会論文集 120 号, p. 127, (1967)
- 5) 同上—第 2 報, 同上 121 号, p. 150 (1967)
- 6) O. C. Zienkiewicz & G. S. Holister, Stress Analysis, p. 162~p. 165 (1965), John-Wiley & Sons
- 7) O. C. Zienkiewicz & Y. K. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics (1967), McGraw-Hill
- 8) 永元・田口, 三材結合部の強度(その 1 および 2), 西部造船会会報, 第 33 および 34 号 (1967)
- 9) 川井・吉村, 有限要素法による連続体の固有振動数の解析, 日本機械学会創立 70 周年記念東京講演会前刷 (1967)

(p. 24 よりつづく)

マトリックス法による解析の手法が確立されており、かなりの問題まで実際にとかれている。これからは

- (a) 接触問題
- (b) 波動伝ばの問題

などが大きな問題となるであろう。

また数千円の連立 1 次方程式や特性方程式をとくための計算プログラムの開発、現在人力でおこなわれている入力データの作製や計算結果の整理の自動化も進めなければならないであろう。(1968 年 2 月 28 日受理)

参 考 文 献

- 1) 鷺津, マトリックス構造解析法講座 4, JSSC, vol. 3, No. 18 (1967)