

# 有限要素法 (Finite Element Method) による回転体の応力解析

Stress Analysis of Axisymmetric Solids by the Finite Element Method

川 股 重 也\*

Shigeya KAWAMATA

マトリックス法の重要な分野の一つで、任意形状の連続体の応力解析に偉力を発揮する有限要素法を、回転体の場合の例によって解説した。

## 1. は し が き

構造物に外から力が加えられる時の、内部応力や変形を計算によって予測すること——すなわち応力解析は、構造物の設計にとって、避けることのできない関門であり、多くの場合、設計者にとって最も頭の痛い仕事となる。それは、教科書にのっている微分方程式の解が、ごく単純な形——直線のはり、円弧のアーチ、四角の板、まるい板、球形のドーム、円筒の容器など——の、しかも限られた支持条件についてしか通用しないのに対して、現実に設計する構造物が複雑な形状と組合わせをもっているからである。

そこから先は、RUNGE-KUTTA 法や差分法といった数値解析を忍耐強く押し進めるか、実験を行なうことになるが、いずれにしても相当の労力と時間を必要とする。

近年注目されているマトリックス法と呼ばれる一連の応力解析法は、電子計算機の合理的使用により、任意形状の構造物のいろいろな問題を迅速に処理する数値解析法であり、設計者を応力解析の重圧から解放して、より生産的な頭の使い方を可能にすると信じられている。

マトリックス法の中で、骨組の解析法とならんで重要な部門である有限要素法は、連続体を、三角形、四角形あるいは四面体、直方体等の有限な大きさの要素に分割し、分割線の交点——節点と呼ぶ——の変位を未知数として解析する方法である。有限要素法は、2次元応力・ひずみ問題、3次元立体のほか、平面板、曲面板等、広い範囲にわたって適用可能である。

この中で、2次元問題と、その拡張としての回転体(平面図形を軸まわりに回転させてできる立体)の弾性応力の問題については、分割を細かくすることにより確実に正解に近づくことがわかっており、実際に大規模な問題の解析にも成功しているし、汎用の計算プログラムも作成されている。3次元の一般立体(回転体でないもの)では、形式的には2次元問題の拡張に過ぎないが、未知数の数が膨大となり、計算機の容量の点でいまだ実用の段階には達していないようである。また、平面板、曲面板など、板の曲げを含む分野では、分割度と正解への収

束の関係にまだ不安定な要素があり、確実に、しかも急速に正解に近づくためには、まだ研究の余地がある。

ここでは、有限要素法のうちで、比較的簡単で、実用価値も高い回転体の弾性応力の解析法を、主として著者の経験をもとにして解説する。

## 2. 要素への分割

まず平面から考え始めるとして、平面を分割する場合の簡単な要素の形として、三角形と長方形が考えられる。

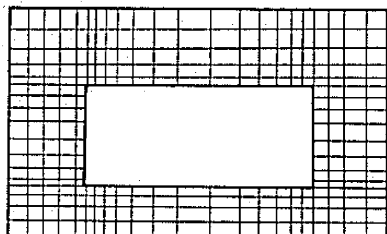


図1 長方形要素による分割

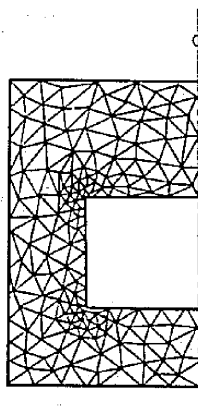


図2 三角形要素による分割

このうち、三角形要素の方がどんな境界形にも適合し、内部の分割形式にも制約がなく、たとえば急激な応力分布の変化が予想される部分(応力集中点など)のみ細かく分割することなどが可能なために、汎用プログラムとしては一般に三角形要素が採用される。

同じ分割度について比較すると、三角形要素によるものより、長方形要素によるものの方が幾分精度がよいことがわかってはいるが、三角形の上述のような利点は精度上の不利を補ってあまりあるものといえる。

## 3. 変位関数

有限要素法では、まず要素内での変位分布のモードを仮定する。このとき、要素の変位を、頂点の変位で代表させる関係から、頂点変位の自由度の数と同じ数の変位分布のモードを仮定する。この仮定した変位分布を表わ

\* 東京大学生産技術研究所第5部

す関数を変位関数といい、これの仮定の良否が、解析の成否を左右する最も重要なポイントとなる。

さて、回転体の三角形要素について変位関数を定める。回転立体の回転軸を含む平面を考え、この平面上に三角形  $lmn$  を描く。これを 1 ラジアンだけ軸まわりに回転させて生じる立体を、この場合の要素と見なす(図 4)。

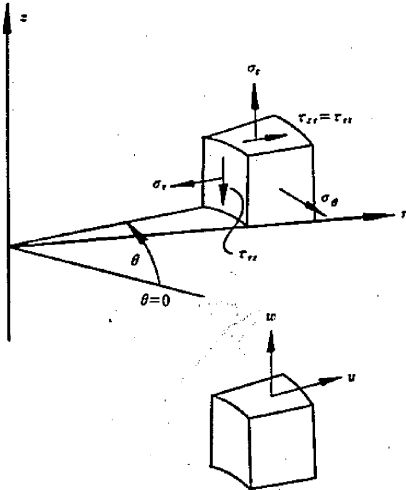


図 3

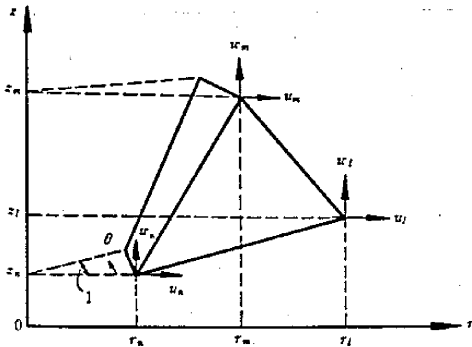


図 4

円筒座標  $r, \theta, z$  を用い、簡単のために問題を軸対称問題(応力・変位の分布が、回転軸について対称な場合)のみに限定し、さらにシャフトのねじりのような問題を除外することになると、リング方向の変位  $v$  が省略され、生じる変位は  $u, w$  のみで 2 次元問題の場合と同じであり、応力は 2 次元問題における  $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$  に、リング方向の応力  $\sigma_\theta$  を追加したものとなる(図 3)。これらの変位と応力は、軸対称の条件から、回転方向  $\theta$  には無関係で一定であるから、任意  $\theta$  の位置での  $rz$  平面上の要素について考えれば十分である。

さて、要素の 3 頂点に二つの独立な変位  $u, v$  があるから、この要素は六つの変位の自由度をもつ。これに対して、要素の  $rz$  断面内で、変位の直線分布を仮定すると、 $u = A + Bx + Cy, v = D + Ex + Fy$  により、計六つの変位のモードを仮定したことになる。

有限要素の分割度を高めた時に正解に収束するためには、一般に変位分布の仮定が次の 3 条件を満たさなければならないといわれている<sup>1),2)</sup>。

1) 変位関数が要素の任意の剛体変位を表わしうること。この剛体変位とは、要素のひずみをともなわない変位のことで、2 次元変位の場合は、 $x$  および  $y$  方向の平行移動 (Translation) と任意点まわりの回転 (Rotation) の 3 成分がある。要素みずからの変形が原因でなく、変形する他の要素の集積にのっているために動くのが剛体変位であると考えてもよいだろう。この剛体変位を与え得ないような変位関数を用いた場合は、要素に無理な拘束を加えていることになり、正解には収束しない。 $u, v$  の 1 次分布の仮定がこの条件を満たすことは明らかである。

2) 要素内で一定ひずみの状態を表わし得ること。要素が無限小になれば、要素内で一定ひずみとなるから、変位関数に一定ひずみの成分を含まない場合には、分割を細かくしても正解に収束しないことになる。仮定した 1 次関数から出てくるひずみは一定ひずみのみであるから明らかにこの条件を満足する。

3) 隣接する要素の境界線上で両側の要素の変位が連続し、くい違いやギャップが生じないこと (適合変形の条件)。ここで仮定している線形分布の変位場では、変形前に直線であった境界は、変形後も直線であり、かつこの直線境界上で変位は 1 次変化する。このことと、相隣る要素はこの直線境界の両端にある 2 節点を共有するから、境界上の変位は両側で完全に一致し、変形は適合する。

さて、変位関数は、任意の頂点変位が生じた場合の、要素内の変位場を与える関数であるが、上のような性格をもつ直線分布を仮定すると、簡単な行列演算により、次のような形に表現することができる<sup>3),4)</sup>。

三角形エレメントの頂点  $l, m, n$  の座標を二つのベクトル

$$\begin{aligned} r_v &= \{r_l \quad r_m \quad r_n\} \\ z_v &= \{z_l \quad z_m \quad z_n\} \end{aligned} \quad (1)$$

で表わし、頂点変位のベクトルを

$$d_v = \{u_l \quad u_m \quad u_n; w_l \quad w_m \quad w_n\} \quad (2)$$

で定義する(図 4)と、頂点に単位の変位  $u_i = 1 (S=l, m, n)$  が生じたときの変位場は

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, z) &= [\bar{u}_l \quad \bar{u}_m \quad \bar{u}_n] = \phi A \\ \bar{w}(r, z) &= [0 \quad 0 \quad 0] = 0 \end{aligned} \quad (3-a)$$

また  $v_i = 1 (S=l, m, n)$  が生じたときの変位場は

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, z) &= [0 \quad 0 \quad 0] = 0 \\ \bar{w}(r, z) &= [\bar{w}_l \quad \bar{w}_m \quad \bar{w}_n] = \phi A \end{aligned} \quad (3-b)$$

で表わされる。ここで

$$\begin{aligned} \phi &= [1 \quad r \quad z] \\ A &= [e_3 \quad r_v \quad z_v]^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & r_l & z_l \\ 1 & r_m & z_m \\ 1 & r_n & z_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。変位関数の係数を与える  $A$  行列は、(5) 式のように、各頂点の座標値から作られる行列の逆行列であり、これ以後の便宜上逆行列をヨコに区分して、これらの行ベクトルに  $\alpha, \beta, \gamma$  と名づけておく。

ここで求められた変位関数は、2次元問題の場合とまったく同じである。

#### 4. ひずみおよび応力

回転対称の応力状態における変位とひずみの関係は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

であるから、(3)式で表わされた変位場を(6)式に従って微分すれば、各頂点に単位の変位が生じたときの要素内のひずみ(const.)が得られる。これを行列の形で表わすと(5)式の  $\alpha, \beta, \gamma$  を用いて次の形となる。

$$\begin{aligned} \bar{E} &= [\bar{\varepsilon}_{ul} \quad \bar{\varepsilon}_{um} \quad \bar{\varepsilon}_{un} \quad \bar{\varepsilon}_{wl} \quad \bar{\varepsilon}_{wm} \quad \bar{\varepsilon}_{wn}] \\ &= \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \frac{1}{r}\alpha + \beta + \frac{z}{r}\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、たとえば、列ベクトル  $\bar{\varepsilon}_{ul}$  は、頂点  $l$  に  $u=1$  を与えたときのひずみを表わし、成分の配列は次のとおりである。

$$\bar{\varepsilon}_{ul} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{r,ul} \\ \bar{\varepsilon}_{\theta,ul} \\ \bar{\varepsilon}_{z,ul} \\ \bar{\gamma}_{rz,ul} \end{pmatrix} \quad (8)$$

単位の頂点変位によるひずみ  $\bar{E}$  を用いて、任意の頂点変位の組合わせに対するひずみは、

$$\bar{\varepsilon} = \bar{E}d, \quad (9)$$

で与えられる。

このひずみに対応する応力度(const.)は、弾性マトリックス  $D$  を乗じればよい。一般の場合  $D$  は

$$D = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 \\ & E_{22} & E_{23} & 0 \\ & & & E_{33} & 0 \\ \text{対} & & & & G_{44} \end{pmatrix}$$

の形をとり、等方体については

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ & & & 2\mu + \lambda & 0 \\ \text{対} & & & & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = D\varepsilon \quad (10)$$

となる。ここで

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu}\mu \quad (11)$$

$E$ : ヤング係数,  $\nu$ : ポアソン比  
である。

#### 5. 要素の剛性行列

エレメントは内部応力によって変形し、節点変位を生じる。有限要素法では、内部応力をこれと等価な(釣合)頂点の仮想集中力—頂点力—に置き換える。これにより、内部応力のつりあいを、節点力のつりあいの問題におきかえることができる。さらに、頂点力を頂点変位で表わせば、つりあい方程式を、節点変位で表わすことができる。

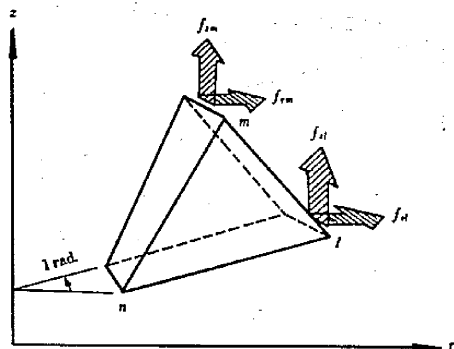


図 5

頂点力を

$$f_e = \{f_{rl} \ f_{rm} \ f_{rn}; f_{zl} \ f_{zm} \ f_{zn}\} \quad (12)$$

とし、頂点変位との関係を

$$f_e = K_e d_e \quad (13)$$

とおく。この時の係数行列  $K_e$  は、単位の頂点変位を生じさせるのに必要な頂点力を表わし、要素の剛性行列という。

頂点力を内部応力と等価とするためには、仮想仕事(virtual work)の原理を適用し、頂点力  $f_e$  が頂点変位  $d_e$  によってなす外部仕事は、応力  $\sigma$  がひずみ  $\varepsilon$  によってなす内部仕事に等しいとおく。すなわち

$$d_e^T f_e = \int_{vol} \varepsilon^T \sigma dV \quad (14)$$

ここで添字  $T$  は転置行列を、積分は要素全域にわたる体積積分を表わす。(14)式に(9)および(10)式を代入し、共通項  $d_e^T$  をおとすと、

$$f_e = \int_{vol} \bar{E}^T D \bar{E} dV \cdot d_e$$

すなわち

$$K_e = \int_{vol} \bar{E}^T D \bar{E} dV \quad (15)$$

により要素の剛性行列が表わされることになる。

(15)式に、すでに求めた  $\bar{E}$  および  $D$  を代入して、積分を行なって得られる剛性行列を

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

とわくとき、等方体に対して成分の小行列は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \{2(E_{11} + E_{12})\beta^T\beta + G_{44}\tau^T\tau\} V_1 \\ &+ (E_{11} + E_{12})\{(\alpha^T\beta + \beta^T\alpha) V_2 + (\beta^T\tau + \tau^T\beta) V_3\} \\ &+ E_{11}\{\alpha^T\alpha V_4 + (\tau^T\alpha + \alpha^T\tau) V_5 + \tau^T\tau V_6\} \\ K_{12} &= (2E_{12}\beta^T\tau + G_{44}\tau^T\beta) V_1 + E_{12}(\alpha^T\tau V_2 + \tau^T\tau V_3) \\ K_{21} &= K_{12}^T \\ K_{22} &= (E_{11}\tau^T\tau + G_{44}\beta^T\beta) V_1 \end{aligned} \right\}$$

ここで  $V_1, V_2, \dots, V_6$  は体積積分を表わし、その内容は

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{3}(r_1 + r_m + r_n) \\ \bar{z} &= \frac{1}{3}(z_1 + z_m + z_n) \\ A &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_m & z_m \\ 1 & r_n & z_n \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を用いて

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \int_{\text{vol}} dV = \iiint r dr dz = \bar{r} A \\ V_2 &= \int_{\text{vol}} \frac{1}{r} dV = \iint dr dz = A \\ V_3 &= \int_{\text{vol}} \frac{z}{r} dV = \iint z dr dz = \bar{z} A \\ V_4 &= \int_{\text{vol}} \frac{1}{r^2} dV = \iint \frac{1}{r} dr dz \doteq \frac{1}{\bar{r}} A \\ V_5 &= \int_{\text{vol}} \frac{z}{r^2} dV = \iint \frac{z}{r} dr dz \doteq \frac{\bar{z}}{\bar{r}} A \\ V_6 &= \int_{\text{vol}} \frac{z^2}{r^2} dV = \iint \frac{z^2}{r} dr dz \\ &\doteq \frac{1}{3\bar{r}} \left\{ \left( \frac{z_1 + z_m}{2} \right)^2 + \left( \frac{z_m + z_n}{2} \right)^2 + \left( \frac{z_n + z_1}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と表わされる。 $V_4 \sim V_6$  は、要素の大きさが、要素重心の回転半径  $r$  に比べて小さいときに成立つ近似式である。

## 6. 全体の剛性行列 (つりあい方程式の係数)

### と支点の処理

前節で求めた要素の剛性行列は、たとえば、図6の三

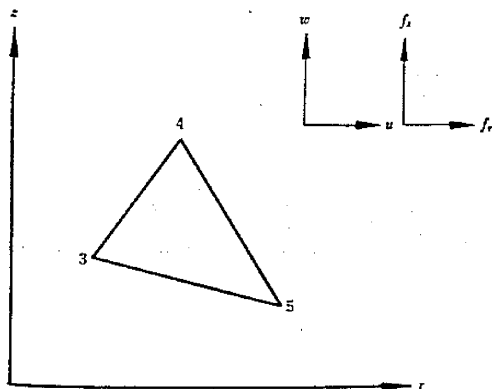


図 6

角形 (3, 4, 5) についてその内容を示すと、

$$K_e(3, 4, 5) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_3 & u_4 & u_5 & w_3 & w_4 & w_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_{r3} \\ f_{r4} \\ f_{r5} \\ f_{z3} \\ f_{z4} \\ f_{z5} \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{45} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{66} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

のようになっている。ここで、たとえば  $a_{45}$  は頂点4における単位の  $z$  方向変位  $w_4=1$  によって生じる頂点3の  $z$  方向の頂点力  $f_{z3}$  を表わしている。

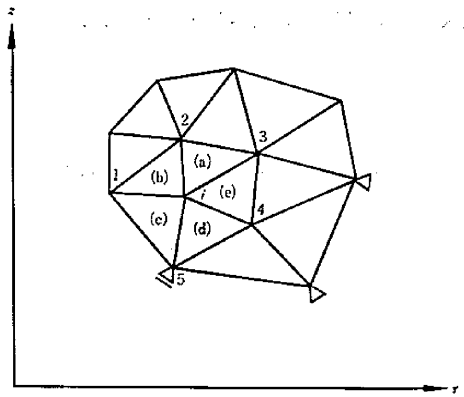


図 7

次に構造全体のつりあい方程式を考える。図7に示すような断面をもつ回転体の、たとえば  $i$  点の  $z$  方向のつりあいを考えると、 $f_{zi}$  なる頂点力を引き起こさせる変位は、 $i$  点を頂点とする (a)~(e) の五つの三角形の各頂点の変位であり、結局  $i$  点自身と 1~5 の各節点変位が関係することになる。

結局、考えている点に集まる要素の頂点力の和が節点力となり、これが外力  $p$  と等しくなければならない。このつりあい条件は、

$$Kd = p \quad (20)$$

と表わされる。ここで  $d$  は各節点の独立変位、 $p$  は節点に加えられる外力である。 $K$  は構造全体の剛性を表わす行列であり、前述のように各要素の剛性行列の成分を一定の方法で組合わせて作成される。 $K$  の次数は、節点数を  $n$  とすれば  $(2n \times 2n)$  である。

(20) 式の係数行列は、特異 (singular) であって、このままでは方程式の解は存在しない。これは、未知数が節点変位であるために、応力と無関係な剛体変位を含んでおり、変位の境界条件を規定しない限り、つりあい条件を満たす無数の解が存在するためである。したがって、解ける形の方程式にするには、支点における変位の条件を与えなければならない。

たとえば、図8で  $j$  点がピン支持ならば、その点の変位は  $u_j = w_j = 0$  であるから、未知数よりこれらを除外し、かつ  $j$  点での  $r, z$  両方向のつりあい式を除外する。

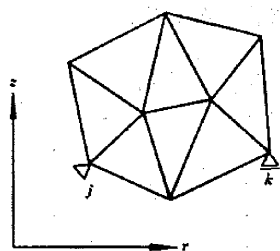


図 8

また  $k$  点が  $r$  方向のローラーだとすると,  $w_k=0$  の条件を入れることになる.

このような支点処理を行えば, (20)式のつりあい方程式が解ける. 解として得られた節点変位を, 再びエレメントごとの

の頂点変位ベクトルの形に編成し,

$$\sigma = D\epsilon = D\bar{E}d, \quad (21)$$

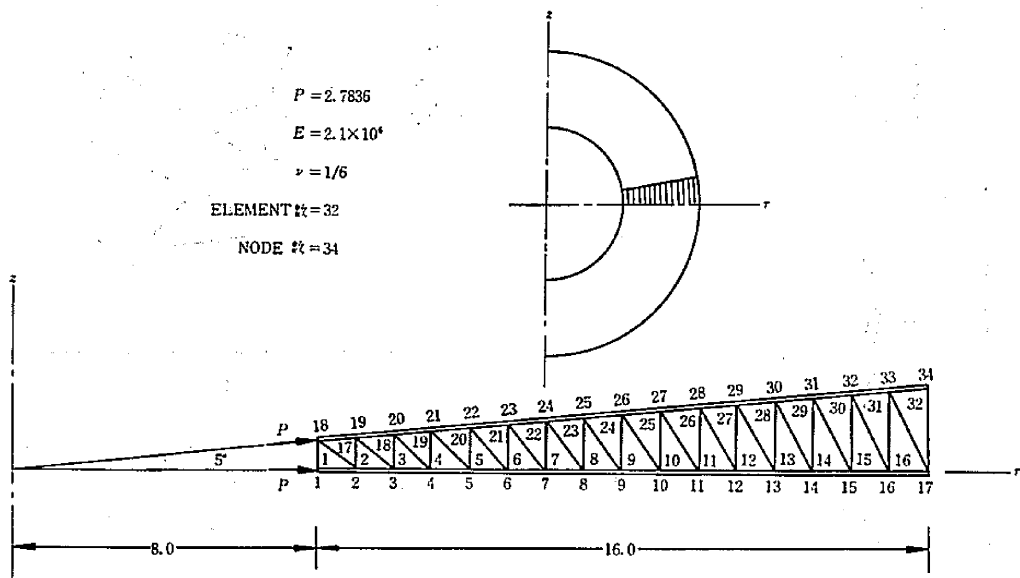
に代入することにより, 各エレメントの応力を求めるこ

とができる.

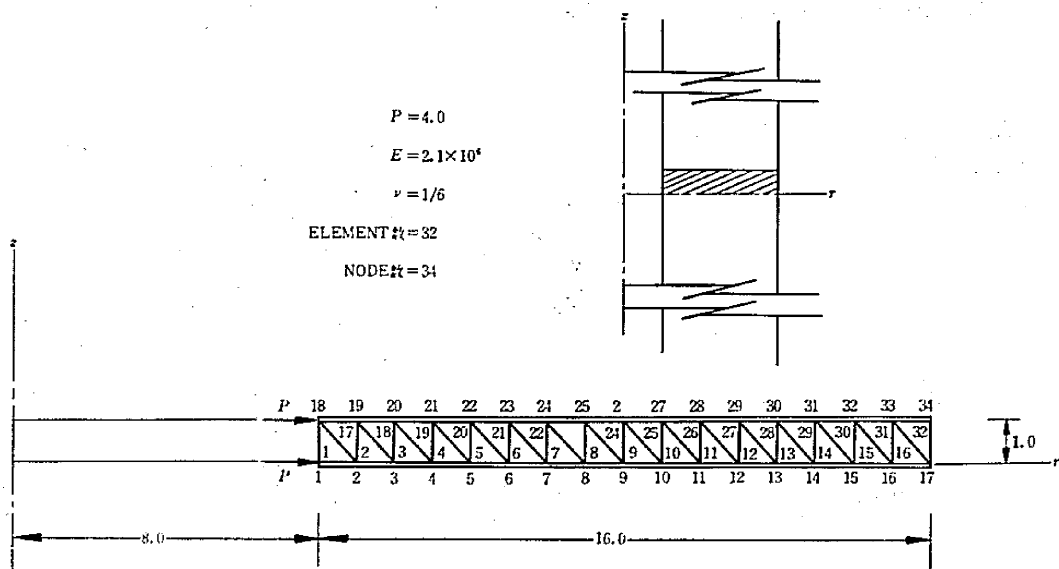
## 7. 大規模な問題への Iteration の適用

実際上で遭遇する複雑な問題に対しては, (20)式の  $K$  行列が大きくなり, 数百次から数千次に達する. したがって実用プログラムとしては, このような大規模な連立方程式を, どうやって解くかが重要な問題となる.

これは, いろいろむずかしい問題を含んでおり, ここで論ずるスペースがないが, 筆者らは, 大型計算機の使用を前提とした場合, Gauss-Seidel の Iteration に加速係数を適用した Over-relaxation<sup>5)</sup> が最適と考えて採用し, よい結果を得ている. それは次のような利点による.



(a) Example 1, 厚肉球殻



(b) Example 2, 厚肉円筒

図 9

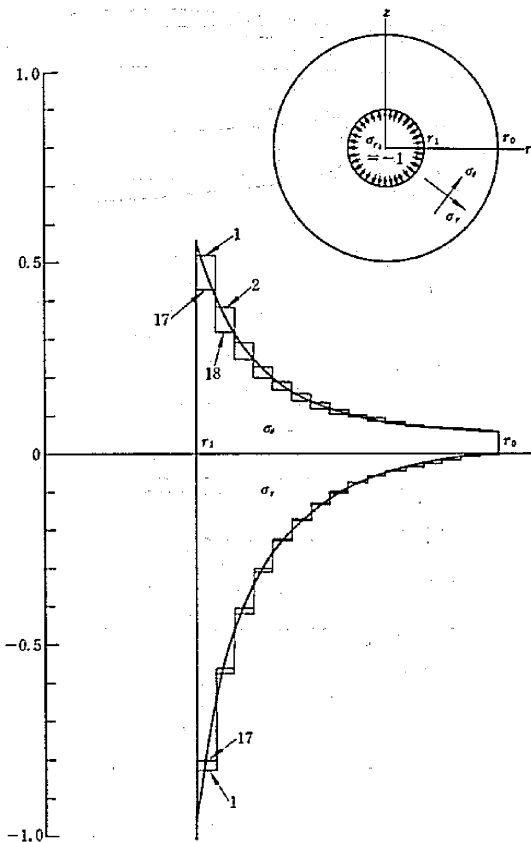


図 10 Example 1 厚肉球殻 (内圧) の応力

すなわち、

- 1) Gauss-Seidel 法によれば、変位法における方程式のような対称な係数行列の場合は必ず収束する。
  - 2) コア・メモリーのみにより大規模な問題が処理でき、補助記憶装置を用いる場合に比べて演算がはるかに早い。
  - 3) 精度の保証された解が得られる。……Iteration であるから、必要な収束度が得られるまで計算を行なえばよい。
  - 4) 単純なサイクル計算だからプログラミングが容易である。
- などである。

## 8. 例 題

簡単な例題として、厚肉中空球 (Example 1) と無限長さの厚肉円筒 (Example 2) が内圧を受ける場合の解析を行なった。この場合応力の一様性から、球では扇形、円筒では長方形断面をとれば十分であり、また断面の上下端で外側にすべるローラーを仮定すればよい。分割は図 9 のように行なった。結果として得られた応力を図 10 (球) および図 11 (円筒) に示す。ここで、段形で表わされているのが有限要素法の解であり、曲線が解析的に求められた厳密解である。上下の三角形の列で、異な

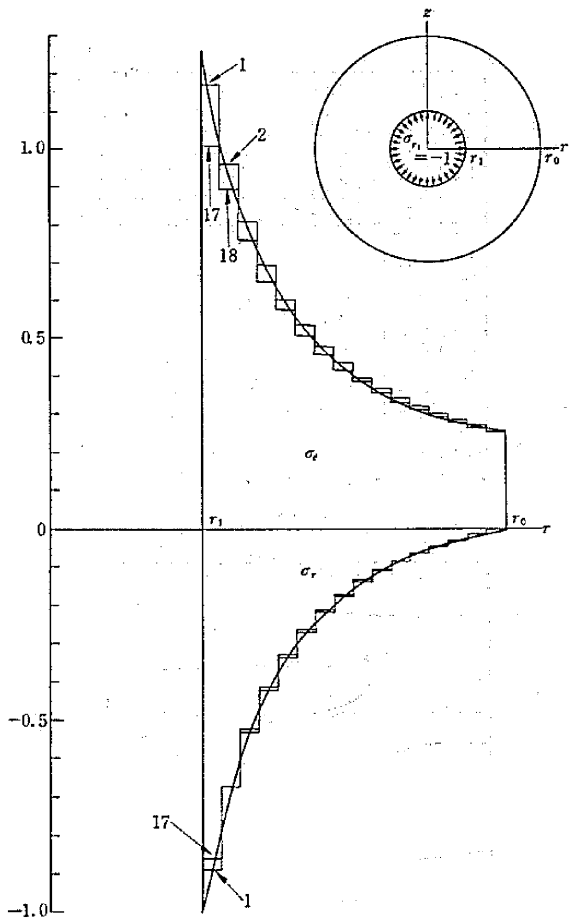


図 11 Example 2 厚肉円筒 (平面ひずみ) の応力  
た値を示すが、2 列の平均を、その部分の幅の中心にとると、厳密解とだいたい一致することがわかる。

次に、大規模な実際問題への適用例として、上下に厚いスラブのついた厚肉容器のモデルの内圧に対する解析結果を示す。この場合、スラブと円筒部の接合隅を中心とした応力集中が問題になるので、その部分を特に細密なメッシュに分割した。

未知変位の数が 1278 個である。前述の over-relaxation を行ない (加速係数を 1.92 にとった)、365 サイクルで平均偏差 (各節点における変位の、1 サイクルの変動量と変位量の比の絶対値の全未知数についての平均値) が  $0.96 \times 10^{-3}$  の収束度が得られた。ただし、応力度は、変位の微分値であり、応力の収束度は一段低いと見なければならない。要した演算時間 (HITAC 5020 E) は 519 sec であった。

分割法を図 12 に、得られた応力分布を図 13, 14, 15 に示した。隅部分の応力集中の分布は、おおむねとらえられていると思われる。

## 9. 非対称問題

回転体に非軸対称荷重が加えられる場合、3 次元応力

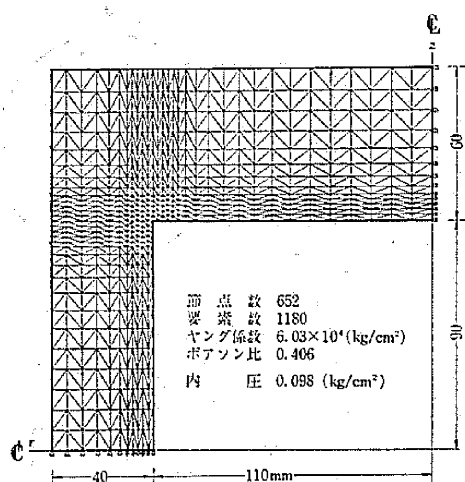
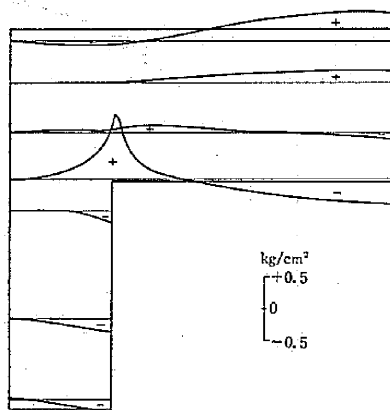
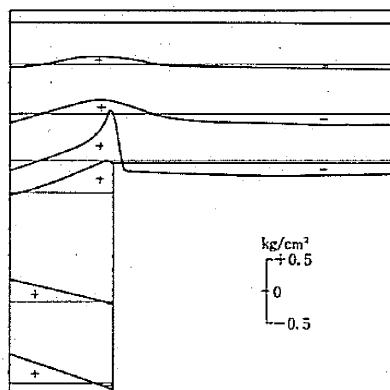


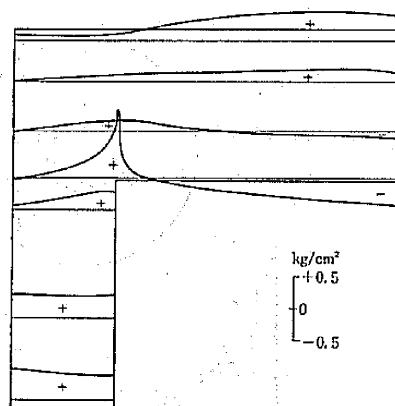
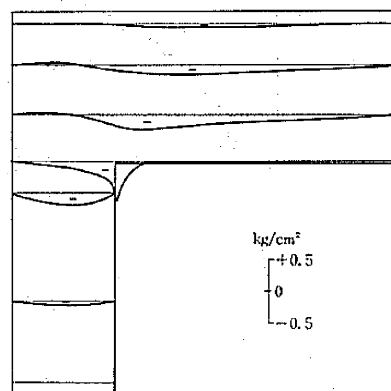
図 12

図 13 応力  $\sigma_r$ 図 14 応力  $\sigma_z$ 

が生じる。これを3次元立体として解析することは可能ではあるが、はしがきで述べたように現実的ではない。

この場合、非対称の分布荷重が、回転角の三角級数の和として表わされ、各次数の波に対応する解析ができれば、各次数の応力、変位の合成したものが、はじめの非対称荷重に対する解であると考えられる。

この場合の剛性行列の求め方は、図 17 に示すように

図 15 応力  $\sigma_\theta$ 図 16 応力  $\tau_{rz}$ 

三角形断面のリング状のエレメントの稜線に、 $\sin n\theta$ ,  $\cos n\theta$  分布 ( $n$  は円周上の波の数) の線荷重、変位が生じるものと仮定し、回転角  $\theta$  の任意位置でのつりあいを求めることにより、その位置での剛性行列 ( $\theta$  の関数) が得られる。特に  $\theta = \pi/4n$  の位置をとると、 $\theta$  に無関係な剛性行列が得られ、これは、応力と変位の最大値間の関係を直接定める。この剛性行列は、回転体の一般的な場合の剛性行列であり、特殊ケースとして  $n=0$  とおくと軸対称の場合の前述の剛性行列が得られる。

この方法を用いると、回転体に横力が作用する場合や、部分荷重が作用する問題などが能率よく解ける。筆者らは、厚肉容器に地震力が作用する場合 ( $n=1$ ) に適用して好結果を得ている。

この項についての詳細は文献 (6), (7) を参照されたい。

## む す び

以上、Finite Element Methodの適用例として、回転体の解析法を説明した。この方面の理解のための一助となれば幸いである。

おわりに、筆者の構造解析に関する研究につき、ご指導をいただいている坪井善勝教授、ご協力をいただいた塩

(p. 40 へつづく)

られている。

このことはかかるシミュレーションが実際の現象をかなりよく表現していることを示すものにほかならない。筆者らは電気学会高電圧試験専門委員会 SD グループにおける調査研究の一環として、わが国における超高圧送電系統を対象としてモンテカルロ法による雷害事故の研究を行なっているが、やはり実績ときわめてよく一致する計算結果が得られている。

## 6. 結 言

送電線における雷現象の電子計算機によるシミュレーションを行ない、雷害による事故件数の理論的な計算を行なった。計算結果は実績ときわめてよく一致し、ここで用いたシミュレーションや入力データが実際の現象をきわめてよく模擬していることを示している。最近電力工学においては統計的手法を利用して系統の解析を行ない、送電線の設計を試みるいろいろな行なわれ、成果を収めつつあるが、これらについては機会を改めてのべるつもりである。ここで取扱っている対象は力学系の解析とはまったく異なっているが、数学的手法としてはかなりの共通点があると考えられる。本特集号中の一文としてこの点を特に強調したい。本文がその関連分野と同時に

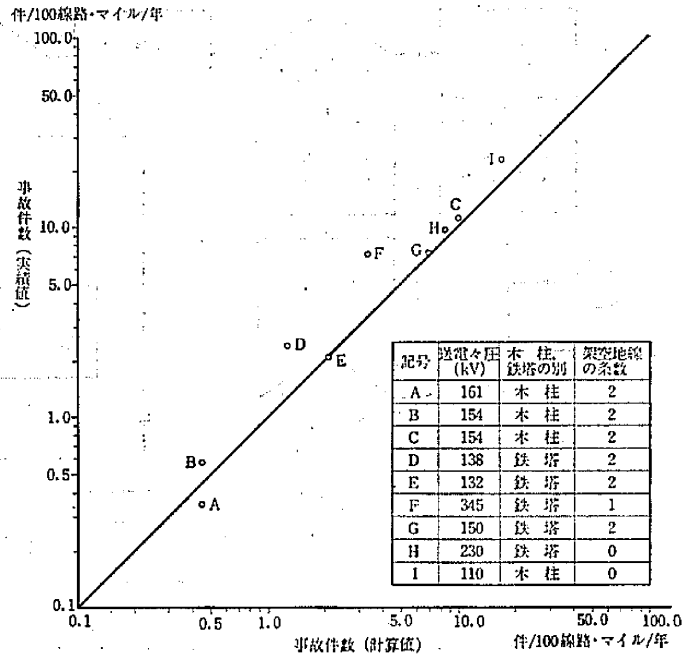


図 6 送電線における事故件数の計算値と実績値の比較

異なる専門の方々の参考になることがあれば筆者の最もよろこびとするところである。(1968 年 3 月 14 日受理)

## 参 考 文 献

- 1) J.G. Anderson, Trans. A.I.E.E. 80 p.414 (1961).
- 2) 沼尻, 電気学会雑誌, 81 p.1258 (1964).

(p. 36 よりつづく)

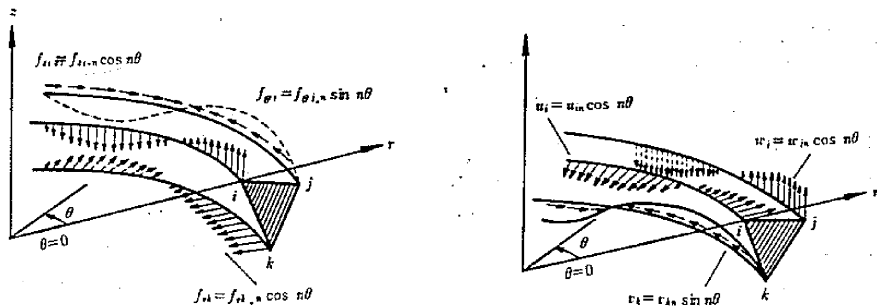


図 17

屋繁松, 田中伸幸の両君に, 厚く御礼を申上げる。

(1968 年 3 月 29 日受理)

## 引 用 文 献

- 1) O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967, p. 22
- 2) R.W. Clough & J.L. Tocher: Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Ohio, 1965
- 3) J.H. Argyris, S. Kelsey & H. Kamel; "Matrix Method of Structural Analysis", AGARDograph 72, Pergamon Press, 1964, pp. 128~135
- 4) 坪井・川股・塩屋・田中: Finite Element Method による連続体の解析, 日本建築学会論文報告集, 号外, 昭 42・10 月
- 5) R.W. Clough: The Finite Method in Structural Mechanics, "Stress Analysis", John Wiley & Sons, 1965, pp. 98~100
- 6) 川股・塩屋: 回転体の非対称問題に対する剛性行列, 生産研究, 20 巻 1 号, 1968, (研究速報)
- 7) S. Kawamata & S. Shioya: Application of Finite Element Method to Non-symmetrical Problems of Solids of Revolution, "Recent Researches of Structural Mechanics" - Contributions in Honour of the 60th Birthday of Prof. Y. Tsuboi, Uno-shoten, to be published, Apr. 1968