

はりおよびフレーム構造のマトリックス弾塑性解析

Elastic-plastic Analysis of the Beam and Frame Structures by the Matrix Method

山 田 嘉 昭

Yoshiaki YAMADA

はりおよびフレーム構造のマトリックス弾塑性解析の手法はすでによく確立されている。一方において、リミット・アナリシスあるいは塑性解析の手法も、それ自体として、ほとんど完成の域に達しているとみることが出来る。本稿は、弾性の状態からリミット・アナリシスの極限の状態にいたる弾塑性問題を、マトリックス法によって組織的に、かつ統一的に取扱おうとする新しい試みである。新しい手法は、その特別な場合として弾性問題の解を与える。また弾塑性解析を順次進めていく過程で、リミット・アナリシスにおける崩壊荷重の正解や崩壊のメカニズムもごく自然な形で求められる。同時に各変形または荷重の段階における変位が得られることも大きな特長である。なお本稿は、連続体の弾塑性問題を扱った筆者と共同研究者の研究¹⁾を、元来有限個の要素から構成されるところの骨組構造に及ぼしたものである。以下、簡単な例によって、手法を概説する。

1. はりの弾塑性問題と例題

図1のように、両端固定のはりが、A点とB点に横荷重 p_A , p_B を受ける問題を考える。簡単のため

$$CA=AB=BD=l,$$

はり是真直で、その断面は一様とする。座標を図のように選び、A点とB点のたわみ (deflection) および傾斜 (slope) をそれぞれ δ_A , δ_B および θ_A , θ_B とすれば、標準的なマトリックス弾塑性解析の手法²⁾を適用して、節点変位を外力 p_A , p_B に関係づける次の表示式が得られる。ただし回転は反時計まわりを正值とする。

$$d = K^{-1} p, \quad d = \begin{pmatrix} \delta_A \\ \theta_A l \\ \delta_B \\ \theta_B l \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_A \\ m_A/l=0 \\ p_B \\ m_B/l=0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$K^{-1} = \frac{1}{162EI} \begin{pmatrix} 16 & 12 & 11 & -15 \\ 12 & 36 & 15 & -18 \\ 11 & 15 & 16 & -12 \\ -15 & -18 & -12 & 36 \end{pmatrix} \quad (2)$$

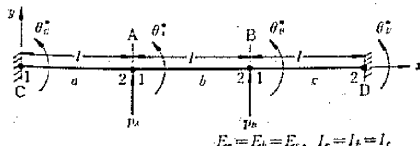


図1 集中荷重を受ける両端固定のはり

K^{-1} は図1のはりの剛性マトリックス K の逆変換、 E は縦弾性係数、 I は断面二次モーメントをあらわす。部材 a , b , c の部材端 1, 2 におけるモーメントを m_{1a} , ..., m_{2c} であらわし、反時計まわりのモーメントを正值とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_{1a}}{l} &= -\frac{1}{9}(4p_A + 2p_B), & \frac{m_{2a}}{l} &= -\frac{1}{27}(8p_A + p_B) \\ \frac{m_{2b}}{l} &= -\frac{1}{27}(p_A + 8p_B), & \frac{m_{1c}}{l} &= \frac{1}{9}(2p_A + 4p_B) \end{aligned} \right\} (3)$$

$p_A = 2p_B$ の特別な場合を取扱い、塑性関節の全塑性モーメントを m_p とすれば、絶対値最大の曲げモーメントは m_{1a} であるから、最初の関節はC点に生じる。そのときの p_a の値は、 $m_{1a} = -m_p$ とおき

$$p_B^c = \frac{9}{10} m_p / l \quad (4)$$

(4)式の荷重のもとにおける曲げモーメント分布は、図2(a)のようである。

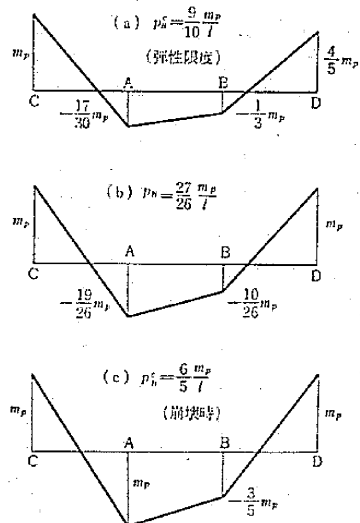


図2 弾塑性状態の曲げモーメント分布

C点に関節を生じてのちは、(1)式に代わる次のようなマトリックスの表示式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \delta_A \\ \theta_A l \\ \delta_B \\ \theta_B l \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} p_A \\ m_A/l=0 \\ p_B \\ m_B/l=0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \theta_c * l \quad (5)$$

研究速報

(5)式を(1)式と比較すると、C点に発生した塑性関節における回転 θ_c^* を含む項が付加されるほか、マトリックスの表示式はまったく弾性問題の場合と同じである。同様に(3)式の部材端モーメントの式にも θ_c^* を含む項が加わり、 $p_A=2p_B$ の場合について結果を書けば

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_{1c}}{l} &= -\frac{10}{9} p_B + \frac{4}{3} \frac{EI}{l^2} \theta_c^*, & \frac{m_{2c}}{l} &= -\frac{17}{27} p_B - \frac{2}{3} \frac{EI}{l^2} \theta_c^* \\ \frac{m_{2b}}{l} &= -\frac{10}{27} p_B, & \frac{m_{2c}}{l} &= \frac{8}{9} p_B + \frac{2}{3} \frac{EI}{l^2} \theta_c^* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

すでにC点に関節を生じているので、 $m_{1c} = -m_p$ 、さらに図2(a)の曲げモーメント分布から、第2の関節はD点に生じるものとして $m_{2c} = m_p$ とおく。こうして(6)式の最初と最後の式を解けば

$$p_B = \frac{27}{26} \frac{m_p}{l}, \quad \theta_c^* = \frac{3}{26} \frac{m_p l}{EI} \quad (7)$$

(7)式の p_B に対する曲げモーメント分布は図2(b)のようである。このモーメント分布では、はりのどの部分における曲げモーメントの絶対値も m_p を越えることはない。したがってC点とD点に関節を設けた最初の仮定は正当化され、図2(b)は(a)の状態から比例的に外力 p_A, p_B が増加する比例負荷における正解となる。

C, D点に塑性関節を生じて以降は、D点における関節の回転 θ_D^* を含む新しい項が(5)式と(6)式に加わる。さらにそのうちA点に第3の関節を生じ、はりは運動学的なメカニズムとなり、崩壊が起こる。崩壊時の荷重 p_B と曲げモーメント分布は図2(c)のようで、そのときの θ_c^* と θ_D^* の値は

$$\theta_c^* = \frac{13}{10} \frac{m_p l}{EI}, \quad \theta_D^* = -\frac{11}{10} \frac{m_p l}{EI} \quad (8)$$

となる。なお本報の手法によれば、はりが崩壊にいたったことは、三つの関節 C, D, A 点における回転 $\theta_c^*, \theta_D^*, \theta_A^*$ を定める式に掛かっている係数のマトリックスが特異性 (singularity) を持つので、計算の過程において自然な形で知ることが可能である。

図1のはりの崩壊荷重を、リミット・アナリシスの上界法で取扱う場合は、図3に示す四つの崩壊形式を考え

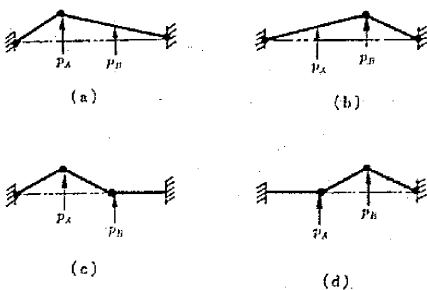


図3 可能な運動学的メカニズム

そのうち最小の荷重を与えるものを見いだせばよい。 $p_A=2p_B$ の場合、図の(a)が正しい崩壊のメカニズムとなり、図2(c)とまったく同じ崩壊荷重と曲げモーメント分布が得られる。

また同じ $p_A=2p_B$ の問題を下界法で取扱う場合は、次の不等式を満足する p_B の最大値を求める問題となる。すなわち q および n をパラメータ (不静定力に相当する) として

$$\left. \begin{aligned} -\frac{m_p}{l} \ll \frac{m_{1c}}{l} &= -4p_B - 3q - \frac{n}{l} \ll \frac{m_p}{l} \\ -\frac{m_p}{l} \ll \frac{m_{2a}}{l} &= p_B + 2q + \frac{n}{l} \ll \frac{m_p}{l} \\ -\frac{m_p}{l} \ll \frac{m_{2b}}{l} &= q + \frac{n}{l} \ll \frac{m_p}{l} \\ -\frac{m_p}{l} \ll \frac{m_{2c}}{l} &= \frac{n}{l} \ll \frac{m_p}{l} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで取扱っている例題では、上界法と下界法のいずれを適用して解を求めることも簡単である。しかしながら、正しい崩壊荷重と崩壊のメカニズムが求められたとしても、そのときの節点変位、あるいは崩壊にいたるまでの降伏の過程や変形については、なんらの情報も得られない。本報の方法は、弾性解から崩壊にいたるすべてのデータを与え、また計算を容易に組織化できる可能性をもっている。

2. ラーメンの構造解析の例題

前項で、はりに適用した手法を拡張し、計算機プログラム開発の端著とするため、図4に示す簡単なラーメン構造を取扱った。荷重は節点Aに作用する水平力 H と、ABの中点に作用する鉛直力 V である。寸法は図のように、水平部材 (はり) の長さを鉛直部材 (柱) の長さ l の2倍とし、各部材は同一の材料からなり、断面の寸法も同一と仮定する。

図4の問題を剛性マトリックス法 (stiffness method) で取扱う場合は、部材の軸方向の剛性を考慮しなければならぬので、 9×9 のマトリックスの逆変換が必要である。それで手計算では、マトリックスの次数を 6×6 に減らすため、図5のように、問題を置きかえて解析を行なった。この場合はA, Bの中点Cに塑性関節を生

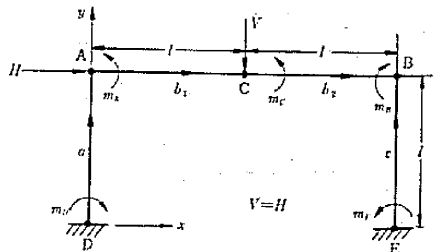


図4 簡単な平面ラーメン構造

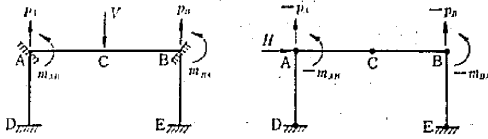


図 5 等価節点力と解の重ね合わせ

表 1 図 4 のラーメンの弾塑性変形と崩壊 ($H=V$)

	弾性限度		弾塑性状態		崩 壊
関節の発生 H/m_p	E点 2.424	B点 2.567	C点 2.957	D点 3.0	
$m_D \times 1/m_p$	-0.5152	-0.5821	-0.9126	-1.0	
m_A	-0.0303	-0.0149	-0.0043	0	
m_C	0.7273	0.7761	1.0	1.0	
m_B	-0.9394	-1.0	-1.0	-1.0	
m_E	1.0	1.0	1.0	1.0	
$\theta_D^* \times EI/m_p l$	—	—	—	—	
θ_A^*	—	—	—	—	
θ_C^*	—	—	—	0.1667	
θ_B^*	—	—	0.2174	-0.3333	
θ_E^*	—	-0.0299	-0.1300	-0.1667	

じる可能性があるので、鉛直集中荷重 V と等価な節点力 p_A, p_B, m_{AB}, m_{BA} はそのことを考慮して定める必要がある。

三つの節点 A, C, B と固定の支点 D, E に仮定の塑性関節をおき、前節と同様の方法で弾塑性変形を追跡した。表 1 は計算の結果を示し、各荷重段階における曲げモーメント、および関節における回転角度などをまとめたものである。ただし数値計算は $H=V$ の場合について行ない、表 1 の曲げモーメントは図 4 に示す m_D, m_A, m_C, m_B, m_E の値、また $\theta_D^*, \theta_A^*, \theta_C^*, \theta_B^*, \theta_E^*$ はこれらのモーメントの方向に生じた回転（塑性関節における）をあらわす。本例題は Neal³⁾ によって別の方法で解かれており、表 1 の結果は Neal の解に完全に一致する。塑性関節は E, B, C, D 点の順序に発生し、この四つの関節を生じたとき、図 4 の構造物に崩壊が起こる。

集中荷重を受ける図 4 のラーメンと比較するため、図 6 のように、水平部材（はり）に分布荷重 w が作用する場合も取扱った。ただし比較を容易にするため、分布荷

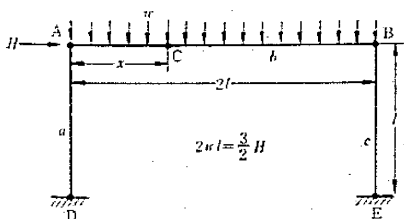


図 6 分布荷重を受ける場合

表 2 図 6 のラーメンの弾塑性変形と崩壊 (分布荷重)

	弾性限度		弾塑性状態		崩 壊
関節の発生 H/m_p	E点 2.424	B点 2.567	D点 3.059	C点 3.328	
$m_D \times 1/m_p$	-0.5152	-0.5821	-1.0	-1.0	
m_A	-0.0303	-0.0149	0.0588	0.3270	
m_C	0.4811	0.5182	0.7376	1.0	
m_B	-0.9394	-1.0	-1.0	-1.0	
m_E	1.0	1.0	1.0	1.0	
$\theta_D^* \times EI/m_p l$	—	—	—	-0.3808	
θ_A^*	—	—	—	—	
θ_C^*	—	—	—	—	
θ_B^*	—	—	-0.2745	-0.7673	
θ_E^*	—	-0.0299	-0.1569	-0.4928	
$(m_C)_{\max}$ の位置 x	0.750 l	0.744 l	0.769 l	0.734 l	

重を $2wl=3H/2$ に選び、弾性限度における水平力 H が図 4 の問題と同じ値になるようにした。分布荷重が存在する問題では、単に手計算を簡単にする場合ばかりでなく、計算機プログラムにおいても、それを等価な節点力におきかえる必要がある。さらに分布荷重を受ける部材内に生じる可能性のある塑性関節について考慮をはらわなければならない。

表 2 は計算の結果を示す。塑性関節は E, B, D, C 点の順序に発生し、分布荷重を受ける水平部材内に発生する関節 C は、崩壊前の最後のものである。表 2 の最後の行は、各荷重の段階について、水平部材内に生じる最大曲げモーメント $(m_C)_{\max}$ の位置を示す。表の例からも明らかのように、分布荷重を受ける部材内では、最大曲げモーメントの位置が変化するので、分布荷重のある構造物の取扱いは、集中荷重のみを受ける問題に比較して面倒である。また分布荷重を受ける部材内で、比較的初期に塑性関節があらわれるような場合は、多少の誤差を許して計算を進める必要が起こる（設計にあたって、分布荷重下の関節が最後に生じるように計画すれば、このような問題にわずらわされることはない）。

おわりに、本報告の手法と解析結果を基礎に、計算機プログラム開発の作業が進行中であることを述べておきたい。
(1968 年 3 月 2 日受理)

文 献

- 1) Y. Yamada, N. Yoshimura and T. Sakurai: *Int. J. mech. Sci.* 10 (印刷中).
- 2) R. K. Livesley: *Matrix Methods of Structural Analysis* (Pergamon Press, 1964).
- 3) B. G. Neal: *The Plastic Methods of Structural Analysis* (p. 53, Chapman & Hall, 1956).