

マトリックス法による棒のねじり解析

—— 様断面棒の場合 ——

Finite Element Analysis on the Torsion of a Bar with Uniform Cross Section

川 井 忠 彦・吉 村 信 敏
Tadahiko KAWAI and Nobutoshi YOSHIMURA

1. ま え が き

Saint Venant の理論にもとづく一様断面棒 (断面形状は任意) のねじり問題をマトリックス法 (有限要素法) によって取り扱うことができることに着目し, キーミズのある丸棒の応力集中を解析したので報告する。

2. 使用する有限要素とその剛性マトリックス

一様断面の棒から図 1 (a) にしめすように軸方向に単位長さ 1 の部分をきりだし図中にしめすように直交座標系をさだめる。さて Saint Venant のねじり理論は長い棒をねじる場合

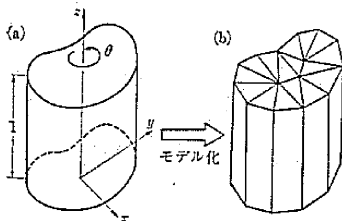


図 1 一様断面棒のモデル化

どの断面においても軸方向の単位長さ当たりの断面回転角 θ が一定であるという仮定のもとに成り立っており, 回転軸の位置は問題にならないから, z 軸を回転軸に一致させ, これを図 1 (b) にしめすような三角柱要素の集合体としてモデル化する。

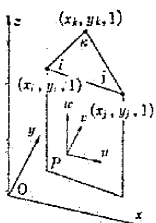


図 2

三角柱要素 ijk を図 2 にしめす。この要素内の任意の 1 点 P の変位 (u, v, w) は Saint Venant の理論により一般的につきのようにおくことができる。

$$u = -\theta yz \quad (1.1)$$

$$v = \theta xz \quad (1.2)$$

$$w = h(x, y) \quad (1.3)$$

ここに θ は“ねじれ率”と呼ばれる。

(1.1~2) 式からあきらかなように, 要素内の任意の 1 点 P の u および v は θ をきめればその $x \cdot y$ 座標の値だけで決定されてしまうので, θ をこの要素の変位ベクトルの 1 成分としておけば, u および v に関する節点変位は考える必要がない。したがって, 三角柱有限要素の節点変位の列ベクトル d はつぎのようになる。

$$d = \{\theta, w_i, w_j, w_k\}^T \quad (2)$$

(ここに, 上添字 T は転置行列をあらわす)

w_i, w_j, w_k は i, j, k 点における z 方向の変位である。これに対応する節点力の列ベクトル f は

$$f = \{m, Z_i, Z_j, Z_k\}^T \quad (3)$$

となる。ここに Z_i, Z_j, Z_k は i, j, k 点における z 方向の節点力, m は θ に対する物理量であるが, その本質については後で検討する。

さて, w は (1.3) 式にしめしたように, x, y のみの関数であるが, これをつぎのように仮定する。

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4)$$

ここに $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は未定係数である。このような変位関数を仮定すると, 相隣る要素間の変位の適合条件は完全にみたされる。

これから先の計算は, 一般の剛性マトリックスの導出と同じであるから, 説明を省略し, 結果のみをしめしていく。

(a) 未定係数と節点変位の関係

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = d = T\alpha \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ 0 & y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ 0 & x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix}, \text{ or } \alpha = T^{-1}d \quad (6)$$

ここに A は三角柱の底面積である。

(b) ひずみと未定係数の関係

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x = -\theta y + \alpha_2 \\ \gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = \theta x + \alpha_3 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}, \epsilon = B\alpha \quad (7)$$

(c) 応力とひずみの関係

G = 剪断弾性係数

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \sigma = D\epsilon \quad (8)$$

(d) 剛性マトリックス $[k]$

$$k = \iiint (N^T D N) dx dy dz \quad (9)$$

$$= \iint (N^T D N) dx dy$$

ここに $N = BT^{-1}$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -2Ay, & y_j - y_k, & y_k - y_i, & y_i - y_j \\ 2Ax, & x_k - x_j, & x_i - x_k, & x_j - x_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

こうして剛性マトリックスがもたらされたが、ここで(3)式の m について考えると、(9), (10)式より

$$m = G \iint ((y^2 + x^2) \theta + \{-y(y_j - y_k) + x(x_k - x_j)\} w_i / 2A + \{-y(y_k - y_i) + x(x_i - x_k)\} w_j / 2A + \{-y(y_i - y_j) + x(x_j - x_i)\} w_k / 2A) dx dy \quad (11)$$

ところで (6~8) 式から

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{G}{2A} \begin{bmatrix} -2Ay, & y_j - y_k, & y_k - y_i, & y_i - y_j \\ 2Ax, & x_k - x_j, & x_i - x_k, & x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix} \quad (12)$$

であることを考慮すると、(11)式は

$$m = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy \quad (13)$$

となり、結局 m は x 方向に単位長さ 1 の三角柱有限要素に加わるねじりモーメントであることがわかる、

3. 断面全体のねじり解析の手法

骨組構造や他の連続体の場合と同じように、もともとめられた三角柱有限要素の剛性マトリックスを整理合成して変位の境界条件を考慮に入れつつ断面全体の剛性マトリックスをもとめる。この際すべての有限要素の剛性マトリックスに同じ変位成分 θ が含まれているのが一般の場合とちがう点である。計算の結果、断面全体の剛性方程式がつぎようになる。

$$\begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_A] & [K_{AB}] \\ [K_{AB}]^T & K_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$\{Z\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$, $\{w\} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ とすると、(14)式より

$$\{Z\} = [K_A] \{w\} + \theta [K_{AB}] \quad (15)$$

ところで x 方向には外力は加わっていないのであるか

ら、

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n = 0 \text{ or } Z = 0 \quad (16)$$

ここで、ねじれ率 θ が与えられると、(15)式は

$$-\theta [K_{AB}] = [K_A] \{w\} \quad (17)$$

ゆえにもとめる x 方向の変位 $\{w\}$ はつぎようになる。

$$\{w\} = -\theta [K_A]^{-1} [K_{AB}] \quad (18)$$

また、そのときのねじりモーメント M_i は (14) 式よりつぎようになる。

$$M_i = [K_{AB}]^T \{w\} + K_B \theta = [K_B - [K_{AB}]^T [K_A]^{-1} [K_{AB}]] \theta \quad (19)$$

w がもたられば (12) 式から応力分布をもとめることができる。ただし応力分布は平面応力場における三角形平板要素などちがって、 x および y の 1 次関数になっている ((12)式参照)。

一般の問題ではねじれ率 θ が未知で、ねじれモーメント M_i が与えられるのが普通であるが、この場合は、(19)式をもちいて θ を決定すればよい。

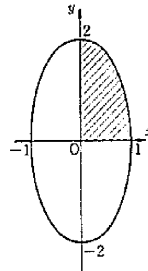


図 3 長円断面

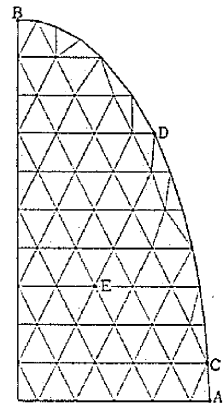


図 4 長円断面の要素分割

4. 例 題

解析精度を確認するために図 3 にしめすような長円断面について計算をおこなった。対称性から第 1 象限の部分のみを考慮すればよい。そこで第 1 象限の部分を図 4 のように節点数 61, 要素数 91 に分割した。なお対称性から x, y 軸上の節点の w はゼロである。 $M_i = 4$, $G = 10^6$ としたとき、ねじれ率 θ について厳密解と計算値をくらべると、

$$\theta(\text{厳密解}) = 0.795775 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

$$\theta(\text{計算値}) = 0.796953 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

であって、きわめて精度がよい。また図 4 中の A~E 点の応力値について、厳密解と計算値を比較したのが表 1 であり、計算値は非常に精度が良いことがわかる。

図 5 は 1 対のキーみぞをもつ丸棒である。この棒のね

研究速報

表 1 計算値と厳密解との比較 ($M_1=4, G=10^\circ$)

	τ_{xx}		τ_{yz}	
	計算値	厳密解	計算値	厳密解
A	0	0	1.27135	1.27324
B	-0.64781	-0.63662	0	0
C	-0.06471	-0.06366	1.24450	1.26686
D	-0.44861	-0.44563	0.90474	0.90928
E	-0.19226	-0.19099	0.50926	0.50930

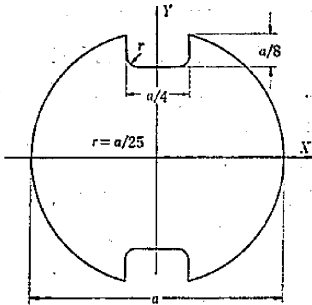


図 5 キーみぞをもつ丸棒

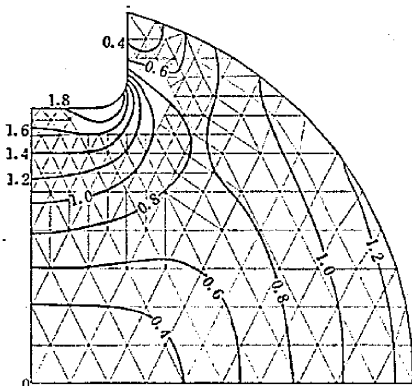


図 6 要素分割および τ の等高線

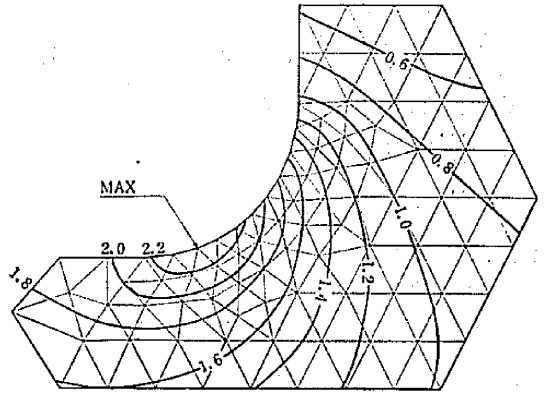


図 7 キーみぞすみ部の要素分割および τ の等高線

じりによる剪断応力の分布やみぞのすみ部の応力集中を本方法で解析してみた。対称性から第 1 象限のみ考慮して図 6 の細線でしめすように要素分割した。キーみぞすみ部については、応力分布を正確に知るために、図 7 の細線でしめすようにさらにこまかく分割した。要素数は 389、節点数は 223 である、計算の結果もとまった τ_{xx} および τ_{yz} から合剪断応力 $\tau = \sqrt{\tau_{xx}^2 + \tau_{yz}^2}$ を計算し、この等高線をえがき図 6 および図 7 に太線でしめた。ただし図中の数値は $\tau_{nom} = 16 M_1 / \pi a^3$ で無次元化したものである。最大の τ を生ずる点を図 7 中に MAX でしめた。その値は $2.49 \tau_{nom}$ であったが、Leven¹⁾ の理論計算および実験 (ただしキーみぞは一つ) の結果と考えあわせて、よい結果であろう。なお、計算所要時間は、HITAC 5020 (32 K) にて 330 秒であった。

(1968 年 2 月 6 日受理)

文 献

- 1) M. M. Leven, Pro. of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. 7-No. 2, p. 141 (1950)
- 2) 信原, 同上 5, vol. 3, No. 19 (1967)
- 3) 吉村, 同上 7, vol. 3, No. 22 (1967)
- 4) 吉識・川井・吉村, マトリックス法による船体構造解析に関する研究—第 1 報, 造船協会論文集 120 号, p. 127, (1967)
- 5) 同上—第 2 報, 同上 121 号, p. 150 (1967)
- 6) O. C. Zienkiewicz & G. S. Holister, Stress Analysis, p. 162~p. 165 (1965), John-Wiley & Sons
- 7) O. C. Zienkiewicz & Y. K. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics (1967), McGraw-Hill
- 8) 永元・田口, 三材結合部の強度(その 1 および 2), 西部造船会会報, 第 33 および 34 号 (1967)
- 9) 川井・吉村, 有限要素法による連続体の固有振動数の解析, 日本機械学会創立 70 周年記念東京講演会前刷 (1967)

(p. 24 よりつづく)

マトリックス法による解析の手法が確立されており、かなりの問題まで実際にとかれている。これからは

- (a) 接触問題
- (b) 波動伝ばの問題

などが大きな問題となるであろう。

また数千円の連立 1 次方程式や特性方程式をとくための計算プログラムの開発、現在人力でおこなわれている入力データの作製や計算結果の整理の自動化も進めなければならないであろう。(1968 年 2 月 28 日受理)

参 考 文 献

- 1) 鷺津, マトリックス構造解析法講座 4, JSSC, vol. 3, No. 18 (1967)