

薄肉開断面材のつりあい式と安定条件

Equilibrium Equations and Stability Criteria of Thin-Walled Beams

田 中 尚・宇田川邦明

Hisashi TANAKA and Kuniaki UDAGAWA

1. ま え が き

薄肉開断面材の力学に関しては数多くの研究¹⁾²⁾があるが、導かれたつりあい式は微小変位、または座屈に対するものであり、しかもすべて弾性関係を用いたもので、そのままでは有限変位の問題、または塑性範囲の問題を取扱うことはできない。この研究は塑性範囲における開断面材の力学的挙動を調べるための基礎的研究として、開断面の有限変位近似つりあい式および安定条件を導いたものである。

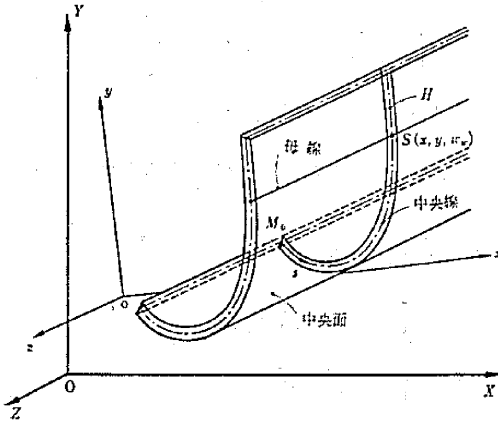


図 1

2. 変位とひずみ

まず変形前の位置において、材軸と平行な Z 軸をもつ固定座標 O-XYZ および材の断面の中央線 H と一致する xy 面をもち、かつ x, y 軸が X, Y 軸と平行な動座標 o-xyz を考える。

断面の中央線 H 上の一点 S(x, y, 0) は変形後においても o-xyz に対して S(x, y, w_w) にくるが (w_w は warp 量)、H 線上の一点 M₀(x₀, y₀, 0) は変形後にも M₀(x₀, y₀, 0) であらわされるとする。

xyz 座標の原点 o の X, Y, Z 方向速度を \dot{u} , \dot{v} , \dot{w} (時間を t とし、 $\frac{d}{dt}$ を \cdot であらわす。) とし、xy 平面の X, Y, Z 軸まわりの角速度を $\dot{\phi}_x$, $\dot{\phi}_y$, $\dot{\phi}_z$ としたとき、xy 平面上の一点 P(x, y) の X, Y, Z 方向の速度 \dot{u}_p , \dot{v}_p , \dot{w}_p は、図 2 を参照して、

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_p &= \dot{u} - (y + x\phi) \dot{\phi}_z \\ \dot{v}_p &= \dot{v} + (x - y\phi) \dot{\phi}_z \\ \dot{w}_p &= \dot{w} - (x - y\phi) \dot{\phi}_y + (y + x\phi) \dot{\phi}_x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。上式中 ϕ は x 軸の X 軸に対する回転角である。

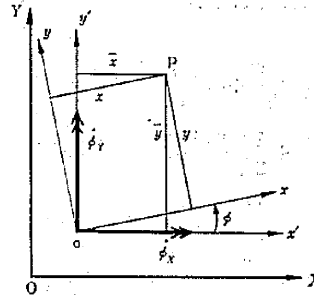


図 2

O の X, Y 方向の変位を u, v とし Z 軸まわりの回転角速度を ϕ とすると、図 3 を参照して近似的に

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_x &= -\dot{v}' + u'\dot{\phi} \\ \dot{\phi}_y &= \dot{u}' + v'\dot{\phi} \\ \dot{\phi}_z &= \dot{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とおける。上式中

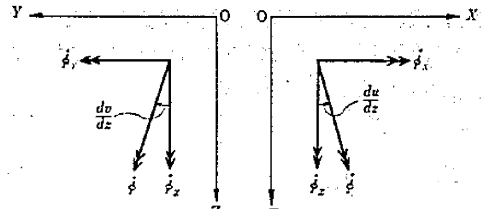


図 3

$\dot{\phi}$ は $\frac{d}{dx}$ をあらわす。式(2)を式(1)に代入して、t で積分すると、変位は

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u - y\phi - x\phi^2/2 \\ v_p &= v + x\phi - y\phi^2/2 \\ w_p &= w - xu' - yv' + y\phi u' - x\phi v' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。したがって断面上の一点 s の X, Y 方向の変位 u_s , v_s は式(3)より

$$\left. \begin{aligned} u_s &= u - y\phi - x\phi^2/2 \\ v_s &= v + x\phi - y\phi^2/2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

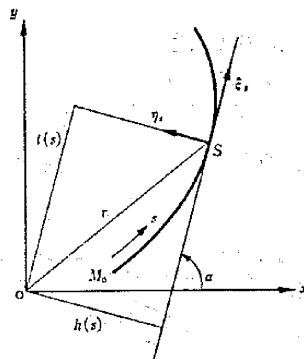


図 4

となり、また接線、法線および Z 方向の変位 ξ_s , η_s , w_s は warp 量を w_w とすると、図 4 の記号を用いて次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \xi_s^{(1)} + \xi_s^{(2)} \\ \eta_s &= \eta_s^{(1)} + \eta_s^{(2)} \\ w_s &= w_s^{(1)} + w_s^{(2)} + w_w \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

研究速報

$$\left. \begin{aligned} \xi_s^{(1)} &= u \cos \alpha + v \sin \alpha + h \phi, \quad \xi_s^{(2)} = -t \phi^2 / 2 \\ \eta_s^{(1)} &= -u \sin \alpha + v \cos \alpha + t \phi, \quad \eta_s^{(2)} = h \phi^2 / 2 \end{aligned} \right\} (6)$$

$$w_s^{(1)} = w, \quad w_s^{(2)} = -xu' - yv' + y\phi u' - x\phi v' \quad (7)$$

s, z 方向の垂直ひずみ ϵ_s, ϵ_z , 中央面のせん断ひずみ γ および振り角 β は次式で求まる (s は断面に沿った座標).

$$\epsilon_s = \frac{\partial \xi_s}{\partial s} - \eta_s \frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_s^{(1)}}{\partial s} + \xi_s^{(1)} \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 \quad (8a)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w_s}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_s^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_s^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \quad (8b)$$

$$\gamma = \frac{\partial w_s}{\partial s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial z} + \frac{\partial \eta_s^{(1)}}{\partial s} \frac{\partial \eta_s^{(1)}}{\partial z} \quad (8c)$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial s} + \xi_s^{(1)} \frac{d\alpha}{ds} \right) \quad (8d)$$

式(8a), (8d)に式(5), (6)を代入すると,

$$\epsilon_s = 0, \quad \beta = \phi' \quad (9)$$

となり, 式(8c)に式(5), (6), (7)を代入して, $\gamma = 0$ の条件と $M_0(s=0)$ において warp が 0 であることを考慮すると, 次式が得られる.

$$w_s = -\omega \phi' \quad (10)$$

ただし $\omega = \int_{M_0}^s h ds \quad (11)$

式(8b)に式(5), (6), (7), (10)を代入すると

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= w' + (u')^2/2 + (v')^2/2 - (u'' + \phi v'')x + (\phi u'' \\ &\quad - v'')y + r^2(\phi')^2/2 - \omega \phi'' \end{aligned} \quad (12)$$

となり, 式(4), (5), (7), (9), (10), (12)より速度およびひずみ速度を求めると, 次式ようになる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_s &= \dot{u} - y\dot{\phi} - x\dot{\phi}' \\ \dot{v}_s &= \dot{v} + x\dot{\phi} - y\dot{\phi}' \\ \dot{w}_s &= \dot{w} - (\dot{u}' + \dot{\phi}v' + \phi\dot{v}')x - (\dot{\phi}u' \\ &\quad + \phi\dot{u}' - \dot{v}')y - \omega\dot{\phi}' \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_s &= 0 \\ \dot{\epsilon}_z &= \dot{w}' + u'\dot{u}' + v'\dot{v}' - (\dot{u}'' + \dot{\phi}v'' + \phi\dot{v}'')x \\ &\quad + (\dot{\phi}u'' + \phi\dot{u}'' - \dot{v}'')y + r^2\dot{\phi}'\phi' - \omega\dot{\phi}'' \\ \dot{\beta} &= \dot{\phi}' \end{aligned} \right\} (14)$$

3. つりあい式

仮想速度の原理より力のつりあい式を求める. 部材の任意断面上の一点 s に作用する荷重の X, Y, Z 方向

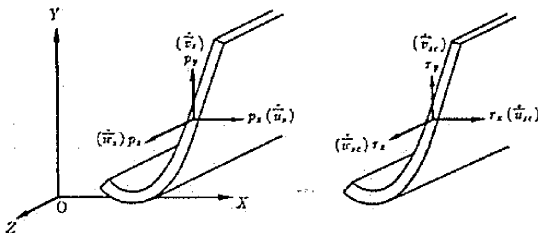


図 5

成分を p_x, p_y, p_z とし, それらに対応する仮想速度を $\dot{u}_s, \dot{v}_s, \dot{w}_s$ とし, 端部における X, Y, Z 方向の荷重または反力を r_x, r_y, r_z とし, それらに対応する仮想速度を $\dot{u}_{s,c}, \dot{v}_{s,c}, \dot{w}_{s,c}$ とする (図 5).

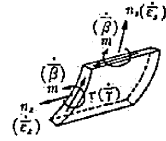


図 6

一方部材の内部に生ずる応力を, 軸方向垂直応力 n_z , 接線方向垂直応力 n_s , 中央面せん断応力 τ , 振りモーメント m とし, それらに対応する仮想ひずみ速度を $\dot{\epsilon}_s, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}$, 仮想振り角速度を $\dot{\beta}$ とする (図 6).

仮想速度の原理を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^s (p_x \dot{u}_s + p_y \dot{v}_s + p_z \dot{w}_s) ds dz + \left[\int_0^s (r_x \dot{u}_{s,c} \right. \\ \left. + r_y \dot{v}_{s,c} + r_z \dot{w}_{s,c}) ds \right]_{z=0} \\ + \left[\int_0^s (r_x \dot{u}_{s,c} + r_y \dot{v}_{s,c} + r_z \dot{w}_{s,c}) ds \right]_{z=l} \\ - \int_0^l \int_0^s (n_z \dot{\epsilon}_s + 2m \dot{\beta}) ds dz = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる. 上式に式(13), (14)を代入して, 次の記号を用いて変形し,

$$\left. \begin{aligned} P_X &= \int_s p_x ds, \quad P_Y = \int_s p_y ds, \quad P_Z = \int_s p_z ds \\ m_Y &= - \int_s x p_x ds + \phi \int_s y p_x ds \\ m_X &= - \int_s y p_x ds - \phi \int_s x p_x ds \\ m_\phi &= \int_s (x p_y - y p_x) ds - \phi \int_s (x p_x \\ &\quad + y p_y) ds - \frac{dw}{dz} \int_s x p_x ds + \frac{du}{dz} \int_s y p_x ds \\ m_w &= - \int_s \omega p_x ds \\ R_X &= \int_s r_x ds, \quad R_Y = \int_s r_y ds, \quad R_Z = \int_s r_z ds \\ \mu_Y &= - \int_s x r_x ds + \phi \int_s y r_x ds \\ \mu_X &= - \int_s y r_x ds - \phi \int_s x r_x ds \\ \mu_\phi &= \int_s (x r_y - y r_x) ds - \phi \int_s (x r_x + y r_y) ds \\ &\quad - \frac{dw}{dz} \int_s x r_x ds + \frac{du}{dz} \int_s y r_x ds \\ \mu_w &= - \int_s \omega r_x ds \\ N &= \int_s n_z ds, \quad \mathfrak{N} = \int_s n_z r^2 ds \\ M_V &= - \int_s n_z x ds, \quad M_I = 2 \int_s m ds \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_X &= - \int_s y r_x ds - \phi \int_s x r_x ds \\ \mu_\phi &= \int_s (x r_y - y r_x) ds - \phi \int_s (x r_x + y r_y) ds \\ &\quad - \frac{dw}{dz} \int_s x r_x ds + \frac{du}{dz} \int_s y r_x ds \\ \mu_w &= - \int_s \omega r_x ds \\ N &= \int_s n_z ds, \quad \mathfrak{N} = \int_s n_z r^2 ds \\ M_V &= - \int_s n_z x ds, \quad M_I = 2 \int_s m ds \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_X &= - \int_s y r_x ds - \phi \int_s x r_x ds \\ \mu_\phi &= \int_s (x r_y - y r_x) ds - \phi \int_s (x r_x + y r_y) ds \\ &\quad - \frac{dw}{dz} \int_s x r_x ds + \frac{du}{dz} \int_s y r_x ds \\ \mu_w &= - \int_s \omega r_x ds \\ N &= \int_s n_z ds, \quad \mathfrak{N} = \int_s n_z r^2 ds \\ M_V &= - \int_s n_z x ds, \quad M_I = 2 \int_s m ds \end{aligned} \right\} (18)$$

$$M_x = \int_s n_x \gamma ds \quad \mathfrak{M} = - \int_s n_x \omega ds$$

さらに部分積分を行ない、 \ddot{u} , \ddot{v} , \ddot{w} , $\ddot{\phi}$ は任意に与えたものであることを考慮すると、次のつりあい式および境界条件が得られる。

つりあい式

$$\left. \begin{aligned} N' + P_z &= 0 \\ -(M_x \phi + M_y)' + (Nu' - m_y)' + P_x &= 0 \\ -(-M_x + M_y \phi)'' + (Nv' - m_x)' + P_y &= 0 \\ -\mathfrak{M}'' + (\mathfrak{M} \phi' + M_z - m_a)' - M_x u'' - M_y v'' \\ &+ m_\phi = 0 \end{aligned} \right\} (19)$$

境界条件, $z = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases}$ において,

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} \text{ 方向} &\pm R_x = (M_x \phi + M_y)' - Nu' \\ \dot{v} \text{ 方向} &\pm R_y = (-M_x + M_y \phi)' - Nv' \\ \dot{w} \text{ 方向} &\pm R_z = -N \\ \dot{u}' \text{ 方向} &\pm \mu_y = -(M_x \phi + M_y) \\ \dot{v}' \text{ 方向} &\pm \mu_x = -(-M_x + M_y \phi) \\ \dot{\phi} \text{ 方向} &\pm \mu_\phi = -(\mathfrak{M} \phi' + M_z) \\ \dot{\phi}' \text{ 方向} &\pm \mu_a = -\mathfrak{M} \end{aligned} \right\} (20)$$

式(19), (20)を時間 t で微分して

$$\left. \begin{aligned} u = v = w = \phi &= 0 \\ u' = v' = w' = \phi' &= 0 \\ u'' = v'' = \phi'' &= 0 \\ \dot{p}_x = \dot{p}_y = \dot{p}_z &= 0 \end{aligned} \right\} (21)$$

$$(22)$$

とおけば、座屈荷重を求めるつりあい式および境界条件となり、同様に式(21)および

$$\left. \begin{aligned} N = M_y = M_x = \mathfrak{M} = M_z = \mathfrak{M} = 0 \\ P_x = P_y = P_z = m_y = m_x = m_\phi = m_a = 0 \end{aligned} \right\} (23)$$

を用いば、微小変位のつりあい式と境界条件が得られる。

4. 安定条件

ある瞬間 ($t=0$) において、つりあい状態にある部材が、ある無限小 disturbance によって運動エネルギー K_0 を得たとする。また、微小時間 δt 後の運動エネルギーを K とすれば、 $K - K_0 < 0$ であれば、この部材は安定であり、この条件は、

$$\left(\frac{d^2 K}{dt^2} \right)_{t=0} < 0 \quad (24)$$

と書くことができる。上式の左辺は次のようにして求まる。式(19)を運動方程式にし、それぞれの式に \dot{w} , \dot{u} , \dot{v} , $\dot{\phi}$ をそれぞれ掛けて加えて、 $z=0$ から $z=l$ まで積分すると $\frac{dK}{dt}$ が求まる。この式から $\frac{d^2 K}{dt^2}$ を計算して $t=0$ においてつりあっている条件を用いると、

$$\left(\frac{d^2 K}{dt^2} \right)_{t=0} = \int_0^l \left\{ -\dot{N} \dot{w}' - (\dot{M}_x \phi + \dot{M}_y \phi + \dot{M}_z) \dot{u}'' - (-\dot{M}_x + \dot{M}_y \phi + \dot{M}_z \phi) \dot{v}'' - (\dot{N} u' + \dot{N} v' - \dot{m}_y) \dot{u}' - (\dot{N} v' + \dot{N} v' - \dot{m}_x) \dot{v}' - (\dot{M}_x u'' + \dot{M}_y v'' + \dot{M}_z \phi'' - \dot{m}_\phi) \dot{\phi} - \dot{\mathfrak{M}} \dot{\phi}' - (\dot{\mathfrak{M}} \phi' + \dot{\mathfrak{M}} \phi') + \dot{M}_z \dot{\phi}' \right\} dz + [\dot{R}_x \dot{u} + \dot{R}_y \dot{v} + \dot{R}_z \dot{w} + \dot{\mu}_y \dot{u}' + \dot{\mu}_x \dot{v}']_{z=0} + [\dot{R}_x \dot{u} + \dot{R}_y \dot{v} + \dot{R}_z \dot{w} + \dot{\mu}_y \dot{u}' + \dot{\mu}_x \dot{v}']_{z=l} \quad (25)$$

が得られる。上式を式(24)に代入したものが安定条件である。とくに式(21)が成立する場合を考えると座屈条件が得られる。
(1968年2月26日受理)

文 献

- 1) V. Z. Vlasov: Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations (1961).
- 2) 川井忠彦: 薄肉開断面材の弾性力学 (1)~(7), 生産研究 16(1)(2)(4)(6)(8), 17(5) (1964~1965).

東京大学生産技術研究所報告刊行予告

第 18 卷 第 5 号 丸安隆和・中村英夫・村井俊治著

解析写真測定の相互標定における検査基準についての基礎的考察

解析写真測量においては測定値として用いられるのは、写真像の写真上での平面座標のみである。被写体の空間位置の決定はこの写真座標をもとにして数学的な操作によって行なわれ、なんらの測定器械もその中間過程においては用いられない。そのためこの原測定量である写真座標の測定精度は最終的に得られる空間位置決定の精度に支配的な影響を与える。それゆえ、この写真座標測定には最大の注意が払われるが、それと同時にその測定値が許容しうる精度内にあるかどうかを可能なかぎり早い機会に検査し、もし許容し得ないものであるならばそれをとり除き、あるいは再び測定しなおすことが必要である。

本論文はこの目的のため、その精度を表わしうると考えられるいくつかの指標をもうけ、それを用いて計算過程において不良な測定値を見いだす方法を提案するものである。
(5月末日発行)