

解析写真測量における MULTIPLETS METHOD について

A Multiplets Method in the Analytical Photogrammetry

中村 英夫*・村井 俊治*

Hideo NAKAMURA and Shunji MURAI

写真測量においては、撮影されたときの写真の空間位置およびその傾きを知る必要がある。このように写真の撮影状態を決めることを標定と呼ぶが、この標定問題はいくつかの写真上に像を結ぶ光線は撮影時においては被写点において交わっていたという条件より解かれる。本文では、この解を求める最も一般的な方法として、多数の写真を用いて行なう Multiplets method を提案し、その考え方と解法を説明する。この Multiplets method は実用的にはいわゆるブロック調整などを可能にするため多くの利点をもつがこの点についても述べる。

は し が き

航空写真測量において写真の撮影時の状態を求める問題は、写真測量の主問題として多くの解法がこれまで提案され実用化されてきた。従来においては、この解は複雑な機械を用いてアナログ的に求められてきたが、最近では高速計算機の出現に応じて解析的に解くことも広く行なわれてきている。ただその場合、従来の機械による解法の影響や計算上の便宜のためその方法は2枚の写真よりモデルを形成し、これを一つの単位として全体をとり扱うというやり方を使用している。しかしながら、2枚の写真より一つのモデルをつかってこのモデルをつなぎあわせるという考え方よりも、すべての写真を同等にとり扱い、この全部の写真より全体を1モデルとして問題をとり扱う方がより一般性をもち、本質的な解法であると考えられる。また実用上もその方がより多くの利益をもたらすと期待される。

そのため、本稿ではこの解析的航空写真測量における問題を2枚の写真を1単位とする場合よりときおこし、これを3枚を1単位としたときに拡張し、さらに現在われわれが試みている多数枚の写真を用いる最も一般的な方法へと議論を進めて行くことにする。

1. 解析写真測量の原理

はじめに写真測量の原理を解析幾何学的な立場に立って説明しておく。

いま二つの写真がそのカメラの光軸を平行にして図1の O_1, O_2 の位置を投影中心として撮影されたとする。そのとき被写体の点 P は2枚の写真上のそれぞれ P_1, P_2 にうつる。二つの写真面上にそれぞれ図1に示すような写真座標系 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ をとり、また O_1O_2 に沿い X 軸を、 O_1 を通る光軸に沿い Z 軸をもつようなモデル座標系 (X, Y, Z) を考える。また O_1O_2 の距離を B 、投影中心から写真面に立てた垂線の長さ(主点距離)を f とする。

このとき P_1, P_2, P の座標はそれぞれ $P_1(x, y, f)$,

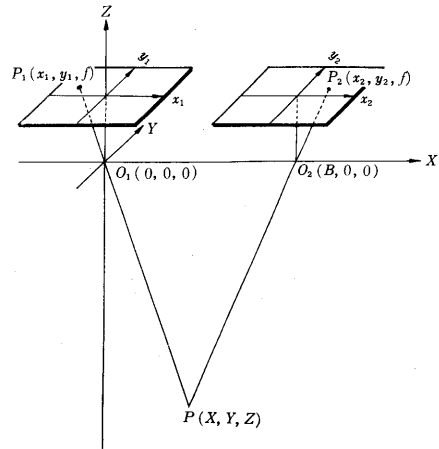


図 1

$P_2(B+x_2, y_2, f), P(X, Y, Z)$ と表わされるから光線 $\overline{PP_1}, \overline{PP_2}$ は

$$\frac{X}{x_1} = \frac{Y}{y_1} = \frac{Z}{f} \tag{1}$$

$$\frac{X-B}{x_2} = \frac{Y}{y_2} = \frac{Z}{f} \tag{2}$$

とかけ表わせる。

この二つの光線は点 P において交わっていたのであるから式(1)(2)を解いて、つぎのように点 P の座標を求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x_1}{x_1 - x_2} B \\ Y &= \frac{y_1}{x_1 - x_2} B = \frac{y_2}{x_1 - x_2} B \\ Z &= \frac{f}{x_1 - x_2} B \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

したがって写真測量によりある点の位置を求めるためには、求めたい点の2枚の写真上の像の写真座標 (x, y) を測定し、またカメラのレンズ中心間の距離 B を測っておけば式(3)より、その座標を決定することができるのである。

写真測量は原理的にはこのようにきわめて簡単なものであり、カメラを地上にすえた地上写真測量ではこれだ

* 東京大学生産技術研究所第5部

けの操作で測量を行なうことができる。

2. 写真の撮影時の状態の再現

しかしながら、航空機から撮影する航空写真測量では問題は複雑になる。すなわち

- (1) 航空機は傾いているため、写真面は図1に示すように水平ではない。
- (2) 撮影したときのカメラのレンズ中心の位置はわからない。
- (3) 撮影基線の長さ B はまえて測定しておくことができない。

という問題がある。この点を解決し、撮影時の写真の状態を決めて、はじめて写真上にうつる任意の点の位置を求めることができるのである。

撮影時の写真の状態は、その投影中心の位置 $O_1(X_{01}, Y_{01}, Z_{01})$, $O_2(X_{02}, Y_{02}, Z_{02})$ と写真面の傾き $(\omega_1, \varphi_1, \kappa_1)$, $(\omega_2, \varphi_2, \kappa_2)$ で表わすことができる。ここで $(\omega, \varphi, \kappa)$ は X 軸, Y 軸および Z 軸のまわりにそれぞれ ω, φ, κ なる量だけ順次回転するオイラー角である。このように諸要素を決めるとき、撮影時の写真の状態を求めるということはこの (X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}) , $(\omega_i, \varphi_i, \kappa_i)$ (ただし $i=1, 2$) を決定することになる。

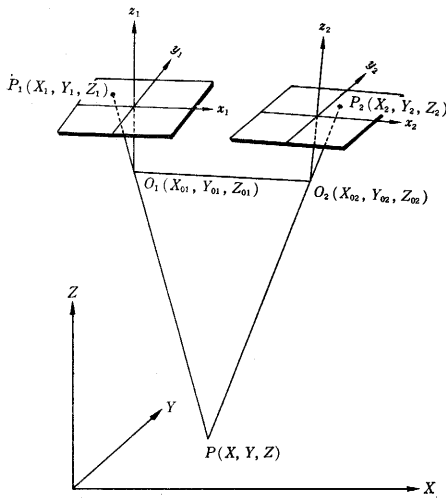


図2

P より出て写真1および2の上に像 P_1 および P_2 を結ぶ光線は図2の記号を用いるとき次のように表わされる。

$$\frac{X-X_{01}}{X_{01}-X_1} = \frac{Y-Y_{01}}{Y_{01}-Y_1} = \frac{Z-Z_{01}}{Z_{01}-Z_1} = k_1 \quad (4)$$

$$\frac{X-X_{02}}{X_{02}-X_2} = \frac{Y-Y_{02}}{Y_{02}-Y_2} = \frac{Z-Z_{02}}{Z_{02}-Z_2} = k_2 \quad (5)$$

撮影時の写真の状態を求めるためにわれわれが用いる条件としては、あらゆる二つの対応する光線は必ず交

わり、しかもこの交点のうちのいくつかは、すでに知られているその点の地上座標に一致しなければならない、という事実のみである。この条件に基づき、この問題を解くために従来一般に行なわれてきた方法のあらましを次に述べよう。

3. Dualplets method

従来の方では、写真の相対的な回転関係を決める相互標定とその絶対位置を決める絶対標定との二つの操作に分けて行なわれる。

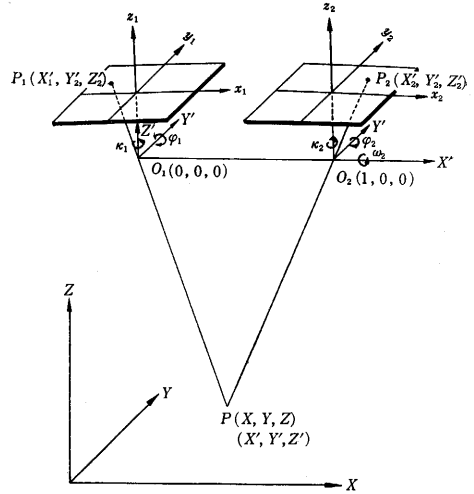


図3

1) 相互標定

相互標定においては図3に示すように写真1の投影中心 O_1 を原点とし、 X' 軸が O_1O_2 の方向に、 Z' 軸が写真1の主点を通るようにした直交座標系 $X'Y'Z'$ を考える。またその場合 O_1O_2 の距離を単位長さ1であると決めておく。このような座標系をモデル座標系と呼ぶことにする。このとき光線 P_1P , P_2P はそれぞれ

$$\frac{X'}{-X_1'} = \frac{Y'}{-Y_1'} = \frac{Z'}{-Z_1'} \quad (6)$$

$$\frac{X'-1}{1-X_2'} = \frac{Y'}{-Y_2'} = \frac{Z'}{-Z_2'} \quad (7)$$

と表わされる。撮影時においてはこれが P において交わっていたのであるから、この2光線が交点を有する条件として

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_1' & Y_1' & Z_1' \\ X_2' & Y_2' & Z_2' \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

が成立しなければならない。 P_1 および P_2 のモデル座標 (X_1', Y_1', Z_1') , (X_2', Y_2', Z_2') とこれらの点の写真座標 $p_1(x_1, y_1, f)$ および $p_2(x_2, y_2, f)$ との間には次の関係がある。すなわち x, y, z 座標系を x 軸, y 軸, z 軸のまわりに ω, φ, κ だけこの順序で回転させると、 X', Y', Z' 座標系に変換されるから

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ Z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_1 & \sin \kappa_1 & 0 \\ -\sin \kappa_1 & \cos \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & 0 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_1 & \sin \omega_1 \\ 0 & -\sin \omega_1 & \cos \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ f \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} X_2' - 1 \\ Y_2' \\ Z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_2 & \sin \kappa_2 & 0 \\ -\sin \kappa_2 & \cos \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_2 & \sin \omega_2 \\ 0 & -\sin \omega_2 & \cos \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ f \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる。ただし ω_1 は $X'Y'Z'$ 座標系の定義より明らかなごとく $\omega_1=0$ である。

(9), (10) 式を (8) 式に代入し

$$f(\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2) = \begin{vmatrix} Y_1' & Z_1' \\ Y_2' & Z_2' \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

が得られる。

ここで、 Y_1', Z_1', Y_2', Z_2' は (9), (10) 式より

$$Y_1' = -x_1 \cos \varphi_1 \sin \kappa_1 + y_1 \cos \kappa_1 + f \sin \varphi_1 \sin \kappa_1$$

$$Z_1' = x_1 \sin \varphi_1 + f \cos \varphi_1$$

$$Y_2' = -x_2 \cos \varphi_2 \sin \kappa_2 + y_2 (\cos \kappa_2 \cos \omega_2 - \sin \omega_2 \sin \varphi_2 \sin \kappa_2)$$

$$+ f (\sin \omega_2 \cos \kappa_2 + \cos \omega_2 \sin \varphi_2 \sin \kappa_2)$$

$$Z_2' = x_2 \sin \varphi_2 - y_2 \sin \omega_2 \cos \varphi_2 + f \cos \omega_2 \cos \varphi_2$$

である。

この (11) 式において五つの点の写真 1 および写真 2 上にうつる像の写真座標 $p_{1j}(x_{1j}, y_{1j}, f), p_{2j}(x_{2j}, y_{2j}, f)$ を用いることにより連立方程式

$$f_j(\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2; x_{1j}, y_{1j}, x_{2j}, y_{2j}) = 0 \quad (12)$$

ただし、 $j=1, 2, \dots, 5$

の解として相互標定のパラメータ $\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ を求めることができる。

実際上の操作としては、写真座標を 5 点以上の点について測定し、最小自乗法によりパラメータを決定する。

このようにして、相互標定のパラメータが求められると、その写真座標がそれぞれの写真上で $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2)$ と測定される点 p_1, p_2 はモデル座標系で (9) および (10) 式の $P_1(X_1', Y_1', Z_1'), P_2(X_2', Y_2', Z_2')$ *

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \cos K & \sin K & 0 \\ -\sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Phi & 0 & -\sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & \sin \Omega \\ 0 & -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

絶対標定の七つのパラメータは地上座標の知れた点が 3 点、たとえば (X, Y, Z) が既知の点 2 点と Z 既知の点 1 点があれば (16) 式を解くことにより、決定することができる。

以上のようにして、写真の撮影時の状態を示すパラメータが求まれば、2 枚の写真上に $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2)$ とそれぞれ撮っている点の地上座標 $P(X, Y, Z)$ は式 (9)(10)(13)(14)(15) および (16) により計算することができる。

3) 接続標定

航空写真は実際上は 1 節に述べたように 2 枚だけ撮影されることはまずなく、数枚が連続して撮影される。このとき、おのおの 2 枚ずつの写真からつくられるモデ**

*とそれぞれ表わされ得る。したがってこの二つの点 P_1 および P_2 より出た光が交わる点として得られる点 P の立体座標は式 (6) および (7) を解いて

$$X' = \frac{\frac{X_1'}{Z_1'}}{\frac{X_1'}{Z_1'} - \frac{X_2'}{Z_2'} + \frac{1}{Z_2'}} \quad (13)$$

$$Y' = \frac{\frac{Y_1'}{Z_1'}}{\frac{X_1'}{Z_1'} - \frac{X_2'}{Z_2'} + \frac{1}{Z_2'}} \quad (14)$$

$$Z' = \frac{1}{\frac{X_1'}{Z_1'} - \frac{X_2'}{Z_2'} + \frac{1}{Z_2'}} \quad (15)$$

と求められる。

2) 絶対標定

絶対標定は相互標定できめられたモデル座標系と地上の座標系との関係を求めることである。そのためには相互標定で上記のようにして求められた点 $P(X', Y', Z')$ がすでに知られているその点の地上座標 $P(X, Y, Z)$ と対応するように、このモデル座標系に縮尺と回転および平行移動を与え、地上座標系に変換すればよい。したがって、その座標変換のパラメータは縮尺 S, X', Y', Z' 軸のまわりの順次回転角 Ω, Φ, K および投影中心 O_1 の XYZ 座標系での値 (X_0, Y_0, Z_0) であって、このパラメータを用いるとき、点 P において次の関係が成立する。

** l は連続的につなぎ合わされねばならない。この操作をわれわれは接続標定と呼ぶ。接続標定は解析幾何学的に考えれば、相互標定に際して各 2 枚の写真ごとに独立して定義されたモデル座標系をさらに共通した一つのモデル座標系で統一することである。

第 2 写真は第 1 モデルの相互標定に際して $\omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ だけ第 1 モデル座標系に関して回転しており、これはまた第 2 モデルの相互標定 (これは第 1 モデルの場合とまったく同じ操作により行なわれる) に際して φ_1^2, κ_1^2 だけ第 2 モデル座標系のまわりに回転しているのであるから、第 1, 第 2 モデルに共通に含まれる点 P が第 1 モデルでは (X^1, Y^1, Z^1) と第 2 モデルでは (X^2, Y^2, Z^2) と得られていたとすると、この二つの座標系の間には次の

関係を認めることができる。

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ Z^1 \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} \cos \kappa_2^1 & \sin \kappa_2^1 & 0 \\ -\sin \kappa_2^1 & \cos \kappa_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2^1 & 0 & -\sin \varphi_2^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2^1 & 0 & \cos \varphi_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_2^1 & \sin \omega_2^1 \\ 0 & -\sin \omega_2^1 & \cos \omega_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1^2 & 0 & \sin \varphi_1^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_1^2 & 0 & \cos \varphi_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \kappa_1^2 & -\sin \kappa_1^2 & 0 \\ \sin \kappa_1^2 & \cos \kappa_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2 \\ Y^2 \\ Z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

ここで B_2 は $\overline{O_1O_2} = B = 1$ としたときの $\overline{O_2O_3}$ の値を示す。

二つのモデルに共通に含まれる点より (17) 式を用いて B_2 を決めれば第 2 モデルのすべての点は第 1 モデル系で統一して表わされる。第 3, 第 4 ……モデルについてもまったく同じ操作を重ねていけばよい。

このように従来の方法では隣りあう 2 枚ずつの写真からそれぞれ独立にモデルをつくり、すなわち相互標定し、さらにこのモデルを連続的につなぐ接続標定をし、最後にこの一つの長いモデルを絶対標定して地上と写真との関係を決定するのである。このように 2 枚の写真より一つのモデルを組み立て、これを単位として次々とモデルをつないでいく方法を Dualplets method と呼ぶことにする。

4. Triplets method

解析写真測量における原測定である写真座標の測定に際しては、なんらかの原因により誤差が加わる。この誤差のために撮影時には当然交わっていた光線が、写真の撮影時の状態を再現する標定の後にはもはや交わらなくなる。2 本の光線が交わるという条件のもとでモデルをつくる Dualplets method ではこの光線のずれのうち y 方向のずれのみの検出ができる。それゆえ (11) 式より解を求めるに際してはこの y 方向のずれ、すなわち残存縦視差を最小にするようにして標定パラメータを決定している。

ところが、いま 3 枚の写真に撮っているような被写体の 1 点をとって考える。すなわち 3 本の光線が交わるという形でこの標定の問題をとらえると、三つの光線の x 方向のずれの検出もできる。したがってこの場合標定パラメータは残存縦視差および残存横視差 (x 方向でのずれ、これは二つのモデルの間の高さのずれとして表われる。)の双方を最小にするという形で求めることができる。このように y 視差だけでなく x 視差も考慮に入れてモデルをつくれれば、写真座標誤差に基づくモデルのひずみは二つの光線の y 視差だけを考慮して標定をする場合よりは、当然、より小さくなると考えられる。このように 3 枚の写真よりモデルをつくり、これを一単位とする方法は Triplets method

と呼ばれる。

この方法は次のようにして行なわれる。

図 4 に示すようなモデル座標系 X, Y, Z を考え、写真 2 の投影中心を $O_2(B_1, 0, 0)$ 、写真 3 の投影中心を $O_3(B_1+B_{X2}, B_{Y2}, B_{Z2})$ とする。そのとき点 $P(X, Y, Z)$ が 3 枚の写真上のそれぞれ $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 、 $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 、 $P_3(X_3, Y_3, Z_3)$ に撮っているとす。

光線①および②は交わらなければならないから

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

また光線②と③が交わるためには

$$\begin{vmatrix} B_1 & 0 & 0 & 1 \\ B_1+B_{X2} & B_{Y2} & B_{Z2} & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

が成り立たなければならない。

この光線①②の交点 P_A と光線②③の交点 P_B とは一致しなければならないが、この条件は次のようにして書き表わすことができる。

ベクトル $\overline{O_1P_1}$ 、 $\overline{O_2P_2}$ 、 $\overline{O_3P_3}$ をそれぞれ $A_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ 、 $A_2 = \begin{pmatrix} X_2 - B_1 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ 、 $A_3 = \begin{pmatrix} X_3 - B_{X2} - B_1 \\ Y_3 - B_{Y2} \\ Z_3 - B_{Z2} \end{pmatrix}$ とし、 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ を $B_1 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $B_2 = \begin{pmatrix} B_{X2} \\ B_{Y2} \\ B_{Z2} \end{pmatrix}$ とする。また図 4 に見られる

ように光線①②を結ぶ最短のベクトルを D_1 、②③を結

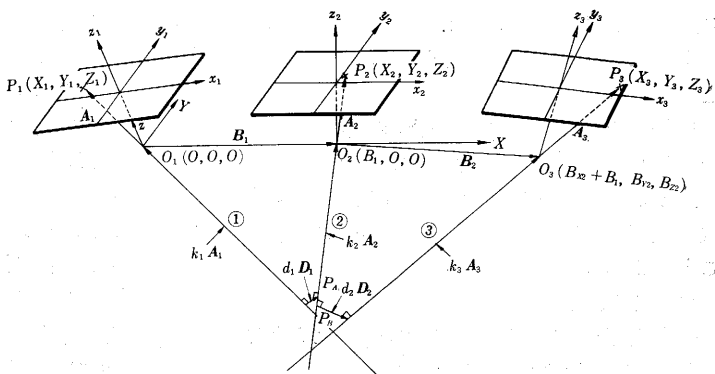


図 4

ぶそれを D_2 とする。このとき図 4 より明らかな如く

$$-k_1 A_1 + d_1 D_1 + k_2 A_2 = B_1 \quad (20)$$

$$-k_2' A_2 + d_2 D_2 + k_3 A_3 = B_2 \quad (21)$$

が成立し、しかも D_1, D_2 はそれぞれ光線 $k_1 A_1, k_2 A_2$ および $k_2 A_2, k_3 A_3$ と直交するから

$$D_1 = A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 \\ X_2 Z_1 - Z_1 B - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - X_2 Y_1 + Y_1 B \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$D_2 = A_2 \times A_3 = \begin{pmatrix} Y_2 Z_3 - Y_2 B_{22} - Z_2 Y_3 + Z_2 B_{Y2} \\ Z_2 X_3 - Z_2 B_{X2} - Z_2 B_1 - X_2 Z_3 + X_2 B_{Z2} + B_{Z3} - B B_{Z2} \\ X_2 Y_3 - X_2 B_{Y2} - Y_3 B_1 + B B_{Y2} - Y_2 X_3 + Y_2 B_{X2} + Y_2 B_1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

である。ここで $k_1, k_2, k_2', k_3, d_1, d_2$ はスカラー量*

$$k_2' = \frac{\begin{vmatrix} B_{X2} & Y_2 Z_3 - Y_2 B_{22} - Y_3 Z_2 + Z_2 B_{Y2} & X_3 - B_{X2} \\ B_{Y2} & X_3 Z_2 - Z_2 B_{X2} - X_2 Z_3 + X_2 B_{Z2} + B_1 Z_3 - B_1 B_{Z2} & Y_3 - B_{Y2} \\ B_{Z2} & X_2 Y_3 - X_2 B_{Y2} - Y_3 B_1 + B_1 B_{Y2} - X_3 Y_2 + Y_2 B_{X2} & Z_3 - B_{Z2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -X_2 + B_1 & Y_2 Z_3 - Y_2 B_{22} - Y_3 Z_2 + Z_2 B_{Y2} & X_3 - B_{X2} - B_1 \\ -Y_2 & Z_2 X_3 - Z_2 B_{X2} - Z_2 B_1 - X_2 Z_3 + X_2 B_{Z2} + B Z_3 - B_1 B_{Z2} & Y_3 - B_{Y2} \\ -Z_2 & X_2 Y_3 - X_2 B_{Y2} - Y_3 B_1 + B B_{Y2} - Y_2 X_3 + Y_2 B_{X2} + Y_2 B_1 & Z_3 - B_{Z2} \end{vmatrix}} \quad (26)$$

であるから (24) 式にこれを代入して点 P_A と P_B が一致するための条件式が得られる。

像 P_1, P_2, P_3 はそれぞれの写真上の写真座標系で

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_2 & \sin \kappa_2 & 0 \\ -\sin \kappa_2 & \cos \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_3 & \sin \kappa_3 & 0 \\ -\sin \kappa_3 & \cos \kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & 0 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_3 & 0 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{X2} + B_1 \\ B_{Y2} \\ B_{Z2} \end{pmatrix} \quad (29)$$

と表わされるから、これらを三つの条件式 (18), (19) および (24) 式に代入し $(\varphi_1, \kappa_1), (\omega_2, \varphi_2, \kappa_2), (\omega_3, \varphi_3, \kappa_3), B_{X2}, B_{Y2}, B_{Z2}$ の 11 個のパラメータを求めることができる。

この場合残存縦視差は

$$P_{y1} = d_1 (X_2 Z_1 - Z_1 B - X_1 Z_2) \\ P_{y2} = d_2 (Z_2 X_3 - Z_2 B_{X2} - Z_2 B_1 - X_2 Z_3 + X_2 B_{Z2} + B_1 Z_3 - B B_{Z2})$$

また残存横視差は

$$P_{x1} = d_1 (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) \\ P_{x2} = d_2 (Y_2 Z_3 - Y_2 B_{22} - Z_2 Y_3 + Z_2 B_{Y2})$$

として得られる。

このように三つの写真を用いれば縦視差だけでなく横視差も考えに入れてモデルを形成することができる。

この第 1 モデルについて、第 2, 第 3, 第 4 の写真より第 2 モデルをつくる。この場合未知パラメータとしては $(\kappa_4, \varphi_4, \omega_4), (B_{X3}, B_{Y3}, B_{Z3})$ の六つと $(\kappa_2, \varphi_2, \omega_2), (\kappa_3, \varphi_3, \omega_3)$ のうちのいずれか五つとの計 11 個となる。あるいは第 3, 第 4, 第 5 の写真より新たに第 2 モデル

*である。

交点 P_A と P_B が一致しなければならないのであるから、(20), (21) 式において

$$k_2 A_2 = k_2' A_2$$

すなわち

$$k_2 = k_2' \quad (24)$$

(20), (21), (22), (23) 式よりこの k_2, k_2' は

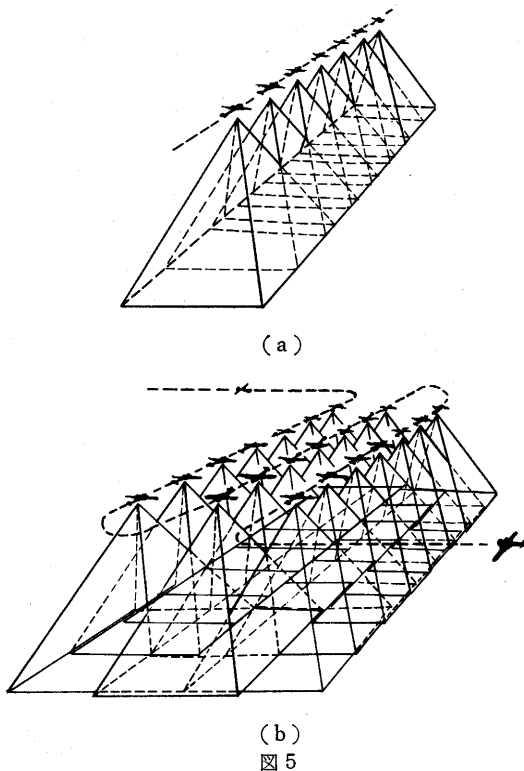
$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} -X_1 & Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 & B_1 \\ -Y_1 & X_2 Z_1 - Z_1 B - X_1 Z_2 & 0 \\ -Z_1 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 + Y_1 B & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -X_1 & Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 & X_2 - B_1 \\ -Y_1 & X_2 Z_1 - Z_1 B - X_1 Z_2 & Y_2 \\ -Z_1 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 + Y_1 B & Z_2 \end{vmatrix}} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_1 & \sin \kappa_1 & 0 \\ -\sin \kappa_1 & \cos \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & 0 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ f \end{pmatrix} \quad (27)$$

をつくりこのモデルと第 1 モデルを、第 1, 第 2 の両方のモデルに共通に含まれる点を用いて 3 節に述べたと同様にして接続標定することももちろん可能である。この接続標定では B_{X3}, B_{Y3}, B_{Z3} を求めなければならない。

5. Multiplets method

この前の節では、三つの写真より標定して一つのモデルをつくるのが可能であることを示したが、3 節の duplets のときはもちろん、この triplets method もたとえば図 5 (a) に示されるように一つのコースに沿って撮影された隣り合う写真を対象にしてしか考えていない。道路、鉄道などの計画のために撮影する場合はこのように撮影は一つのコースに沿ったストリップのみであることが多いが、広い区域にわたる測量を行なう場合はこれを何コースかに分けて、図 5 (b) に示されるような撮影がなされる。このような場合には撮影コースに沿って相隣る写真だけについて標定するのではなく、隣りのコースの写真をも含めて取り扱って標定する必要がある。このような時には次に述べるように多数の写真を同時に扱



(b)
図 5

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_i & \sin \kappa_i & 0 \\ -\sin \kappa_i & \cos \kappa_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & 0 & -\sin \varphi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_i & 0 & \cos \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{0i} \\ Y_{0i} \\ Z_{0i} \end{pmatrix} \quad (30)$$

なる関係をもっているものとする。われわれの問題は写真 1, 2, ……n の投影中心 $O_1(X_{01}, Y_{01}, Z_{01}), O_2(X_{02}, Y_{02}, Z_{02}), \dots, O_n(X_{0n}, Y_{0n}, Z_{0n})$ と写真の回転 $(\omega_1, \varphi_1, \kappa_1), (\omega_2, \varphi_2, \kappa_2) \dots (\omega_n, \varphi_n, \kappa_n)$ を求めることにある。

撮影時には、この n 本の光線 $k_1A_1, k_2A_2, \dots, k_nA_n$ は点 P で交わっていたのであるが、撮影後この状態を再現する場合、種々の誤差のため、これらの光線は

$$L_i^2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_m - Y_{0i} & Z_m - Z_{0i} \\ Y_i - Y_{0i} & Z_i - Z_{0i} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_m - X_{0i} & Z_m - Z_{0i} \\ X_i - X_{0i} & Z_i - Z_{0i} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_m - X_{0i} & Y_m - Y_{0i} \\ X_i - X_{0i} & Y_i - Y_{0i} \end{vmatrix}^2}{(X_i - X_{0i})^2 + (Y_i - Y_{0i})^2 + (Z_i - Z_{0i})^2} \quad (32)$$

すべての光線からの距離の 2 乗和が最小になる、すなわち $\sum_{i=1}^n L_i^2$ を最小にする点としての P_m が被写体 P の最確値であると考えられるから第 i 写真の標定パラメー

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\begin{vmatrix} Y_{mj} - Y_{0i} & Z_{mj} - Z_{0i} \\ Y_{ij} - Y_{0i} & Z_{ij} - Z_{0i} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_{mj} - X_{0i} & Z_{mj} - Z_{0i} \\ X_{ij} - X_{0i} & Z_{ij} - Z_{0i} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_{mj} - X_{0i} & Y_{mj} - Y_{0i} \\ X_{ij} - X_{0i} & Y_{ij} - Y_{0i} \end{vmatrix}^2}{(X_{ij} - X_{0i})^2 + (Y_{ij} - Y_{0i})^2 + (Z_{ij} - Z_{0i})^2} \quad (33)$$

を最小とするものとして求められる。

それゆえ正規方程式は

$$\frac{\partial S}{\partial X_{mj}} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial Y_{mj}} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial Z_{mj}} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial S}{\partial X_{0i}} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial Y_{0i}} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial Z_{0i}} = 0 \quad (35)$$

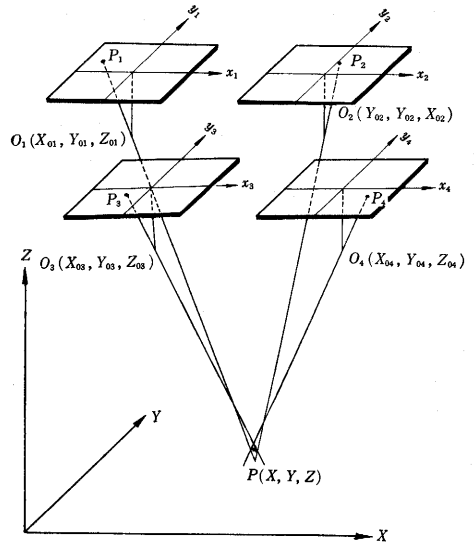


図 6

って標定する Multiplets method を考えねばならない。

図 6 において地上の被写体 $P(X, Y, Z)$ は全部で N 枚ある写真の中の n 枚の写真 1, 2, ……n 上の $P_1(X_1, Y_1, Z_1), P_2(X_2, Y_2, Z_2) \dots P_n(X_n, Y_n, Z_n)$ に像を結んだとする。ここで $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ は各写真上の座標系では $p_i(x_i, y_i, f)$ と表わされており

正しく P で交わりはしない。

そこで任意の点 $P_m(X_m, Y_m, Z_m)$ から光線 k_iA_i に至る距離を求める。すなわち光線 k_iA_i

$$\frac{X - X_{0i}}{X_{0i} - X_i} = \frac{Y - Y_{0i}}{Y_{0i} - Y_i} = \frac{Z - Z_{0i}}{Z_{0i} - Z_i} = k_i \quad (31)$$

へ至る P_m からの距離 L_i は、(32)式のようにかきあわせる。

た $(X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}), (\omega_i, \varphi_i, \kappa_i)$, (ただし $i=1, 2, \dots, n$) はこの $\sum_{i=1}^n L_i^2$ のすべてのパスポイント $P_j(X_{mj}, Y_{mj}, Z_{mj})$ (ただし $j=1, 2, \dots, q$) に関する総和すなわち

$$\frac{\partial S}{\partial \kappa_i} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial \omega_i} = 0 \quad (36)$$

となる。このうち (34) 式はつぎのような線形式で表わされる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (37)$$

ここで

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Y_{ij} - Y_{0i})^2 + (Z_{ij} - Z_{0i})^2 \}$$

$$a_{12} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (X_{ij} - X_{0i})(Y_{ij} - Y_{0i}) \}$$

$$a_{13} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Z_{ij} - Z_{0i})(X_{ij} - X_{0i}) \}$$

$$a_{21} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (X_{ij} - X_{0i})(Y_{ij} - Y_{0i}) \}$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Z_{ij} - Z_{0i})^2 + (X_{ij} - X_{0i})^2 \}$$

$$a_{23} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Y_{ij} - Y_{0i})(Z_{ij} - Z_{0i}) \}$$

$$a_{31} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Z_{ij} - Z_{0i})(X_{ij} - X_{0i}) \}$$

$$a_{32} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Y_{ij} - Y_{0i})(Z_{ij} - Z_{0i}) \}$$

$$a_{33} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (X_{ij} - X_{0i})^2 + (Y_{ij} - Y_{0i})^2 \}$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Z_{ij} - Z_{0i})(X_{0i}Z_{ij} - X_{ij}Z_{0i}) + (Y_{ij} - Y_{0i})(X_{0i}Y_{ij} - X_{ij}Y_{0i}) \}$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (X_{ij} - X_{0i})(Y_{0i}X_{ij} - Y_{ij}X_{0i}) + (Z_{ij} - Z_{0i})(Y_{0i}Z_{ij} - Y_{ij}Z_{0i}) \}$$

$$b_3 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \{ (Y_{ij} - Y_{0i})(Z_{0i}Y_{ij} - Z_{ij}Y_{0i}) + (X_{ij} - X_{0i})(Z_{0i}X_{ij} - Z_{ij}X_{0i}) \}$$

$$T_{ij} = (X_{ij} - X_{0i})^2 + (Y_{ij} - Y_{0i})^2 + (Z_{ij} - Z_{0i})^2$$

これより標定要素 $(\omega_i, \varphi_i, \kappa_i)$, (X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}) の X_m, Y_m, Z_m への影響

$$\frac{\partial X_{mj}}{\partial \kappa_i}, \frac{\partial X_{mj}}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial X_{mj}}{\partial \omega_i}, \frac{\partial X_{mj}}{\partial X_{0i}}, \frac{\partial X_{mj}}{\partial Y_{0i}}, \frac{\partial X_{mj}}{\partial Z_{0i}},$$

$$\frac{\partial Y_{mj}}{\partial \kappa_i}, \frac{\partial Y_{mj}}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial Y_{mj}}{\partial \omega_i}, \frac{\partial Y_{mj}}{\partial X_{0i}}, \frac{\partial Y_{mj}}{\partial Y_{0i}}, \frac{\partial Y_{mj}}{\partial Z_{0i}},$$

$$\frac{\partial Z_{mj}}{\partial \kappa_i}, \frac{\partial Z_{mj}}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial Z_{mj}}{\partial \omega_i}, \frac{\partial Z_{mj}}{\partial X_{0i}}, \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Y_{0i}}, \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Z_{0i}},$$

は計算できる。

それゆえ正規方程式 (34)(35) および (36) の解は

$$\frac{\partial S}{\partial X_{0i}} = \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{\partial S}{\partial X_{mj}} \frac{\partial X_{mj}}{\partial X_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Y_{mj}} \frac{\partial Y_{mj}}{\partial X_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Z_{mj}} \frac{\partial Z_{mj}}{\partial X_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial X_{ij}} \frac{\partial X_{ij}}{\partial X_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Y_{ij}} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial X_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Z_{ij}} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial X_{0i}} \right\} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_{0i}} = \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{\partial S}{\partial X_{mj}} \frac{\partial X_{mj}}{\partial Y_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Y_{mj}} \frac{\partial Y_{mj}}{\partial Y_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Z_{mj}} \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Y_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial X_{ij}} \frac{\partial X_{ij}}{\partial Y_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Y_{ij}} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial Y_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Z_{ij}} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial Y_{0i}} \right\} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Z_{0i}} = \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{\partial S}{\partial X_{mj}} \frac{\partial X_{mj}}{\partial Z_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Y_{mj}} \frac{\partial Y_{mj}}{\partial Z_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Z_{mj}} \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Z_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial X_{ij}} \frac{\partial X_{ij}}{\partial Z_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Y_{ij}} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial Z_{0i}} + \frac{\partial S}{\partial Z_{ij}} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial Z_{0i}} \right\} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{\partial S}{\partial X_{mj}} \frac{\partial X_{mj}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial S}{\partial Y_{mj}} \frac{\partial Y_{mj}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial S}{\partial Z_{mj}} \frac{\partial Z_{mj}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial S}{\partial X_{ij}} \frac{\partial X_{ij}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial S}{\partial Y_{ij}} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial S}{\partial Z_{ij}} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \omega_i} \right\} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{\partial S}{\partial X_{mj}} \frac{\partial X_{mj}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial S}{\partial Y_{mj}} \frac{\partial Y_{mj}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial S}{\partial Z_{mj}} \frac{\partial Z_{mj}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial S}{\partial X_{ij}} \frac{\partial X_{ij}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial S}{\partial Y_{ij}} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial S}{\partial Z_{ij}} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \varphi_i} \right\} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \kappa_i} = \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{\partial S}{\partial X_{mj}} \frac{\partial X_{mj}}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial S}{\partial Y_{mj}} \frac{\partial Y_{mj}}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial S}{\partial Z_{mj}} \frac{\partial Z_{mj}}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial S}{\partial X_{ij}} \frac{\partial X_{ij}}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial S}{\partial Y_{ij}} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial S}{\partial Z_{ij}} \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \kappa_i} \right\} = 0 \quad (43)$$

なる連立方程式の解に帰することができる。

このようにするとき、一枚の写真につき (X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}) , $(\omega_i, \varphi_i, \kappa_i)$ の六つの独立変数をもつから、 n 枚の写真より成るモデルにおいては $6n$ 元の連立方程式を形成する。

ここで注意すべきは点 $P_m(X_m, Y_m, Z_m)$ であって、写真座標 (x, y, f) のみ知れている点ではこれは未知であるが、地上基準点では (X_m, Y_m, Z_m) は既知の量として取り扱われる。この地上基準点は全体のモデル内に、 (X, Y) が与えられている点 2 点と Z が与えられている点、3 点を最小限必要とすることは他の方法による場合と同様である。しかしながら strip としての取り扱いをする dualplets や triplets 法では各 strip ごとにこれだけの地上基準点を必要とするのに対して、この multi-plets method では撮影が何コースにも分けて行なわれていようと、全体のモデルの中にこれだけの地上基準点が含まれていればよい。したがって全区域の中に必要な地上基準点の数はかなり減らすことができる。これが multi-plets method の最大の意義である。もちろん実用上は、地上基準点の数はもっと多くとり、しかもモデルのひずみを小ならしめるように適切に配置されねばならない。

5. Multi-plets method の実用

上に述べたように multi-plets method は広い区域にわたって何コースもの撮影がなされている場合、地上基準点を多数配置することなく、しかも各コース間のつながりを確実にしてモデルを形成することを可能にする。すなわち block 調整を可能にするのである。このように、多数の写真をその撮影のされ方には関係なく標定できるという利点は、何も block 調整の問題のみでなくたとえば図 7 に示されるように、道路などの計画に用いる場合に通常起こるような撮影コースがある長さごとに分割さ

れている場合では、撮影コース間のモデルの接続を確実にしなければならないが、このようなときにも **multiplets method** では撮影コースが分けられているのになに無関係に、全コースにわたって一つのモデルをつくることのできるため、コースの異なることによって生ずるモデル間のくい違いをなくすることができる。

また図8に示すような地域を測量したいときで、しかも図8に示されているようなコースに沿って撮影された写真がすでにある場合、strip ごとにモデルをつくる方法ではすべての写真を用いて標定する必要があるが、**multiplets method** では撮影コースに関係なく、測量を必要とする区域のうつつている写真（図のハッチをされた写真）だけを用いてモデルをつくることのできる。このようなケースは実作業上しばしば起こるから、この点においても **multiplets method** の効果は大きいと考えられる。

このように多くの利益をもたらし得る **multiplets method** もこれを実用に供する場合二、三の問題を含んでいる。これを列挙すると、

- 1) 大型電子計算機を必要とすること。

さきに述べたように n 枚の写真より成るモデルを標定するためには未知数 $6n$ の非線形の連立方程式を解かねばならない。たとえば1コース 15枚より成るコースが 10 ある場合未知数は 900 となる。しかも非線形方程式を線形化して、くり返し計算により解を求めるため、この大きな連立方程式を数回解く必要があり、計算機の容量はもとよりその計算費用はかなりの額に達する。したがって実際にこの方法を用いるに際しては、地上基準点の数を減少することによりもたらされる利益との勘定の上でなされねばならないのは当然である。

- 2) 測定に誤りがあったときその影響する度合いが大きいこと。

一つの点の写真座標測定に大きな誤差があっても、それは全体のモデルに影響を及ぼす。その大きな誤差は計算結果を調べて、その残差から発見できる場合もあるが、その場合、その大きな誤差をもつ測定をやり直し、再びすべての計算を行なうことは、計算に要する費用よりみて現実には不可能である。

それゆえ、実用に際してはまずはじめに **dualplets**

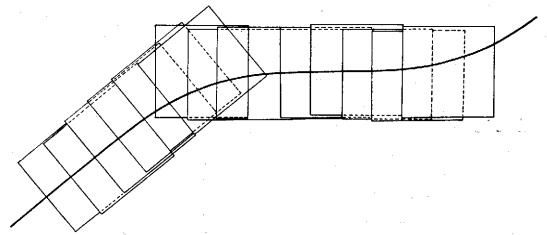


図 7

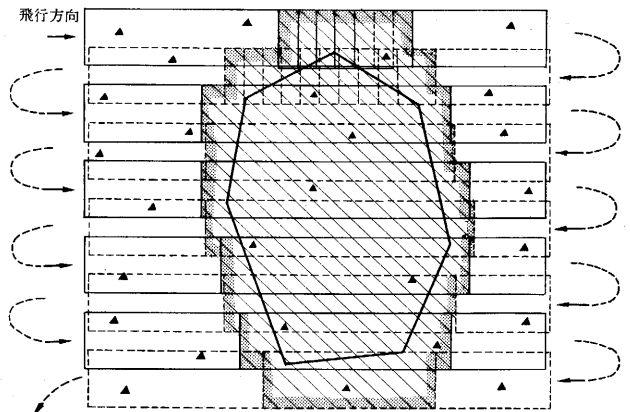


図 8

method あるいは **triplets method** を用いてこのような大きな誤差をもつ測定を検出し、この段階で測定をやり直して、**multiplets method** による標定計算にかかることが不可欠である。このように前もってより簡単な方法で標定パラメータやモデル座標の近似値を求めておくことは、**Multiplets method** における逐次近似のくり返し計算を安定させ、回数を少なくさせる点からも必要であると考えられる。

おわりに

現在われわれは以上述べてきた **multiplets method** を実験中であり、その場合に必要とする地上基準点の数やその適切な配置などを見いだそうとしている。この点については、得られた精度や計算に要する時間などとともに次の機会に明らかにできうものと考えている。

(1968年2月3日受理)

