

エネルギー法とマトリックス法の併用による複雑な 弾性平板の座屈問題解析の一手法について

On the Method of Application of Energy Principles to the Complicated Elastic Plates Buckling Problems using the Finite Element Method

川 井 忠 彦・大 坪 英 臣

Tadahiko KAWAI and Hideomi OHTSUBO

は し が き

近年電子計算機の大型化，高速化に伴い，有限要素法と呼ばれる新しい構造解析法が出現し，構造工学の進歩に計り知れない貢献をしている．特に平面応力場の解析に関してはほとんど決定的な手法と見なされる段階に到達している．しかしながら平板の曲げ問題の解析にはまだ十分でなく種々の議論がなされている状態で，座屈問題も一貫した方法で取り扱えないのが現状である．筆者らはこの点を考慮して平面応力場の有限要素法により応力分布を求め，これを利用してエネルギー法で座屈問題を解析した．これにより任意凸多角形の任意境界条件における平板の座屈値が得られることがわかった．

計算にあたっては従来多大の労力を要したエネルギー項に関する二重積分を境界線に沿った線積分に変換を行ない，種々の問題を電子計算機により統一的に求めることにした．解析例として，中央に円孔を有する正方形板を圧縮する場合の座屈荷重を求めてみたので報告する次第である．

原 理

平板の面内に作用する外力がある限界値に到達して，板に微小座屈たわみが生じた状態を考えると，この平衡状態は次式で与えられる板のポテンシャルエネルギー Π の極値条件： $\delta\Pi=0$ で与えられる．

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} \right] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} t \cdot p \left\{ \sigma_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

ここで w は板のたわみ， t は板厚， D は板の曲げ剛性， ν はポアソン比を表わし，また $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ は基準の面内荷重が加わったときの平板内における応力分布である．

さて，たわみ w を (2) 式のように有限項の x, y のべき関数で表わすとする．

$$w = \sum a_i f_i(x, y), \quad f_i(x, y) = \varphi(x, y) x^m y^n \quad (2)$$

$\varphi(x, y)$ は曲げの幾何学的境界条件を満たす関数である．

Π の a_i に関する変分をとり， a_i の有意の解を得るために次式が得られ， p が求まる．

$$\begin{vmatrix} S_{11} + pW_{11} & S_{12} + pW_{12} & \cdots & S_{1n} + pW_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} + pW_{n1} & S_{n2} + pW_{n2} & \cdots & S_{nn} + pW_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

ここで S_{ij}, W_{ij} は

$$\begin{aligned} S_{ij} = & D \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} \right) + \nu \left\{ \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} \right) \right\} \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} W_{ij} = & \iint_{\Omega} t \left\{ \sigma_x^0 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} \right) + \sigma_y^0 \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f_j}{\partial y} \right) + \tau_{xy}^0 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f_j}{\partial y} \right) + \tau_{xy}^0 \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} \right) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

上記の理論は周知のことで別に目新しいことではないが筆者らは実際の計算の面でいくつかの新しい試みを行なった．

W_{ij} を求めるに必要な応力分布 ($\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$) は，従来の研究ではその解析が困難なためになんかなり不正確な値をもちいていたが，有限要素法を採用すると板の形状や境界条件に関係なく，工学的に十分精度の高い応力分布をもとめることができる．ここでは三角形要素に分割することにする．このとき各三角形要素内では応力分布は一定となる解が得られる．したがって W_{ij} を求めるには積分領域を応力解析に用いられた要素に分割し，各要素内で積分を実行して，各要素ごとの積分値の総和を求めればよい．しかし二重積分をそのまま実行することは容易でなくエネルギー法による計算の大きな難関になっていたのである．この難点を克服するために以下に述べるような Gauss の定理を用いて二重積分を線積分に変換する手法を開発した．これにより形，座標の変化する各要素領域の積分が統一的にあつかうことができるようになった．

二重積分の線積分への変換

平板内の応力分布が x, y のべき級数として表わされると仮定すれば，たわみ $w(x, y)$ もべき級数表示をしているのでつぎの積分がもとめられればよい．

$$I_{mn} = \iint_{\Omega} x^m y^n dx dy \quad (6)$$

ここで Gauss の公式

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_c F(x, y) \cos(n, x) ds \quad (7)$$

において

$$F(x, y) = \int x^m y^n dx = \frac{x^{m+1} y^n}{m+1} \quad (8)$$

とすれば

$$I_{mn} = \iint_D x^m y^n dx dy = \frac{1}{m+1} \oint_C x^{m+1} y^n \cos(n, x) ds \quad (9)$$

が得られる。

議論を簡単にするため単一連結領域の場合について考察することにし、切線 s と x 軸のなす角 (s, x) を θ とすれば、

$$I_{mn} = \frac{1}{m+1} \oint_C x^{m+1} y^n \tan \theta dx \quad (10)$$

となる。

ここで境曲線界を有限個の折線で近似すれば、

$$I_{mn} \doteq \frac{1}{m+1} \sum_i \int_{x_{i-1}(\Gamma_i)}^{x_i} x^{m+1} y^n \tan \theta_i dx \quad (11)$$

Γ_i は線素を表わす。

以上の式を二項定理を使用して書きなおすと一般につきのようになる。

$$I_{mn} \doteq \sum_i \sum_{r=0}^n n C_r \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^{n+1-r} \left\{ y_{i-1} - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) x_{i-1} \right\}^r \left(\frac{x_i^{m+n+2-r} - x_{i-1}^{m+n+2-r}}{m+n+2-r} \right) \quad (12)$$

解 析 例

薄板構造の圧縮部材において重量軽減孔の座屈強度に及ぼす影響がしばしば問題になるが、従来信頼するに足る解析法が確立されていなかった。そこでまず有孔板の座屈強度のこの方法による解析を試みたわけである。すなわち有孔正方形板を例にとりて本方法による理論値と A. L. Schlack, Jr. の実験値とを比較してみた。実験の境界条件は図 1 中の AD および BC 辺では x 方向の

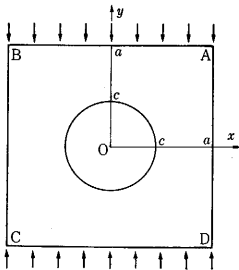


図 1 有孔正方形板の圧縮

変位が拘束されており、AB および CD 辺は一定変位で負荷され、板の曲げに関しては全辺支持となっている。

解析では面内変位 u, v の対称性から板の 1/4 を考慮し上記境界条件のもとで応力分布を求めている。応力分布を求めるのにもちいた三角要素による分割状況の 1 例を図 2 に示す。板のたわみ形は

$$w = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)(a_{00} + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4) \quad (13)$$

と 6 項で近似し、正方形板の一辺の長さ a と孔の直径の比 $r=c/a$ を 0 から 0.3 までかえて計算した結果を実験値とともに図 3 に示す。縦軸の $\bar{\sigma}_r$ は座屈荷重を AB 辺の断面積で割った平均座屈応力である。特に孔なしの

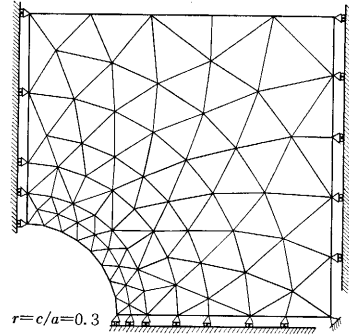


図 2 平面応力場の解析に使用した有限要素の分割状況の 1 例

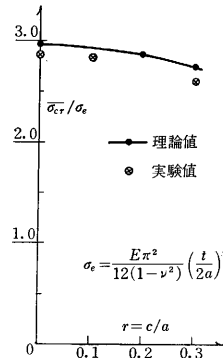


図 3 座屈荷重の理論値との比較

場合には厳密解が得られており、実験のポアソン比 0.35 のとき、 $2.9629 E \pi^2 / 12(1-\nu^2) \times (t/2a)^2$ である。一方 48 分割で 6 項までのたわみ近似で得られた値が $2.9630 E \pi^2 / 12(1-\nu^2) \times (t/2a)^2$ となり、良好な一致を示している。しかし対応する実験値と比較すると約 3% 高目に出ており、孔が大きくなっても、その傾向がみられる。通常平板の座屈に関する理論値と実験値の間に 10% 程度の誤差はまぬがれないことを考慮すれば、計算結果は非常に信頼しうるものであることがわかる。

む す び

エネルギー法において、実際の数値計算に現われるはんだつな二重積分を Gauss の定理を用いて線積分に変換し、計算の高速化に成功した。この方法と平面応力場の有限要素法による数値解と組み合わせることにより、複雑な形状と境界条件を有する任意外荷重を受ける平板の座屈荷重が容易に求まることがわかった。

(1968 年 1 月 16 日受理)

参 考 文 献

- 1) 吉識, 川井: “平板の曲げ, 振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について (I)”, 造船協会論文集第 117 号, pp. 153~163 (昭和 40 年 5 月)。
- 2) A. L. Schlack, Jr.: “Elastic stability of Pierced Square Plates” Experimental Mechanics (June. 1964).