

回転体の非対称問題に対する剛性行列

A Stiffness Matrix for Unsymmetrical Problems of Solids of Revolution

川 股 重 也・塩 屋 繁 松

Shigeya KAWAMATA and Shigematsu SHIOYA

はしがき Finite Element Methodにより、任意形状の3次元弾性体の応力解析が種々の荷重や境界条件に対して可能になっている。しかし実際的な問題になると、大型計算機でさえ、計算の規模は粗い要素の分割形に限られてしまう。一般的には、最も単純な4面体に分割しても、数万の未知量を求めねばならないのであるが、問題を回転体に限定すれば、その扱いははるかに容易となる。厚肉円筒に内圧が作用したような回転体の軸対称問題¹⁾では必要な未知変位としては2次元問題と同じで、回転軸を含む断面でたてた釣合式から解が求まる。同様に、非対称問題に対しても、もし外力が円周方向にsine的に変化するとき、回転軸を含む任意断面でたてられた方程式は全体の釣合を表わす。それは応力分布も円周方向で同じ変化するためであり、外力のFourier級数展開によって、回転体の非対称問題が容易に解析できる。この場合の、3角形断面リング要素の、剛性行列を求めた。

荷重と変位 円筒座標系 (r, θ, φ) をとり、荷重および変位の各成分は θ の3角級数で展開できるものと定

義する(図1)。 $p_{rn}, p_{\theta n}, \dots, w_n$ を r および z の関数として、

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \sum_n p_{rn} \cos n\theta \\ p_\theta &= \sum_n p_{\theta n} \sin n\theta \\ p_z &= \sum_n p_{zn} \cos n\theta \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_n u_n \cos n\theta \\ v &= \sum_n v_n \sin n\theta \\ w &= \sum_n w_n \cos n\theta \end{aligned} \right\} (2)$$

水平地震力に対しては $n=1$ をとる。以後 \sum_n を略す。

次に回転体から3角形断面リング要素をとり出し、頂点での節点力を式(3)、節点変位を式(4)で表わす(図2)。

$$\begin{aligned} f_e &= \{f_{r_i} f_{r_j} f_{r_k}; f_{\theta_i} f_{\theta_j} f_{\theta_k}; f_{z_i} f_{z_j} f_{z_k}\} = \{f_r f_\theta f_z\} \\ &= \{f_{rn} \cos n\theta; f_{\theta n} \sin n\theta; f_{zn} \cos n\theta\} = T_\theta f_{en} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} d_e &= \{u_i u_j u_k; v_i v_j v_k; w_i w_j w_k\} = \{u v w\} \\ &= \{u_n \cos n\theta; v_n \sin n\theta; w_n \cos n\theta\} = T_\theta d_{en} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{ただし、} T_\theta = \text{diag.} \{ \cos n\theta \dots \sin n\theta \dots \cos n\theta \dots \} \quad (5)$$

変位関数 3角形要素内で変位を線形分布と仮定すると各要素間の適合条件は満足される。すなわち9個の節点変位に対し9個の係数を決定する。まず各節点に順次に単位の変位を与えていくときの変位の分布は、

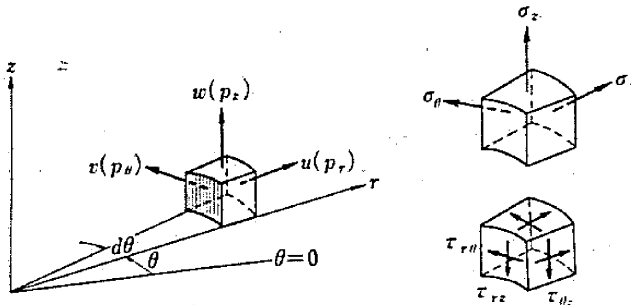


図 1

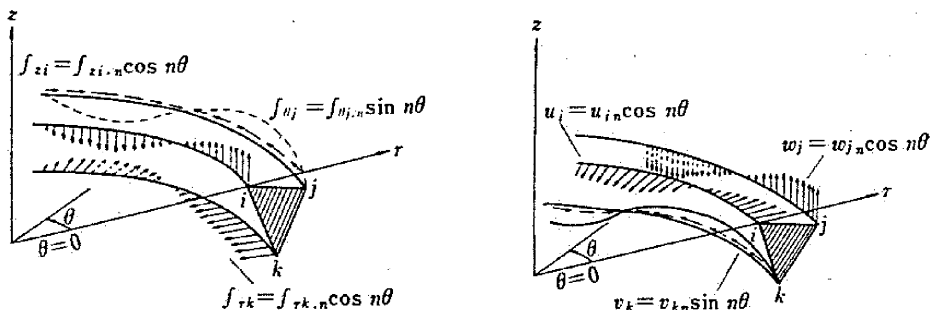


図 2

研究速報

$u_i = u_j = u_k = \cos n\theta$ に対し
 $\bar{u} = [\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k] = \phi A \cos n\theta, \bar{v} = 0, \bar{w} = 0$ (6a)

$v_i = v_j = v_k = \sin n\theta$ に対し
 $\bar{u} = 0, \bar{v} = [\bar{v}_i \bar{v}_j \bar{v}_k] = \phi A \sin n\theta, \bar{w} = 0$ (6b)

$w_i = w_j = w_k = \cos n\theta$ に対し
 $\bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{w} = [\bar{w}_i \bar{w}_j \bar{w}_k] = \phi A \cos n\theta$ (6c)

で表わせる。ここに
 $\phi = [1 r z]$ (7)

また A は、各変位に対して 3 頂点で単位変位となるから $\phi A = I$ 、したがって A は 3 頂点の座標値から求まる。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 r_i z_i \\ 1 r_j z_j \\ 1 r_k z_k \end{pmatrix}^{-1} \quad (8)$$

ひずみおよび応力式 各節点で単位変位が与えられたときの変位に対する要素内でのひずみは線形理論から

$$\bar{\epsilon}_e = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_r \\ \bar{\epsilon}_\theta \\ \bar{\epsilon}_z \\ \bar{\tau}_{r\theta} \\ \bar{\tau}_{rz} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \\ \bar{u}/r + \theta \bar{v}/(r\theta\theta) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(r\theta\theta) + \theta \bar{v}/\partial r - \bar{v}/r \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \theta \bar{w}/(r\theta\theta) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \theta \bar{w}/\partial r \end{pmatrix}$$

$$\sigma_e = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_{11}\beta + E_{12}\alpha) \cos n\theta & nE_{12}\alpha \cos n\theta & E_{13}\gamma \cos n\theta \\ (E_{12}\beta + E_{22}\alpha) \cos n\theta & nE_{22}\alpha \cos n\theta & E_{23}\gamma \cos n\theta \\ (E_{13}\beta + E_{32}\alpha) \cos n\theta & nE_{32}\alpha \cos n\theta & E_{33}\gamma \cos n\theta \\ -nG_{44}\alpha \sin n\theta & G_{44}(\beta - \alpha) \sin n\theta & 0 \\ 0 & G_{55}\gamma \sin n\theta & -nG_{55}\alpha \sin n\theta \\ G_{66}\gamma \cos n\theta & 0 & G_{66}\beta \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (13)$$

剛性行列 仮想仕事の原理—各節点に仮想変位 \tilde{d}_e を与えたとき生ずる外部仕事は仮想変位に対する要素内のひずみ $\bar{\epsilon}_e$ によって生ずる内部仕事に等しい—を用いる。 \tilde{d}_e とし式 (4) と同じ分布の変位をとる。

$$\tilde{d}_e = T_e \tilde{d}_{en} \quad (14)$$

この仮想変位 \tilde{d}_e によって生ずるひずみは式 (10) から $\bar{\epsilon}_e = \bar{\epsilon}_e \tilde{d}_{en}$ (15)

となる。要素として θ から $\theta + d\theta$ 間の仮想仕事を考えると

$$r \begin{pmatrix} f_{rn} \cos n\theta \\ f_{rn} \sin n\theta \\ f_{rn} \cos n\theta \end{pmatrix} = \iint_A \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} \tan^2 n\theta & b_{12} \cot n\theta + c_{12} \tan n\theta & b_{13} \\ b_{21} \cot n\theta + c_{21} \tan n\theta & b_{22} \cot^2 n\theta + c_{22} & b_{23} \cot n\theta + c_{23} \tan n\theta \\ b_{31} & b_{32} \cot n\theta + c_{32} \tan n\theta & b_{33} + c_{33} \tan n\theta \end{pmatrix} r dr dz \begin{pmatrix} u_n \cos n\theta \\ v_n \sin n\theta \\ w_n \cos n\theta \end{pmatrix} \quad (18)$$

この (18) 式を
 $r f_e = K_e d_e$ (19)

の形におくと、 K_e が任意の断面での節点力と節点変位の関係を定める剛性行列であり、式 (18) は剛性行列が θ の関数であることを示している。これは行列が、たとえば $\cos n\theta$ 分布する変位と $\sin n\theta$ 分布する力の関係を表わす成分を含んでいるためである。原理的には任意 θ 断面で約合式をたてることが可能であるが、 $\theta = \pi/4n$ の断面を選ぶのが最も簡明である。このとき式 (19) は次式のようになる。

$$r f_{en} = K_{en} d_{en} \quad (20)$$

$$= \begin{pmatrix} \beta \cos n\theta & 0 & 0 \\ \alpha \cos n\theta & na \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \cos n\theta \\ -na \sin n\theta & (\beta - \alpha) \sin n\theta & 0 \\ 0 & r \sin n\theta & -na \sin n\theta \\ \gamma \cos n\theta & 0 & \beta \cos n\theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし、 $\alpha = a/r + \beta + \alpha z/r$ とおいた。

任意な節点変位 d_{en} に対するひずみ式は

$$\epsilon_e = \bar{\epsilon}_e d_{en} = \bar{\epsilon}_e (u_n v_n w_n) \quad (10)$$

で表わせる。 ϵ_e に対する応力はフックの弾性法則より

$$\sigma_e = D \epsilon_e = D \bar{\epsilon}_e d_{en} = D \bar{\epsilon}_e (u_n v_n w_n) \quad (11)$$

ここに D は弾性係数で直交異方性体まで考え次式をとる。

$$D = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{対} & & & G_{44} & 0 & 0 \\ & & & & G_{55} & 0 \\ & & & & & G_{66} \end{pmatrix} \quad (12)$$

式 (9) および (12) を用いれば、応力式 (11) は式 (13) のようになる (図 1)。

$$\tilde{d}_e^T r f_e ds = \int_A \bar{\epsilon}_e^T \sigma_e ds dA \quad (16)$$

ここに $ds = r d\theta$ であり、 A は要素の断面積である。式 (3)、(11) および式 (14) と (15) で $\tilde{d}_{en} = I$ とおいたものを式 (16) へ代入すれば次式のようになる。

$$r T_e^T T_e f_{en} = \int_A \bar{\epsilon}_e^T D \bar{\epsilon}_e r dA d_{en} \quad (17)$$

さらに式 (5)、(9) および (12) を用いれば式 (17) は次のような形の式に導かれる。

$$\text{ただし、}$$

$$K_{en} = \iint_A \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{31} & b_{32} + c_{32} & b_{33} + c_{33} \end{pmatrix} r dr dz \quad (21)$$

$\theta = \pi/4n$ の断面で求められた式 (21) が変位と力の最大値の間の関係を示す剛性行列である。それを次式で表わす。

$$K_{en} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ \text{対} & K_{22} & K_{23} \\ & & K_{33} \end{pmatrix} \quad (22)$$

右辺の各成分 K_{ij} は 3×3 の行列でそれぞれ

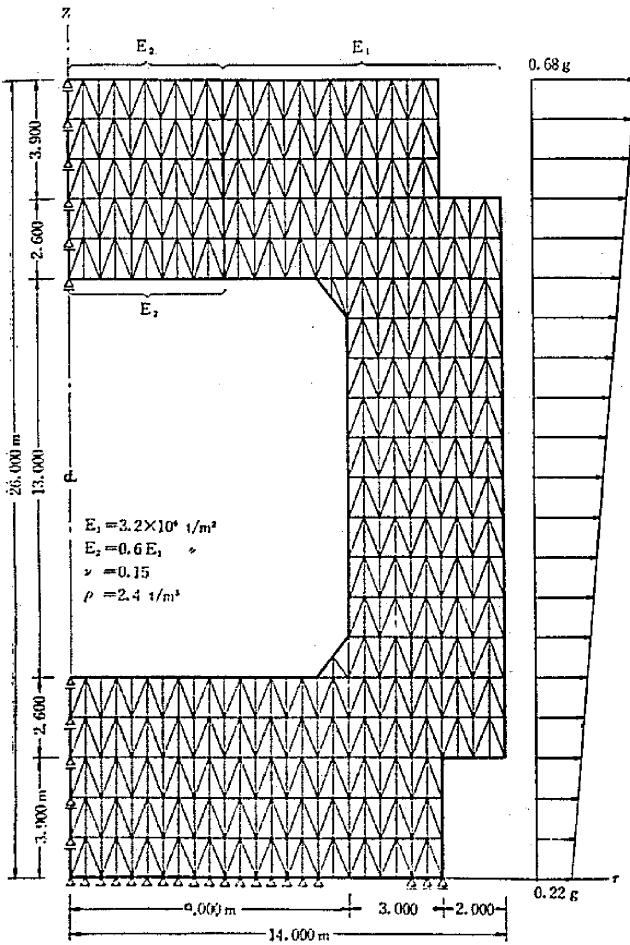


図 3

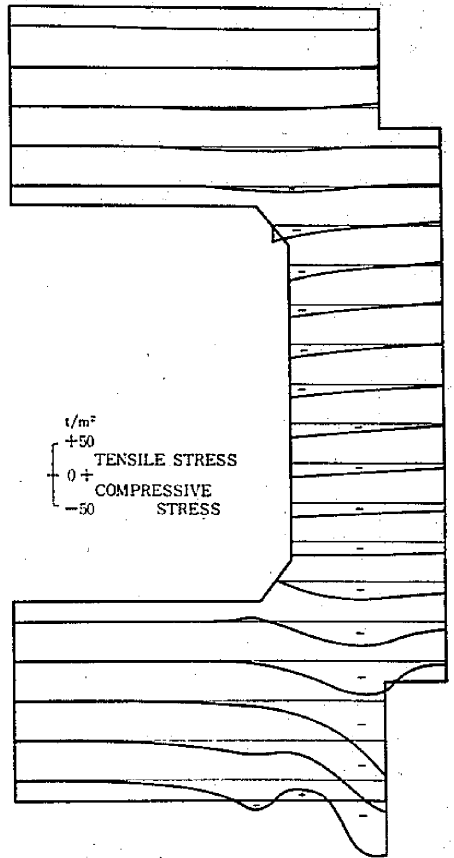


図 4 (σ_r) IN $\theta=0$ SECTION

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= I_1 \{ (E_{11} + 2E_{12} + E_{22} + n^2 G_{11}) \beta^T \beta + G_{11} \tau^T \tau \} + (E_{12} + E_{21} + n^2 G_{12}) \\
 &\quad \times \{ I_2 (\alpha^T \beta + \beta^T \alpha) + I_3 (\beta^T \tau + \tau^T \beta) \} + (E_{22} + n^2 G_{22}) \{ I_4 \alpha^T \alpha + I_5 (\alpha^T \tau + \tau^T \alpha) + I_6 \tau^T \tau \} \\
 K_{12} &= n \{ I_1 (E_{12} + E_{21}) \beta^T \beta + (E_{12} + E_{21} + G_{12}) \{ I_2 \beta^T \alpha + I_3 \beta^T \tau \} + E_{22} \{ I_2 \alpha^T \beta + I_3 \tau^T \beta \} \\
 &\quad + (E_{22} + G_{22}) \{ I_4 \alpha^T \alpha + I_5 (\alpha^T \tau + \tau^T \alpha) + I_6 \tau^T \tau \} \} \\
 K_{13} &= I_1 \{ (E_{11} + E_{21}) \beta^T \tau + G_{11} \tau^T \beta \} + E_{21} \{ I_2 \alpha^T \tau + I_3 \tau^T \tau \} \\
 K_{22} &= I_1 \{ n^2 E_{22} \beta^T \beta + G_{11} \tau^T \tau \} + n^2 E_{22} \{ I_2 (\alpha^T \beta + \beta^T \alpha) + I_3 (\beta^T \tau + \tau^T \beta) \} \\
 &\quad + (n^2 E_{22} + G_{22}) \{ I_4 \alpha^T \alpha + I_5 (\alpha^T \tau + \tau^T \alpha) + I_6 \tau^T \tau \} \\
 K_{23} &= n \{ I_1 (E_{21} \beta^T \tau - G_{11} \tau^T \beta) - G_{11} \{ I_2 \tau^T \alpha + I_3 \tau^T \tau \} + E_{21} \{ I_2 \alpha^T \tau + I_3 \tau^T \tau \} \} \\
 K_{33} &= I_1 \{ E_{22} \tau^T \tau + (G_{11} + n^2 G_{11}) \beta^T \beta + n^2 G_{11} \{ I_2 (\alpha^T \beta + \beta^T \alpha) + I_3 (\beta^T \tau + \tau^T \beta) + I_4 \alpha^T \alpha + I_5 (\alpha^T \tau + \tau^T \alpha) + I_6 \tau^T \tau \} \}
 \end{aligned} \tag{23}$$

ここに $\bar{r} = (r_i + r_j + r_k)/3$, $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} r_i & z_i \\ r_j & z_j \\ r_k & z_k \end{vmatrix}$ として $z = (z_i + z_j + z_k)/3$,

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= \iint_A \bar{r} dr dz = \bar{r} A, \quad I_2 = \iint_A dr dz = A, \quad I_3 = \iint_A z dr dz = z A, \quad I_4 = \iint_A \frac{1}{r} dr dz = \frac{A}{\bar{r}}, \quad I_5 = \iint_A \frac{z}{r} dr dz = \frac{z}{\bar{r}} A, \\
 I_6 &= \iint_A \frac{z^2}{r} dr dz = \frac{1}{12r} \{ (z_i + z_j)^2 + (z_j + z_k)^2 + (z_k + z_i)^2 \} A
 \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

を用いる。

例題 数値解析例として原子炉圧力容器 (PCPV) に水平地震力が作用した場合について求めた。分割形式、水平加速度および諸元を図3に、応力については $\sigma_r(\theta=0)$ を図4に示した。節点数 425, 要素数 718, 精度 1×10^{-3} , 演算時間 627 秒 (HITAC 5020 F) であった。

文 献

- 1) 坪井・川股・堀屋・田中 「Finite Element Method による連続体の解析」 日本建築学会論文報告集, 号外, 昭 42. 10
- 2) R. W. McLAY, B. E. GREENE: "Analysis of Axisymmetric Solids by the Direct Stiffness Method", the Boeing Comp., SARM, No. 50, (April 1965).

(1967年 11月 16日受理)