研　究　速　報

UDC 539.384.6

ひずみ増分理論による液圧バルジ試験の解析

Analysis of the Hydraulic Bulge Test by the Incremental Theory of Plasticity

山 田 嘉 昭・横 内 康 人
Yoshiaki YAMADA and Yasuto YOKOUCHI

はじめに

本稿は，ひずみ増分理論による軸対称成形問題の研究の一環として，液圧バルジ試験を取り扱ったものである．解析は膜理論により，大きいひずみを対象とするので材料は剛塑性体と仮定する．降伏条件には von Mises の条件を用い，また回転対称の異方性（いわゆる垂直異方性）も考慮できるように計算機プログラムを準備した．

1. 基礎方程式

膜理論による軸対称問題の釣合い方程式[1)] を液圧バルジ試験（図1参照）にあてはめると，摩擦がなく板表面のせん断応力は0であるから，変形前の座標 s を独立変数に選ぶと

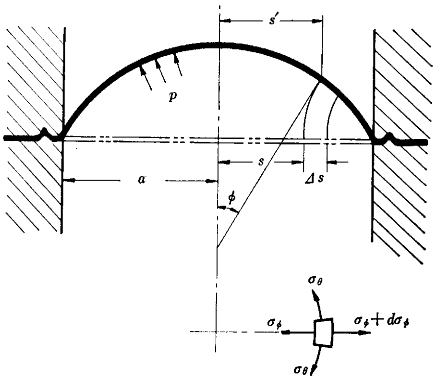

図1　液圧バルジ試験

$$\frac{d(t\sigma_\phi)}{ds}=\frac{t(\sigma_\theta-\sigma_\phi)}{s}e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}\cos\phi \quad (\phi\ \text{方向}) \qquad (1)$$

$$\frac{p}{t}=\frac{2\sigma_\phi\sin\phi}{se^{\varepsilon_\theta}} \quad (\text{対称軸方向}) \qquad (2)$$

ひずみの適合条件式は

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{ds}=\frac{e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}\cos\phi-1}{s} \qquad (3)$$

応力-ひずみ関係式は，垂直異方性の r 値を考慮すると

$$\frac{\dot\varepsilon_\theta}{(1+r)\sigma_\theta-r\sigma_\phi}=\frac{\dot\varepsilon_\phi}{(1+r)\sigma_\phi-r\sigma_\theta} \qquad (4)$$

$$=\frac{\dot\varepsilon_t}{-(\sigma_\theta+\sigma_\phi)}\left(=\frac{\dot{\bar\varepsilon}}{(1+r)\bar\sigma}\right) \qquad (5)$$

$\dot\varepsilon_t$ の代わりに板厚 t を未知変数に選ぶと，(4)式と(5)式から得られる体積一定の条件 $\varepsilon_\phi+\varepsilon_\theta+\varepsilon_t=0$，および板厚ひずみの定義から

$$t=t_0e^{-(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi)} \qquad (5')$$

von Mises の降伏条件を垂直異方性の材料に拡張すると[2)]，相当応力 $\bar\sigma$ と相当ひずみ速度 $\dot{\bar\varepsilon}$ は

$$\bar\sigma=\left(\sigma_\phi{}^2-\frac{2r}{1+r}\sigma_\phi\sigma_\theta+\sigma_\theta{}^2\right)^{1/2} \qquad (6)$$

$$\dot{\bar\varepsilon}=\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}}\left(\dot\varepsilon_\phi{}^2+\frac{2r}{1+r}\dot\varepsilon_\phi\dot\varepsilon_\theta+\dot\varepsilon_\theta{}^2\right)^{1/2} \qquad (7)$$

材料の硬化特性は，次のように表わされるものとする．

$$\bar\sigma=Y+c\bar\varepsilon^n \qquad (8)$$

液圧バルジ試験の初期条件はいたるところで（すなわち座標 s に無関係に），次のように与えられる．

$\varepsilon_\phi=\varepsilon_\theta=\bar\varepsilon=\phi=0$，$t=t_0$，液圧 $p=0$

および　$\bar\sigma=Y$，$\sigma_\phi=\sigma_\theta=\sqrt{(1+r)/2}Y$

境界条件は，頂点および周辺において，時間に無関係に次のようである．

頂点（$s=0$）において $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\phi$，$\phi=0$

周辺（$s=a$）において $\varepsilon_\theta=0$

液圧バルジ試験はいわゆる2点境界値問題となるので，8個の式を9個の未知数 σ_θ, σ_ϕ, $\bar\sigma$, ε_θ, ε_ϕ, $\bar\varepsilon$, t, ϕ, p について解く形となっている．筆者らの解法は，液圧 p をパラメータのように取り扱い，周辺における境界条件 $\varepsilon_\theta=0$ を満足するように，各変形段階の p の値を決定するものである．

2. 数値解法

各変形段階における頂点のひずみ $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\phi=\varepsilon_0$(とおく)を時間の尺度に選び，特性曲線 s および ε_0(図2参照)に沿って前項の微分方程式の数値積分を行なう．積分は常微分方程式でよく用いられている次の式によった．

予測子　$y_{n+1}=y_n+y_n'\varDelta x$

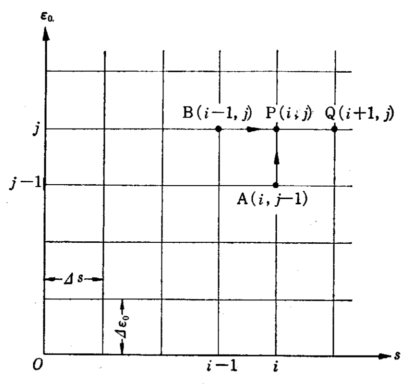

図2　特性曲線

修正子　$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(y_n'+y_{n+1}')\Delta x$

以下，液圧を受ける板（受圧部の半径 a）を適当に分割して，一般の材料要素を i と名付け，同様に変形段階を j で表わす．すでに $(j-1)$ 段階までの解が得られているものとし，j 段の解を求める手順は次のようである．

1. 頂点のひずみ増分 $\Delta\varepsilon_0$ を与え，頂点 $(0, j)$ における応力，板厚などを決定する．
2. $\Delta\varepsilon_0$ に対応する液圧 p を適当に推定し，これを p の第1近似とする．
3. 板の中心から周辺にむかって，順次各要素の応力，ひずみなどを計算する．
4. 周辺の要素に達したところで $\varepsilon_\theta=0$ の条件が満足されているかどうか検証する．こうして
5. ε_θ が0と見なせない場合は p を修正してステップ3にもどる．
6. ε_θ が必要な精度で $\varepsilon_\theta=0$ を満足すれば j 段の計算は終わり，次の $j+1$ 段に進む．

上で述べた手順のステップ3における計算は，図2の $B(i-1, j)$ 点と $A(i, j-1)$ 点における応力，ひずみなどの値を既知として $P(i, j)$ 点における値を求めることに帰する．特性曲線 ε_0 に沿う関係 (A→P) は，(4) 式により，ひずみの増分を $\Delta\varepsilon_\theta$, $\Delta\varepsilon_\phi$ として近似的に次の関係を満足する．

$$\frac{\Delta\varepsilon_\theta}{(1+r)\sigma_\theta-r\sigma_\phi}=\frac{\Delta\varepsilon_\phi}{(1+r)\sigma_\phi-r\sigma_\theta} \tag{4'}$$

最初に予測子による計算は，(1)式および (3) 式をB点からP点まで積分して

$$(t\sigma_\phi)_P=(t\sigma_\phi)_B+\left\{\frac{t(\sigma_\theta-\sigma_\phi)e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}}{s}\cos\phi\right\}_B\Delta s \tag{9}$$

$$(\varepsilon_\theta)_P=(\varepsilon_\theta)_B+\left\{\frac{e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}\cos\phi-1}{s}\right\}_B\Delta s \tag{10}$$

上で得た結果を用い，(2)式から

$$\sin(\phi)_P=\frac{1}{2}(p)_j\left\{\frac{se^{\varepsilon_\theta}}{t\sigma_\phi}\right\}_P \tag{11}$$

円周ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_\theta$, さらに (4′) 式により子午線方向のひずみ増分 $\Delta\varepsilon_\phi$ が次のように計算される．

$$(\Delta\varepsilon_\theta)_{AP}=(\varepsilon_\theta)_P-(\varepsilon_\theta)_A \tag{12}$$

$$(\Delta\varepsilon_\phi)_{AP}=\left\{\frac{(1+r)\sigma_\phi-r\sigma_\theta}{(1+r)\sigma_\theta-r\sigma_\phi}\right\}_A(\Delta\varepsilon_\theta)_{AP} \tag{13}$$

また (7) 式によって相当塑性ひずみ増分を求めると

$$(\Delta\bar{\varepsilon})_{AP}=\frac{1+r}{\sqrt{1+2r}}\left\{(\Delta\varepsilon_\theta)_{AP}^2+\frac{2r}{1+r}(\Delta\varepsilon_\theta)_{AP}(\Delta\varepsilon_\phi)_{AP}+(\Delta\varepsilon_\phi)_{AP}^2\right\}^{1/2} \tag{14}$$

A点における ε_ϕ と $\bar{\varepsilon}$ に $\Delta\varepsilon_\phi$ と $\Delta\bar{\varepsilon}$ を加え

$$(\varepsilon_\phi)_P=(\varepsilon_\phi)_A+(\Delta\varepsilon_\phi)_{AP} \tag{15}$$

$$(\bar{\varepsilon})_P=(\bar{\varepsilon})_A+(\Delta\bar{\varepsilon})_{AP} \tag{16}$$

以下P点における板厚 t，応力 σ_ϕ, $\bar{\sigma}$ および σ_θ を次の順序で計算する．

(5′) 式より

$$(t)_P=t_0\exp[-(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi)_P] \tag{17}$$

ゆえに

$$(\sigma_\phi)_P=(t\sigma_\phi)_P/(t)_P \tag{18}$$

(8)式より

$$(\bar{\sigma})_P=Y+c(\bar{\varepsilon})_P^{\,n} \tag{19}$$

(6) 式を σ_θ について解き

$$(\sigma_\theta)_P=\frac{r}{1+r}(\sigma_\phi)_P+\left\{(\bar{\sigma})_P^2-\frac{1+2r}{(1+r)^2}(\sigma_\phi)_P^2\right\}^{1/2} \tag{20}$$

これで $P(i, j)$ 点における値の第1近似が得られ，次にその結果を用いて修正子による計算を行なう．この場合，上の (9) 式，(10)式および (13) 式に対応する修正式は次のようになる．ただし { } 内にはそれぞれ前と同じ形の式が入るものとする．

$$(t\sigma_\phi)_P=(t\sigma_\phi)_B+\frac{1}{2}[\{(9)\}_B+\{(9)\}_P]\Delta s \tag{9'}$$

$$(\varepsilon_\theta)_P=(\varepsilon_\theta)_B+\frac{1}{2}[\{(10)\}_B+\{(10)\}_P]\Delta s \tag{10'}$$

$$(\Delta\varepsilon_\phi)_{AP}=\frac{1}{2}[\{(13)\}_A+\{(13)\}_P](\Delta\varepsilon_\theta)_{AP} \tag{13'}$$

その他の式は，第1近似の計算の場合と全く同じである．こうして第2近似の計算が (9′), (10′), (11)……, (20)式の順序で終われば，ふたたび (9′) 式にもどって修正計算を繰り返す．P点における変数の値が必要な精度で収束すれば，計算を次の要素 $Q(i+1, j)$ に移す．

各変形段階 j における液圧 p_j の推定およびその修正は次のように行なった．先ず $(j-1)$ 段から j 段に移るときは，その前段の結果から定まる $p_{j-1}-p_{j-2}=\Delta p$ (とおく)と同じ Δp を用い，p_j を次の式 $p_{j-1}+\Delta p=p'$ (とおく) によって推定する．p' に対する解が板の周辺 $(s=a)$ で $\varepsilon_\theta=0$ を満足せず $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta'$ の値をとるときは，$p_{j-1}+\alpha\Delta p=p''$ (α は1でなければ任意でよいが，$0<\alpha<1$ とすると都合がよい) を圧力 p_j に対する修正値とする．p'' に対する ε_θ の値 ($s=a$ における) が $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta''$ であれば，線形近似

$$p'''=(p''\varepsilon_\theta'-p'\varepsilon_\theta'')/(\varepsilon_\theta'-\varepsilon_\theta'')$$

によって p''' を求める．以後 ε_θ が必要な精度で0に近づくまで線形近似を続ける．以上が解法の概略である．

3. 数値計算の一例

液圧バルジ試験のひずみ増分理論による解析は，すでにWoo[3]によっても，筆者らとはちがった方法で取り扱われている．そこで，最初の数値解を，材料の硬化特性が次の式 (Woo が軟銅の応力-ひずみ線図にあてはめ

研究速報

た式）で与えられる場合について求め，Woo の解と比較することにした．硬化特性は次のように二本の曲線で表わされる．

$$\frac{\bar{\sigma}}{Y}=1+6.194\bar{\varepsilon}^{0.7778} \quad (\bar{\varepsilon}\leqq 0.1994 \text{ に対し})$$

$$\frac{\bar{\sigma}}{Y}=1+3.366\bar{\varepsilon}^{0.3786} \quad (\bar{\varepsilon}>0.1994 \text{ に対し})$$

計算におけるきざみは $\Delta s=0.1a$，$\Delta\varepsilon_0$ は変形の進行に応じて，0.0001，0.0005，0.001，0.005 の4種を選んだ．n 乗硬化則を用いる限り，変形の初期において硬化率 H' が ∞ となるから，計算の最初の段階ではきざみ $\Delta\varepsilon_0$ を小さく選ばなければならない．

図3と図4は本研究の数値解を Woo の解と比較した結果の例である．図4については，同一の圧力値に対する解は得られなかったので，可能な範囲で Woo の解の圧力値に近い結果を選んで比較を行なった．とくに筆者らの方法では，Woo が instability によるものとしている点（図3の×印で与えられ，Woo の方法ではそれ以上に解を進めることが不可能であった点）を越えて，解が得られていることは注目すべきことと考えられる．

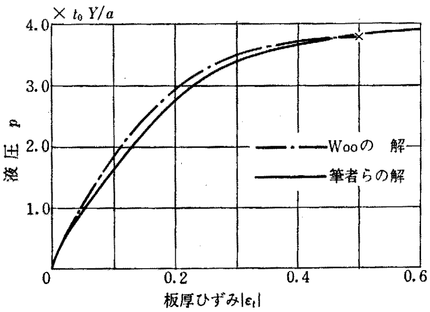

図3 頂点における板厚ひずみと液圧の関係

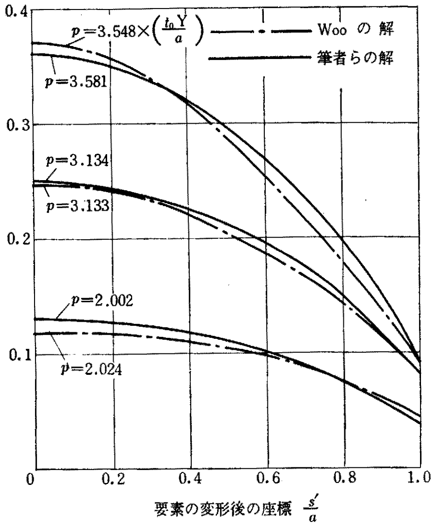

図4 板厚ひずみの分布

むすび

本稿で述べた方法により，液圧バルジ試験の数値解を精度よく求める見通しを得たので，今後は材料の垂直異方性の r 値，（8）式の n 値および降伏応力 Y を変えた場合について計算を行ない，これらの材料特性値が液圧バルジ試験結果，ひいては材料の張出し成形性に及ぼす影響について検討を加える予定である．その他，液圧バルジ試験における不安定問題についても考察したいと考えている．

（1967年10月16日受理）

文献

1) 山田嘉昭：生研報告 **11**-5 (1961)
2) 山田嘉昭：機械学会誌，**67**-542 (1964)，453.
3) D. M. Woo: *Int. J. mech. Sci.* **6** (1964)，303.

（p. 14 よりつづく）

この開発はユーザ自身で行なわれることもあろうし，メーカもそれが可能な体制へと脱皮してゆく必要があるであろう．表3はこのような無人化に必要な新装置開発に対する，筆者の考えにもとづいたひとつのシステムである．読者諸賢のご参考に供するとともに，ご批判をあおぎたい．

6. おわりに

以上無人化のための基本的態度や，技術的基礎のほんの一部について述べた．今日のオートメーションの考え方はこのような基本を検討することが少なく，砂上の楼閣が築かれていることが多いように感じられる．紙面の関係で基礎的事項のほんのわずかしか説明できず，したがってまとまりの悪いものになったことは残念である．機会を見て，述べ足りなかった基本についても十分に論じたいと思っている．

（1967年10月14日受理）

文献

1) 沢井善三郎監修，森政弘編集，“シーケンス自動制御便覧”，オーム社，第3編第4章．あるいは沢井善三郎，森政弘，“自動制御を実施するための心構え”，生産研究 Vol. 12, No. 4, 1960, pp. 161～164.
2) 沢井善三郎，“オートメーションの考え方，進め方”，電気学会雑誌，Vol. 87-7, No. 946, 1967, pp. 1266～1271.
3) G. H. DeGROAT 著，谷口紀男監約，“製造工業における自動化設計の技術”，日刊工業，pp. 39～55.
4) G. H. Amber, P. S. Amber, “Anatomy of Automation”, Prentice-Hall.
5) 沢井善三郎，森政弘，山口楠雄，“精製糖工程の総合制御システム”，計測と制御，Vol. 6, No. 2, 1967, pp. 77～90.