UDC 007.5：519.5

有限オートマトンの代数的性質

——ディジタル機械の数学的表現——

On Finite Automata Having Special Algebraic Structure

森脇 義雄*・河田 汎*

Yoshio MORIWAKI and Hiroshi KAWATA

有限オートマトンというのはディジタル機械の数学的モデルを意味する．このモデルでは，機械を″内部状態″で置きかえ，入力と出力および″内部状態″の間の関係，また，ある動作をする機械の構成法などについて研究がおこなわれている．本稿ではその代数構造に注目し，特に特殊な構造を持つものについて検討する．

1. はじめに[1]

オートマトン（automaton）は″ひとりでに動くもの″というような意味で，辞書には自動機械(装置)，とか自動人形などの訳がでている．情報と制御の工学の発展によって自動機械の技術が急速に進み，その結果自動機械といったもの全体に通ずる一般的な理論体系を樹立してこれを記述し，分類し，また設計の一般的指針を得ようという機運になったのがこのオートマトンという言葉が特別なニュアンスを持って広く使われるようになった原因であろう．普通オートマトンと呼んでいるものは，″自動的″な機械のうちでも少なくとも逐次制御のあるもの主として外部からの情報に応じてはたらくものを指す．簡単なもので自動販売機，複雑なものでは自動交換機，電子計算機がある．

自動機械を特徴づけるものには，そのほかにサーボ機構その他のアナログ的な自動制御があるが，これは離散的変数の制御とは数学的な面でまったく異質であるので現在のところオートマトンの研究の中には含まれない．

2. 有限オートマトン[1),11)]

自動機械のはたらきはオートマトンの研究では入力と出力の関係という形に抽象化され，さらに入力，出力は数値あるいは数値の組としてあらわされる．これらの数値は離散的な値をとる．ここでは出力は2値 {0, 1} とし同期的な系またはこれに準ずるものを考える．

ある時刻における出力はそのときの入力およびそれ以前の入力にも依存するわけであるから，オートマトンは内部に，過去に入った入力に関する情報をたくわえておく能力を持つ．定まった装置の中の区別しうる状態は有限個しかないと考えられるから，そのような有限個の内部状態 $s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ のうちのどの状態に現在あるかということの中に過去の入力に関する情報が記憶されているはずである．したがってオートマトンのある時刻tの出力は，その瞬間に入ってきた入力とそのときの系の内部状態によって定まる(Huffmanの定義)．あるいは，時刻tにおける出力は，時刻$t-1$およびこれ以前における入力だけの関数で時刻tにおける入力にはよらない（つまり入力から出力まで作用が伝達されるには遅れがある）と考えて，時刻tにおける出力はこのときの内部状態のみによってきまると考えてもよい（Mooreの定義)．以下では後者の定義に従う．出力は2値 {0, 1} と仮定している（別に一般性は失われない）ので，全状態の集合のうち，たとえば出力1を出す方の状態の集合を指定すると出力に関してはこれで十分．この状態の集合をFと書くことにする．あとは系の初期状態 s_0 とある状態 s にあるとき入力 σ が入るとどの状態に移るかを指定すれば完全に定まる．

〔**定義 1**〕 $A=\langle S, M, s_0, F\rangle$ で有限オートマトン A を定義する．$S=\{s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}\}$ は（内部）状態の集合，M は状態遷移関数，s_0 は初期状態，F は出力1を出す状態の集合．入力記号の集合としては特に断らないかぎり $J=\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots \sigma_{k-1}\}$ を考える．J によって作られる有限長の系列（$\sigma_0, \sigma_1\sigma_1, \sigma_0\sigma_1\sigma_0$ など）の全集合を J^* で表わしこの中には長さ0の系列 λ を含める．

3. 正規表現

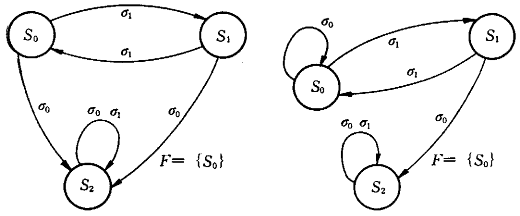
有限オートマトンを定めるには〔定義 1〕によって状態の集合 S と状態間の遷移を示す関数 M，初期状態 s_0，および S のうち出力1を出すべき状態の集合 F を適当な方法で定めれば良い．たとえば状態図（図1参照）を用いる．これは状態を節点で表わし状態間の遷移を矢印で示したもの（たとえば図 1(a)では，ある時刻に状態 s_0 にあり，次の時刻に入力 σ_1 が入ると状態 s_1に移る)．これを表にしたのを状態遷移表という。図 1(a) を表に書くと表1となる．これらの図や表はオートマトンを具体的に実現することを考える場合には特に重要であろう．なお，このような内部構造に関する問題は普通スイッチング回路論，特に順序回路理論として別にあつかわれることが多い．

有限オートマトンの研究のいま一つのゆき方は，単に

* 東京大学生産技術研究所第3部

その入力と出力のみに着目し，これらの間に成立する一般的法則を調べるゆき方である．このような立場では完全な black box 的な記述が望まれる．オートマトンの動作を入力系列のみを用いて規定したいのであるが，それには次のようにする．

いまオートマトン A にある入力系列 x を加えこのときの出力系列中の最後の出力に注目し，これが″1″であるとき x は A によって受理されたという．すると A が受理する入力系列全体（これを $T(A)$ と書く）を指定すれば，これにより A の動作を完全に規定することができる．簡単な例を示そう，図 1(a)に示す状態図 A_1 を考える．初期状態，出力 1 を出す状態ともに s_0 である．時刻 $t=0$ において A_1 は状態 s_0 にあるので A_1 の受理する入力系列は λ および $\sigma_1\sigma_1, \sigma_1\sigma_1\sigma_1\sigma_1, \cdots\cdots$ のように偶数個の σ_1 からなる系列である（状態 s_2 に入るとこの状態を離れることはできない）ので，$T(A_1)=\lambda+\sigma_1\sigma_1+\sigma_1\sigma_1\sigma_1\sigma_1+\cdots \triangleq (\sigma_1\sigma_1)^*$ となる．（$\triangleq$ は″と定義する″の記号）



(a)　A_1　　(b)　A_2

図 1　状態図の例 A_1, A_2

	σ_0	σ_1	出力
S_0	S_2	S_1	1
S_1	S_2	S_0	0
S_2	S_2	S_2	0

表-1　状態遷移表

図 1(b)に示す A_2 について考えると

$$T(A_2)=\lambda+\sigma_0+\sigma_1\sigma_1+\sigma_0\sigma_1\sigma_1+\sigma_1\sigma_1\sigma_0+\sigma_1\sigma_1\sigma_1\sigma_1+\sigma_0\sigma_0+\cdots\cdots$$
$$=\lambda+(\sigma_0+\sigma_1\sigma_1)+(\sigma_0+\sigma_1\sigma_1)^2+\cdots\cdots$$
$$=(\sigma_0+\sigma_1\sigma_1)^*$$

となる．ここで

$$(\sigma_0+\sigma_1\sigma_1)^2=(\sigma_0+\sigma_1\sigma_1)(\sigma_0+\sigma_1\sigma_1)$$
$$=\sigma_0\sigma_0+\sigma_0\sigma_1\sigma_1+\sigma_1\sigma_1\sigma_0+\sigma_1\sigma_1\sigma_1\sigma_1$$

の意味である．A_2 の動作は $T(A_2)$ によって完全に規定される．つまり任意の入力系列 x に対する A_2 の出力系列が $T(A_2)$ から求まることは明らかである．1 例を次に示すと，

時　刻 (t)	0	1	2	3	4	5	6	7
入力系列 (x)	λ	σ_0	σ_1	σ_1	σ_1	σ_0	σ_0	σ_1
出力系列	1	1	0	1	0	0	0	0

時刻 $t=3$ においては $\sigma_0\sigma_1\sigma_1$ が $T(A_2)$ に含まれるので出力は″1″．時刻 $t=2$ では $\sigma_0\sigma_1$ が $T(A_2)$ に含まれないから出力は″0″である．時刻 $t\geq 4$ では，$\sigma_0\sigma_1\sigma_1\sigma_1$, $\sigma_0\sigma_1\sigma_1\sigma_1\sigma_0$ 等はすべて $T(A_2)$ に含まれないから出力は″0″となる（これは図 1(b) からも明らか）．

有限オートマトンは有限個の内部状態しか持たないので上記の 3 種の記号，+(和)，・(通常″・″は書かず上記のように単に並べる，$\sigma_0\cdot\sigma_1$ は $\sigma_0\sigma_1$ と書く)，および＊をもとに任意の有限オートマトンの受理する系列の集合を表現しうる．これを″signal flow graph″の技法を用いて示そう．まず非常に簡単な基本的状態図（図 2 (a)～(d)を考える．これらはある状態図の一部と考えてさしつかえない．またこれらは変換された（その変換の方法を示そうとしている）状態図と考えてよい．したがって x や y などは入力系列の集合をあらわす．状態 s_1 および s_2（同図(c)では s_1, s_2, s_3 および s_4）の間の状態遷移に関するかぎり (a)～(d) はそれぞれ (a')～(d') と等価である．つぎに初期状態は s_0，出力″1″を出す状態の集合は $F=\{s_{n-1}\}$（つまり s_{n-1} だけ）であるような状態図を考える．s_0 と s_{n-1} に注目し他の状態を図 2 に示した変換を繰り返し用いて消去してゆくと図 3(a)のようになる．さらにこの図は s_0 から s_{n-1} への信号の流れ（受理される入力系列）に関するかぎり図 3(b)と等価である．これより受理される系列の集合は $(u+xv^*y)^*xv^*$ となる．一般の状態図では F は一つとは限らない．二つ以上の場合は上に述べた操作をそれぞれについておこないその和(+)をとれば受理される入力系列の全集合を求めることができる．以上の操作では

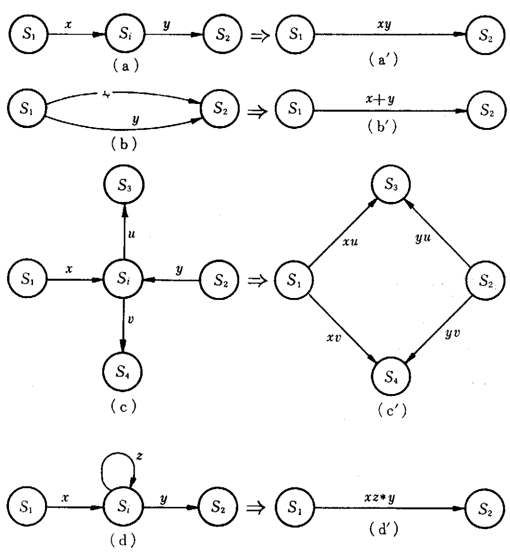


図 2　状態図の基本的変換

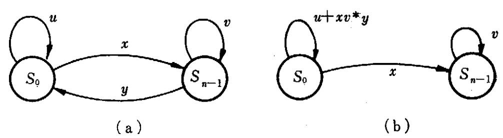


図 3　状態 $\{s_0, s_{n-1}\}$ に注目した変換

＋，・および＊を有限回しか用いていない．

なおいかなる入力系列をも受理しないオートマトンも理論上考えこのようなオートマトンは ϕ（空系列）を受理すると考える．また λ のみ受理するもの，あらゆる入力系列 J^* を受理するものも考える．有限オートマトンによって受理される系列の集合のことを正規集合（または正規事象）と呼び上記のように＋，・および＊を用いた表現のことを正規表現という．

〔定義　2〕 入力記号の集合 Σ，と λ および ϕ それに正規演算子＋，・，＊を用いて次のように帰納的に定義されるものを正規表現と呼ぶ．

（i）一つの入力記号，一つの ϕ，一つの λ は正規表現である．

（ii）P と Q が正規表現なら $P+Q$，$P\cdot Q$ および P^* も正規表現である．

（iii）上記の（i），（ii）のステップを有限回繰り返して得られるもの以外は正規表現でない．

注） 任意の正規表現 P に対し　$\lambda P=P\lambda=P$，$\phi P=P\phi=\phi$，$\phi^*=\lambda$．

〔定理　1〕（Kleene）一つの有限オートマトンによって受理される入力系列の集合は正規集合である．また逆に任意の正規集合に対してこれを受理する有限オートマトンが存在する．

すべてのオートマトンは入力信号の系列を受け，これを判別して，それに応じた特有の反応を示すものであるから，入力信号の系列はオートマトンに話しかける言葉である．"one-sided linear" つまり正規表現で表わしうる文法を持った言語を識別するオートマトンとしては有限オートマトンで十分であり，逆に有限オートマトンに識別できる言語の文法は "one-sided linear" でなければならないということを〔定理　1〕は述べている．

"正規表現の導演算" は正規表現から対応するオートマトンの状態図を求める手段として J. A. Brzozowski が導入したものである．正規集合 R の入力系列 a に関する導集合は次式によって定められる．

$$DaR=\{v\,|\,av\in R\} \qquad (1)$$

（1）式の右辺は av が R に含まれるようなすべての v の集合を表わしている．）

例

1）$D_{\sigma_0}\{\sigma_0\sigma_1+\sigma_0\sigma_0\sigma_1\}=\sigma_1+\sigma_0\sigma_1$

2）$D_{\sigma_1}\{\sigma_0\sigma_1\sigma_1+\sigma_0\sigma_1\}=\phi$

（ϕ は "空" 系列の意味．これは｛　｝の中には σ_1 で始まる系列がないことを表わす）

3）$D_{\sigma_0\sigma_1}\{\sigma_0\sigma_1\}=\lambda$

（一般に DaR の中に λ が含まれておれば，それは R の中に "a" という系列があることを示す）

4）$D_{\sigma_0\sigma_1}\{\sigma_0\sigma_0+\sigma_0\sigma_1\sigma_1+\sigma_1\sigma_0+\sigma_0\sigma_1\}$
$=\phi+\sigma_1+\phi+\lambda=\sigma_1+\lambda$

5）$D_\lambda R=R$

以上非常に簡単な正規集合について（1）式の定義の意味を説明した．Brzozowski はこの導演算を用いて与えられた正規集合を受理するオートマトンの状態図を求める方法を示したが，本稿ではこの導演算を状態図の遷移構造を解析するのに用いる．この場合は導演算の内容を理解しておれば十分で具体的な求め方は知らなくてもあまりさしつかえないので，詳しいことは省略する．

4.　右合同関係

有限オートマトン $A=\langle S, M, s_0, F\rangle$ を考える．初期状態 s_0 から出発してまた s_0 に戻す入力系列の全集合を β_{00} とする．同様に s_0 から $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_{n-1}$ に移す入力系列の全集合をそれぞれ $\beta_{01}, \beta_{02}, \cdots\cdots, \beta_{0n-1}$ と書くことにする．任意の入力系列は β_{01} から β_{0n-1} のいずれかに属し二つ以上のクラスに属することはない．すなわち入力系列の全集合は n 個の互いに共通部分を持たないクラス（類）に類別された．いいかえると "初期状態 s_0 から出発して同一の状態に移す" という "関係(relation)" により全入力系列が類別されたわけである．このように一般にある集合の上で定められた "関係" によりその集合を互いにその関係にあるものどうしを一つにまとめて類を作るとき各類が共通部分のない (disjoint) 部分集合になっているときこの "関係" をその集合の上での "同値関係" と呼ぶ．

上記の "同値関係" を特に ρ_0 と書くことにする．入力系列 x, y が同じ類に属しておれば互いに ρ_0 という関係にある．これを $x\rho_0y$ と書く．この ρ_0 はさらに次のような性質を持つ：$x\rho_0y$ であれば任意の系列 z に対して $(xz)\rho_0(yz)$ が成立する．この内容は $M(s_0, x)=M(s_0, y)$ であれば $M(s_0, xz)=M(s_0, yz)$ であるということで明らかなことである．このような "同値関係" ρ_0 を右合同関係と呼ぶ（z を右から "掛けた" ので右合同関係という）．

〔定義　3〕 集合 E の上での同値関係 R が E の任意の要素 x, y, z に対して xRy であれば $(xz)R(yz)$ が成立するとき R を特に右合同関係と呼ぶ（ただし xz, yz などの演算は定義されており E はこの演算のもとに閉じているとする）．

同様に左合同関係を定義することができる．右合同関係でかつ左合同関係であるものを単に合同関係と呼ぶ．

有限オートマトンの入力系列は受理されるものと受理されないものとに分けられる．この類別に対する同値関係を β と表わすことにする．β は一般に右合同関係とは限らない．一つのオートマトン A の ρ_0 と β の間には次の関係（"同値関係" ρ_0 と β の間の "関係"）が成立する．　$\rho_0\leq\beta$

ρ_0 は β より大きくないわけである．この内容を式で表

わすと次のようになる．

$(\forall x, y)J^*$〔$x\rho_0 y \Rightarrow x\beta y$〕

この式は J^* の任意の要素（有限系列）x, y に対して x と y が ρ_0 という関係にあれば必ず β という関係にもあるということを表わしている．

〔定義 1〕において有限オートマトン A の S は(内部）状態の集合を表わしているが，これは″(内部）状態″という名前にこだわることはないわけで，何かある集合 B をとってきて，B の要素 b と（入力）記号 σ の組 (b, σ) に対して B の要素を対応させる対応関係（〔定義 1〕の M）が定められておればこれを（有限）オートマトンと考えてもさしつかえないであろう．というのは集合 B を状態の集合 S でおきかえれば，今までの意味での（有限）オートマトンができ，前者と後者の代表構造はまったく同じで，ただ名前のつけ方が違っているにすぎないから．

このように考えると（入力）記号の集合 $\Sigma=\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{k-1}\}$によってできる有限系列の全集合 J^* の上での一つの右合同関係 ρ に対して一つのオートマトンを考えることができる．それは次のようにする．まず ρ による同値類の集合 $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots\cdots\}$ を考え（これを〔定義 1〕の S に対応させる）系列 x が β_i に含まれておれば β_i を C_x^ρ と書くことにする．任意の同値類 C_x^ρ と（入力）記号 σ の組 (C_x^ρ, σ)（つまり C_x^ρ と σ の直積）に対して同値類 $C_{x\sigma}^\rho$を対応させることにする．〔定義 1〕の M を用いれば

$$M(C_x^\rho, \sigma)=C_{x\sigma}^\rho \tag{2}$$

と定義するわけである．系列 x, y が ρ という関係にあれば C_x^ρ も C_y^ρ も同じ類（ある β_i）を表わしているはずである．つまり $C_x^\rho=C_y^\rho$ となっている．したがってこのとき任意の入力記号 σ に対して $M(C_x^\rho, \sigma)=M(C_y^\rho, \sigma)$ ゆえに $C_{x\sigma}^\rho=C_{y\sigma}^\rho$ となっていなくてはならない．ところが x と y は ρ という関係にあるので $x\rho y$．そして ρ が右合同関係なので任意の σ に対して $x\sigma\rho y\sigma$ 書きかえると $C_{x\sigma}^\rho=C_{y\sigma}^\rho$ となっている．

これが″有限″オートマトンであるためには ρ による同値類の数が有限でなくてはならない．

集合 E の部分集合 E_0 を指定するとこれによって集合 E は E_0 と $E-E_0$ に分割されるので，この分割に対応する同値関係も E_0 と表わすことにすると Nerode の定理は次のように書くことができる．

〔定理 2〕(Nerode)[11] 入力系列の部分集合 R が与えられたとき，これを受理する有限オートマトンが存在するための必要十分条件は $\rho \leq R$ となる有限位数の右合同関係 ρ が存在することである．

注) R が正規表現で与えられておれば〔定理 2〕の条件を満足する ρ は当然存在する．このような ρ のうち位数最小の ρ によって定められるオートマトンが最小の状態を持つ．

有限オートマトン A において J^* の類別の仕方として $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \cdots, \beta_{0n-1}\}$ を考えたが，初期状態 s_0 の代わりに任意の状態 s_j を考えて，同様にして $\{\beta_{j0}, \beta_{j1}, \cdots\cdots\beta_{jn-1}\}$ のような類別を作り，これに対応する右合同関係を ρ_j で表わすことにする．そしてある一つの有限オートマトン A に対して $Z_A=(\beta_{ij})$ なる $n\times n$ 行列を考えこれを A の特性行列と呼ぶことにする．また A の任意の状態 s_i から任意の状態 s_j に移す入力系列が存在するとき A は″強く連結″しているという．特性行列の要素の間に次の関係が成立することが確認できる．

〔補題 1〕

i) $\beta_{i0}+\beta_{i1}+\cdots\cdots+\beta_{in-1}=J^*$

$\beta_{ik}\cap\beta_{il}=\phi \quad (k\neq l) \quad i=0, 1, \cdots\cdots n-1$

($A\cap B$ は A と B の共通部分を表わす)

ii) β_{0i} に属する任意の x に対し $\beta_{ij}=D_x\beta_{0j}$ (ただし $\beta_{0i}\neq\phi$)

iii) $\beta_{ik}=\beta_{jl}\Rightarrow\beta_{kk}=\beta_{ll}$ (しかし $\beta_{ii}=\beta_{jj}$ は成り立つとはかぎらない)

iv) A が強く連結しておれば

$\beta_{ii}=\beta_{jj}\Rightarrow\beta_{ik}\cap\beta_{jk}=\phi \quad k=0. 1, \cdots n-1, \quad i\neq j$

証明) 系列 x が β_{ik}, β_{jk} のいずれにも含まれているとすると $\beta_{ki}=D_x\beta_{ii}=D_x\beta_{jj}=\beta_{kj}$ しかるに i) により $\beta_{ki}\cap\beta_{kj}=\phi$ でなくてはならないので矛盾する．よって $\beta_{ik}\cap\beta_{jk}=\phi$ がなりたつ．

有限オートマトンに関する入力系列の上でもう一つの同値関係 ξ を考える．例として図 4 に示す状態図について考える（以後 F は特に必要としないかぎり指定しない)．入力記号の集合 $\{\sigma_0, \sigma_1\}$ に対してばかりでなく，2, 3 の入力系列に対する状態遷移の様子を表 2 に示す．

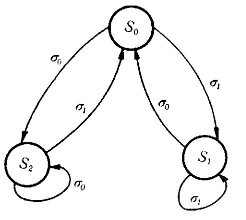


図 4 状 態 図

この表をみると入力系列 σ_0 と $\sigma_0\sigma_1\sigma_0$ に対する状態遷移はまったく同じであり，σ_1 と $\sigma_1\sigma_0\sigma_1$ についても同じことがいえる．このような系列がそれぞれ ξ という関係にあるとすれば，$\sigma_0\xi\sigma_0\sigma_1\sigma_0$, $\sigma_0\sigma_0\xi\sigma_0\sigma_0\sigma_0$ となる．これを式で表わすと次のようになる，

$$(\forall x, y)J^*, (\forall s)S〔x\xi y\Leftrightarrow M(s, x)=M(s, y)〕 \tag{3}$$

ξ は合同関係である．一つの有限オートマトン A に対する入力系列の全集合の上で定められる三つの同値関係，ξ, ρ_0, β の間には次の関係がなりたっている．

$$\xi\leq\rho_0\leq\beta \tag{4}$$

図 4 に示した状態図で初期状態は s_0, $F=\{s_2\}$ として（4）式の関係を図 5 に示す．すべての入力系列を ξ によって類別すると表 2 に示した入力系列のいずれかと同値である(図 5(a))．ρ_0, βによる類別はそれぞれ，

	σ_0	σ_1	$\sigma_0\sigma_1$	$\sigma_1\sigma_0$	$\sigma_0\sigma_0$	$\sigma_0\sigma_0$	$\sigma_1\sigma_1\sigma_0$	$\sigma_1\sigma_0\sigma_1$	$\sigma_0\sigma_0\sigma_1$	λ
S_0	S_2	S_1	S_0	S_0	S_2	S_1	S_0	S_1	S_2	S_0
S_1	S_0	S_1	S_1	S_0	S_2	S_1	S_0	S_1	S_0	S_1
S_2	S_2	S_0	S_2	S_2	S_1	S_0	S_0	S_0	S_2	S_2

表 2　状態図（図-4）の状態遷移の例

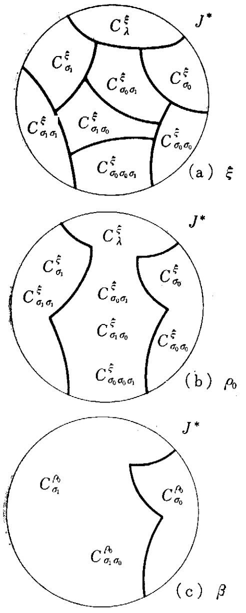


図 5　同値関係 ξ, ρ_0, β の関係

同図の(b),(c)となる．ここでたとえば(b)において $C^\xi_{\sigma_1}$, $C^\xi_{\sigma_1\sigma_1}$ を含むブロックは $C^\xi_{\sigma_1}$ および $C^\xi_{\sigma_1\sigma_1}$, に含まれる系列の集合からなるブロックをあらわす．

5. 有限オートマトンの構造

ここでいう"構造"とは有限オートマトンを具体的な順序回路として実現した場合の回路構造をさすのではなく，オートマトンの推移行列（状態図から出力に関することを除いたものと同じ情報を持つ）の構造という意味である．これはオートマトンの状態の集合から状態の集合への（自己）写像を考えることにより，自己写像の構造として表現できる．

オートマトン A の特性行列の要素は $x\epsilon\beta_{ij}$ のとき β_{ij} を $C^{\rho_i}_x$ と書くこともあることは前節でも述べた．

〔定義 4〕 有限オートマトン A において

任意の系列 $x\epsilon J^*$ に対して $C^{\rho_0}_x=C^{\rho_i}_x$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$ が成立するとき A は"状態に依存しない"という．

$C^{\rho_0}_x=C^{\rho_i}_x(\forall x\epsilon J^*)$ は $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \cdots\cdots, \beta_{0n-1}\}=\{\beta_{i0}, \beta_{i1}, \cdots, \beta_{in-1}\}$（すなはち $\rho_0=\rho_i$）とも書ける．つまり ρ_0 という同値関係によって入力系列の全集合を類別しても，ρ_i によって入力系列の全集合を類別しても同じである，ということである．図6に示す状態図で $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}\}$ と $\{\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}\}$ を比較してみると次のような関係になっていることがわかる．

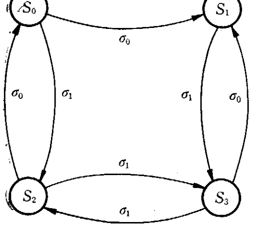


図 6　状態図の例

$\beta_{00}=\beta_{11}=\{\sigma_0\sigma_0+\sigma_1\sigma_0+(\sigma_0\sigma_1+\sigma_1\sigma_1)(\sigma_1\sigma_1+\sigma_0\sigma_1)^*\sigma_1\sigma_0+\sigma_0\sigma_0)\}^*$

$\beta_{10}=\beta_{01}=\{\sigma_1(\sigma_1\sigma_1)^*\sigma_0\}^*\{\sigma_0+\sigma_1(\sigma_1\sigma_1)^*\sigma_1\sigma_0\}\beta_{00}$

$\beta_{12}=\beta_{03}=\beta_{00}(\sigma_0\sigma_1+\sigma_1\sigma_1)(\sigma_0\sigma_1+\sigma_1\sigma_1)^*$

$\beta_{13}=\beta_{02}=\beta_{00}(\sigma_1+\sigma_0\sigma_1(\sigma_0\sigma_1)^*\sigma_1)\{\sigma_1(\sigma_0\sigma_1)^*\sigma_1\}^*$

したがって $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}\}=\{\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}\}$ である．しかしこの場合は"状態に依存しない"わけではない（実は λ を対角要素 β_{ii} に含めないとすると"状態に依存しない"）．"強く連結"しておりまた"状態に依存せず"そしてさらに $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \cdots\cdots\beta_{0n-1}\}$ が"群"をなしているものを"quasi-perfect"オートマトンと呼ぶことにする（もちろんこのとき $\{\beta_{10}, \beta_{11}, \cdots\cdots\beta_{1n-1}\}$, $\{\beta_{20}, \beta_{21}\cdots\cdots\beta_{2n-1}\}$ などもまったく同じ群を形成する）

有限オートマトン A が quasi-perfect であるための必要十分条件は比較的簡単になる．

〔定理 3〕 有限オートマトン $A=\langle S, M, s_0, F\rangle$ が quasi-perfect であるための必要十分条件は A が単に連結（初期状態を任意の状態 $s\epsilon S$ に移す入力系列が存在すること）であり，かつ $\beta_{00}=\beta_{11}=\cdots=\beta_{n-1,n-1}$ が成り立つこと．

証明)〔十分性〕まず A が強く連結していることを示す．A が強く連結していないとし $\beta_{i_1 0}=\phi$ と仮定すると $x\epsilon\beta_{0i_1}$ に対して $D_x\beta_{00}=\beta_{i_1 0}=\phi$ となる．$M(s_{i_1}, x)=s_{i_2}$ とすると $i_2\neq 0$ で $\beta_{i_2 0}=D_{xx}\beta_{00}=\phi$. この推論を続けてゆき状態の列 $s_0, s_i, s_{i2}, \cdots, s_{il}, \cdots$ を作ると無限集合 $\{0, i_1, i_2, \cdots i_l, \cdots\}$ の中には同じ要素を含まない（同じ要素を含むとすると $\beta_{00}=\beta_{11}=\cdots=\beta_{n-1n-1}$ という仮定に反する）．これは状態数が有限ということと矛盾する．

次に A が"状態に依存しない"ことを示す．$x, y\epsilon\beta_{ij}$ かつ $x\epsilon\beta_{kl}$, $y\epsilon\beta_{km}$ なる入力系列 x, y が存在するとすると $(l\neq m)$〔補題 1〕(iii)により

$\beta_{ji}=D_x\beta_{ii}=D_y\beta_{ii}$, $\beta_{lk}=D_x\beta_{kk}=D_x\beta_{ii}$

$\beta_{mk}=D_y\beta_{kk}=D_y\beta_{ii}$

がなりたつ，ゆえに $\beta_{ji}=\beta_{lk}=\beta_{mk}$

しかるに〔補題 1〕により $\beta_{lk}\cap\beta_{mk}=\phi$ でなくてはならない．よって $\beta_{lk}=\beta_{mk}=\phi$ となるがこれは A が強く連結していることに反する．よって $x\epsilon\beta_{ij}, x\epsilon\beta_{kl}$ であれば $\beta_{ij}=\beta_{kl}$. すなわち A は"状態に依存しない"．A が"状態に依存しない"ことがわかったので演算: $C^{\rho_0}_x\cdot C^{\rho_0}_y=C^{\rho_0}_{xy}$ の成立とその一意性がいえる．あとはこの演算における単位元および逆元を示せばよい（結合則の成立は明らかなので），条件 $\beta_{00}=\beta_{11}=\cdots=\beta_{n-1n-1}$ より

$(\forall x_0)\beta_{00}, (\forall z)J^*[M(s_0, x_0z)=M(s_0, zx_0)=M(s_0, z)]$

ゆえに $C^{\rho_0}_{x_0}\cdot C^{\rho_0}_z=C^{\rho_0}_z\cdot C^{\rho_0}_{x_0}=C^{\rho_0}_z$ すなわち $C^{\rho_0}_{x_0}\equiv\beta_{00}$ が単位元である．いま $x\epsilon J^*$ を任意にとってくる．$M(s_0, x)=s_j$ とする．A は強く連結しているので $M(s_jy)=s_0$ なる $y\epsilon\Sigma^*$ が存在する．ゆえに $M(s_0, xy)=s_0$ $\therefore C^{\rho_0}_x\cdot C^{\rho_j}_y=C^{\rho_0}_x\cdot C^{\rho_0}_y=C^{\rho_0}_{x_0}$

このとき　$C^{\rho_j}_y\cdot C^{\rho_0}_x=C^{\rho_i}_{x_0}$　つまり $C^{\rho_0}_y\cdot C^{\rho_0}_x=C^{\rho_0}_{x_0}$

したがって $C^{\rho_0}_y$ は $C^{\rho_0}_x$ の逆元（$C^{\rho_0}_x$ は $C^{\rho_0}_y$ の逆元）である．

以上より $\{\beta_{00}, \beta_{01}, \cdots\cdots \beta_{0n-1}\}$ は″群″をなす．条件が必要なことは明らかである．

〔**定義**　5〕 有限オートマトン A において次式をみたす写像 f を演算を保存する自己写像（自己準同型写像）という．$(\forall s_i)S, (\forall x)J^*$ $[M(s_i, x)f = M(s_i f, x)]$ 　(4)

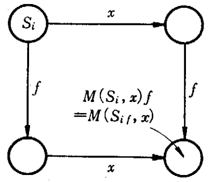


図 7　自己写像の構造

(図7を参照) $s_i f$ を s_{if} と書くことにする．

〔**補題**　2〕 有限オートマトン A の自己準同型写像を f とすると

i) $\beta_{ij} \subseteq \beta_{if, jf}$

ii) A が強く連結していれば f は自己同型写像である．つまり $\beta_{ij} = \beta_{if, jf}$ となる．

証明)　i) は定義より明らか．ii) を示す：

$\beta_{ij} \subseteq \beta_{if, jf}$ 　$\sum_j \beta_{ij} \subseteq \sum_j \beta_{if, jf}$

しかるに $\sum_j \beta_{ij} = J^* = \sum_j \beta_{if, jf}$

もし f が1対1写像でないとすると f の値域に含まれない整数 l が存在する．A が強く連結していれば $\beta_{if, l} \neq \phi$ であり $\sum \beta_{if jf} \subset J^*$ となりさきの結果と矛盾する．

〔**補題**　3〕 (Fleck) 有限オートマトン A の自己同型写像の全体は群をなす．これを G_A と書く．A が強く連結していれば G_A は″正則置換″からなる群である．

正則置換というのは置換を順回置換の積として表わしたとき各順回置換のサイクルの長さが同じものをいう．たとえば集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の上で考えると(12)(34)(56), (135)(246)などは正則置換である．″正則置換からなる群としては単位元を e と書くと $\{e, (12)(34)(56)\}$ $\{e, (123)(456),\ (132)(465)\}$ などがある．(図6で考えるとこの自己同型群は $\{e, (01)(23)\}$である．) ただ″正則置換群″は″正則置換からなる群″とは異なることを注意しておく．正則置換群としては $\{e, (641325), (612)(435),\ (621)(453),\ (63)(42)(15),\ (523146)\}$ をあげることができる．正則置換群は正則置換からなる群でかつその位数が置換される対象の要素の数（今の場合は6）に等しい群のことである．

入力が状態を置換しておれば同値関係 ξ（(3)式）によって入力系列を類別するとこの集合属は群をなす．

〔**補題**　4〕 有限オートマトン A が quasi-perfect であれば入力は状態を置換している．

証明) A の特性行列においてはその対角要素がすべて等しいので $\beta_{ik} \cap \beta_{jk} = \phi$ 　$i, j, k = 0, 1, \cdots n-1$, すなわち入力は状態を置換している．

入力が上記の意味で群をなす場合は入力群 G_I（状態の置換表現）と自己同型群 G_A の一般的関係は次式で与えられる：　$G_I = C_{S_n}(G_A)$, $G_A = C_{S_n}(G_I)$

ここで $C_{S_n}(H)$ は n 次の対称群 S_n における部分群 H の中心化群を表わす．自己同型群が正則置換群であるとき A は quasi-perfect である．

〔**定義**　6〕 有限オートマトン A は次式が成立するとき″perfect″であるという：

$(\forall x, y)\Sigma^*, (\forall s_i)S$ 　$[M(s_i, xy) = M(s_i, yx)]$ 　(5)

〔**定理**　4〕 有限オートマトン A が perfect であるための必要十分条件は $G_S = G_I$ で与えられる．

Weeg は群 G が正則置換からなる群であれば $G_A = G$ となる強く連結したオートマトンが存在することを述べその求め方を示しているが〔定理5〕を用いればこのとき入力として群をなすものを作ることができることが示される．

以上本節で取り扱ったものは″群構造を持つオートマトン″とでもいうべき範囲に属するものである．このように各入力が状態の置換を表わしている場合は特性行列の要素間の一般関係は非常に簡単になる．

〔**補題**　5〕 有限オートマトン A の入力がすべて状態を置換していればその特性行列について次の事がいえる．

g_0	g_2	g_1	g_3	g_4	g_5
g_1	g_0	g_2	g_4	g_5	g_3
g_2	g_1	g_0	g_5	g_3	g_5
g_3	g_4	g_5	g_0	g_2	g_1
g_4	g_5	g_3	g_1	g_0	g_2
g_5	g_3	g_4	g_3	g_1	g_0

表 3　群表G

i) $\beta_{ii} = \beta_{jj} \Rightarrow \rho_i = \rho_j$, したがってこのとき $s_{if} = s_j$ なる自己同型写像が存在する．

ii) 対角要素の集合を互いに等しいものどうしをまとめて一つのブロックとすると各ブロック中の要素の数は等しい．

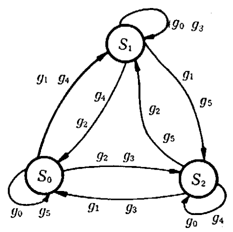


図 8　状態図

有限オートマトン A において J が特に群 G であれば S と G の部分群 H が対応し A の初期状態を変えると H のある共役部分群 H'' が対応する．たとえば表3に示す群 G の上で定められるオートマトン A として図8を考える．このとき S と G の部分群 $H = \{g_0, g_5\}$ およびその右剰余類が対応する：

$s_0 \leftrightarrow H$, $s_1 \leftrightarrow Hg_1 = \{g_1, g_4\}$, $s_2 \leftrightarrow Hg_2 = \{g_2, g_3\}$

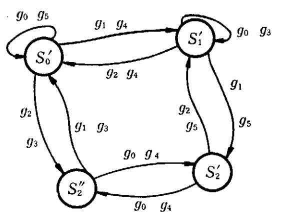


図 9　状 態 図

s_1 を初期状態とすると $H_1 = g_1^{-1} H_{g1} = \{g_0, g_3\}$, およびこの右剰余類が対応する．$s_2$ を初期状態とすると S と G の部分群 $H_2 = g_2^{-1} H g_2 = \{g_0, g_4\}$ およびこの右剰余類が対応する．すなわち一つの遷移行列に対してある部分群およびその共役部分群が対応し，初期状態を定めればこれらの部分群のうちの一つが対応する．群 G に対して図9に示すような状態図も考えられるようにあるがこの場合各入力は状態を置

換していないので群 G はもはや群とは考えない.

このように群 G の上で定められるオートマトンの遷移行列は部分群（あるいはその共役部分群）により一意的に定められる．このことを考えに入れると″自由半群 J^* の上で定められる(有限)オートマトンが quasi-perfect であるための条件がその特性行列の対角要素の構造のみによって与えられる（〔定理 3〕)″ということは，″自由半群 J^* の上で定められるオートマトンのうち各入力が状態を置換している場合は同値関係 ξ（(3)式）によって J^* を類別すると群をなす″ということを考えれば明らかになる．さらに一般的に入力が状態を置換している場合に特性行列の構造がその対角要素のみによって表現しうる（〔補題 5〕）ということも群 G の上でのオートマトンと関係づけると容易に理解することができる．しかしながら(5)式で示すような構造を持つオートマトンが群構造を持つということは自己同型写像という数学的道具を用いたからこそ容易に示すことができたと考える．

(1967 年5月 31 日受理)

参 考 文 献

1) 高橋秀俊：オートマトンとは，信学誌 (1963.11).
2) 池野信一：有限オートマトンの理論，信学誌 (同上).
3) J.A. Brzozowski: Survey of Regular Expressions and their Applications, IRE Trans. on EC, Vol. EC-9 (June 1963).
4) J.A. Brzozowski: Derivatives of Regular Expressions, J. ACM Vol.-11 No. 4 (1964).
5) 高浪五男，本多波男：有限オートマトンの遷移行列の性質，信学会　オートマトン研究会資料 (1966. 11).
6) A.C. Fleck: Isomorphism Group of Automata, J. ACM Vol.-9 (Oct. 1962).
7) R.H. Oehmke: On the Structure of an Automaton and its Input Semigroup, J. ACM Vol.-10 (Oct. 1963).
8) G.P. Weeg: The Group and Semigroup associated with Automata, Proc. of Symp. on Mathematical Theory of Automata Microwave Research Institute Symposia Series Vol. 12. Polytechnic Press Brooklyn (1963).
9) J.Meize : Structure of Monoids with Application to Automata, ibid.
10) C.A. Trauth: Group Type Automata, J. ACM Vol.-13 (Jan. 1966).
11) M.O. Rabin D. Scott: Finite Automata and Their Decision Problems, IBM Journal. (April 1959).
12) 森脇義雄　河田汎：有限オートマトンの構造について，生研3部談話会報告　Vol.-17　No. 27 (1967).
13) 野崎昭弘：有限オートマトンの遷移行列の代表的考察，信学誌，Vol. 50　No. 2 (1967).
14) J.A. Brzozowski, E.J. McClusky: Signal Flow Graph Techniques for Sequential Circuit State Diagrams, IEEE Trans. on EC Vol. EC-12 (April 1963).

(p. 25 よりつづく)

流の I_a に相当）に保たれる準無限長試料中の拡散であるので，その濃度分布は次式で与えられる．

$$\frac{I-I_b}{I_a-I_b}=1-erf\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

この式の左辺が 1/2 になる条件から $X^2 \sim Dt$ が導かれる．これに $(I_a-I_b)/2$ での X の値と $t=1.8\times10^4$ sec の値を代入して $D\simeq5.6\times10^{-11}$ cm^2, sec^{-1} が求められる．この値は Debuigen ら[4] が報告した

$$D=224\exp(-59700/RT)$$

を用いて計算した値，2.49×10^{-11} cm^2・sec^{-1}より大きい．

しかし，実際には吸収電流と濃度とは簡単な比例関係が成立しないこと，および溶解拡散と同時に酸化層の形成が進行しているために酸化層と金属の境界位置がじょじょに移動することを考えると，前述の程度の一致は，むしろ偶然と言える．

さらに信頼できる結果を求めるためには次のような考慮が必要である．

吸収電流値から正しい濃度を求めるためには，あらかじめ組成既知の試料について測定して検量曲線を作っておくか，または，平均原子番号 Z_{AB} と組成 C に関する式

$$Z_{AB}=C_AZ_A+C_BZ_B$$

を用いて，計算によって平均原子番号を求め，次に実験的に求められている後方散乱率の原子番号依存性[5] から吸収電流の変化を求める．

境界位置の移動については，移動による影響を考慮して拡散方程式を解かなければならない．もし拡散率が濃度に依存しない場合には，これを解くことは一般に可能である[6]．

ところで，吸収電子測定法は原子番号が互いに接近した元素が共存して溶解している場合に，それぞれを分離して測定することはできない．この点は，重要な欠点である．

最近，渡辺と棟方[7] は電子ビームによる抵抗測定法に関して報告している．その方法は，金属中に溶解したガスの分布を抵抗変化から観察することを，原理的には可能ならしめるものであり，あわせて，規則配列に伴う抵抗変化をミクロ的に観察するのに応用できるかも知れない点で興味がもたれるものである．

(1967 年6月 13 日受理)

文　献

1) B. Holmberg and T. Dagerhamn: Acta Chem. Scand. 15, 919 (1961).
2) B. Holmberg: Acta Chem. Scand. 16, 1245 (1962).
3) S. Yamaguchi, M. Koiwa and M. Hirabayashi: J. Phys. Soc. Japan 21, 2096 (1966).
4) J. Debuigne and P. Lehr: IAEA Conference on the Corrosion of Reactor Materials, Salzburg, June (1962).
5) E.J. Sternglass: Phys. Rev. 95, 355 (1954).
6) J. Crank: The Mathematics of Diffusion, Ch VII, 99 (1964).
7) H. Watanabe and C. Munakata: Japan. J. appl. Phys. 4, 250 (1965).