研　究　速　報

UDC 535.317.1 : 519.272.1

光学にあらわれる相関関数のガウス曲線による近似法

An Approximate Method by The Gaussian Curve for The Correlation Function in Optics

鈴 木 恒 子・小 瀬 輝 次

Tsuneko SUZUKI and Teruji OSE

1. はしがき

光学系の Optical Transfer Function (O.T.F.) を求める一つの方法に相関法[1] というのがある．これは写真の銀粒子の拡大パターンなどのランダム物体を被写体として用い，光学系によるこの像の相関関数を測定し，これをフーリエ変換する．すなわち物体のスペクトル分布 $B(\omega)$，光学系の O.T.F. $H(\omega)$，相関関数 $\Phi(x)$ のフーリエ変換を $P(\omega)$ とすると $P(\omega)=|H(\omega)B(\omega)|^2$ の関係があるから，$B(\omega)$ を知って $|H(\omega)|$ が求められる．

$\Phi(x)$ のフーリエ変換は数値積分で行なわれるが，これを精度よく行なうためには多くのデータを実測した関数値から拾わねばならない．図1は，関数 $\Phi(x)=\exp$

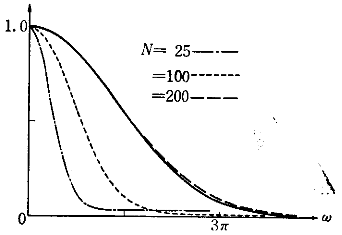

図 1

$(-9x^2)$ を例にとって，矩形近似でフーリエ変換を行なうとき，サンプル点の数 N によってどの程度の近似が得られるかを示したもので，図から $N=200$ でようやく原関数に近くなることがわかる．このように多数の点を読みとることは，労力が大変であるばかりでなく測定精度，とくに相関計や記録計の送り精度を考慮すると，意味のないデータを拾う場合も生じてくる．

光学系の O.T.F. について佐柳[2] はガウス曲線を用いてかなりよい近似が得られることを示したが，相関法の場合は物体がランダム状でありそのスペクトルはガウス曲線に近いので，これの相関関数もガウス曲線に近いことが予想される．それで相関関数をガウス曲線の和

$$\Phi(x)\simeq\sum_i a_i\exp\{-b_i(x-c_i)^2\},\qquad x,\ c_i\epsilon\boldsymbol{x}$$

と近似することは物理的には意味がある．この場合ガウス曲線のフーリエ変換はまたガウス曲線であるから，数値積分の必要はなく，原関数の近似精度のみを考えればよくなる．以下，この近似法の数学的背景を考察し，最小自乗法で近似したときの精度を図1の例について検討してみた．

2. 理論的考察

i) Weierstrass の定理によれば，ある有限な領域内で連続な関数は有限な多項式で近似できる．$\Phi(x)$ に関するこのような近似式を下記のように m 次の多項式 $F(x)$ であるとする．

$$F(x)=\sum_{i=0}^{m} d_i x^i,\qquad x\epsilon\boldsymbol{x}\qquad (1)$$

ここに領域 $\boldsymbol{x}$ は便宜上 [0.1] とする．一方 $m+1$ 個の相異なる $x_j\epsilon\boldsymbol{x}(j=0,\cdots m)$ に関して $F(x)$ はまた

$$F(x_j)\simeq F_1(x_j)=\sum_{i=0}^{l}a_i\exp\{-b_i(x_j-c_i)^2\},\qquad c_i\epsilon\boldsymbol{x}$$

とガウス曲線の和であらわせると仮定する．上式は exponential の項を冪級数展開すれば

$$\sum_{i=0}^{l}a_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{-b_i(x_j-c_i)^2\}^n}{n!}=\sum_{i=0}^{l}a_i\sum_{n=0}^{\infty}c_{in}x_j{}^n$$

となり，この展開の収斂半径は無限大であるから，任意の $\varepsilon>0$ にたいして，不等式

$$\sum_{n=n_i}^{\infty}\frac{1}{n\,!}|\{-b_i(x_j-c_i)^2\}^n|<\varepsilon\qquad (2)$$

を満足する n_i がそれぞれ (b_i,c_i) の組について存在する．いま n_i の最大値を n_m とすれば，n_m 次の多項式による近似の最大誤差は $\varepsilon\sum_{i=0}^{l}|a_i|$ であるから，$m\geq n_m$ に対しては

$$|F_1(x_j)-\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{l}a_ic_{in}\right)x_j{}^n|\leq\varepsilon\sum_{i=0}^{l}|a_i|$$

が成立し，

$$F(x)\simeq\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{l}a_ic_{in}\right)x^n\qquad (3)$$

と近似したときの最大誤差は

$$\max|F(x)-F_1(x)|+\varepsilon\sum_{i=0}^{l}|a_i|\qquad となる．$$

(1)式と(3)式の係数を比較すれば　$d_n=\sum_{i=0}^{l}a_ic_{in}$

すなわち
$$\begin{pmatrix} c_{00} & \cdots\cdots & c_{l0} \\ \vdots & \boldsymbol{C}^t & \vdots \\ c_{0m} & \cdots\cdots & c_{lm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_m\end{pmatrix}$$

a_i が一意的に定まるためには，$m=l$ でしかも行列 $\boldsymbol{C}$ が正則でなければならない．逆に，(2)の条件を満足ししかも行列 $\boldsymbol{C}$ が正則であるような (b_i,c_i) を求めることができれば，これらを用いてガウス曲線による近似が可

能となる．

ii) 係数の決定には次のように最小自乗法を用いると取扱いが容易である．まず与えられた測定値（$F(x_j)$; $j=0,\cdots m$）に対して（c_i; $i=0,\cdots n$）を適当に定め，誤差関数 T を次のように定義する．

$$T(a_0,b_0;\cdots a_n,b_n)=\sum_{j=0}^{m}\Big[\sum_{i=0}^{n}a_i\exp\{-b_i(x_j-c_i)^2\}-F(x_j)\Big]^2$$

T が最小値をとる（a_i, b_i）の組を求めるわけであるが，ここでは計算を簡単にするために b_i は定数 α と考える．したがって T は a_i のみの関数となり

$$T(a_0,\cdots a_n)=\sum_{j=0}^{m}\Big[\sum_{i=0}^{n}a_i\exp\{-\alpha(x_j-c_i)^2\}-F(x_j)\Big]^2$$

となるから，Tが点 $P(\bar{a}_0,\cdots\bar{a}_n)$ で極小値をとると仮定しその近傍で Taylor 展開すれば

$$T(\bar{a}_0+\varepsilon_0,\cdots\bar{a}_n+\varepsilon_n)=T(\bar{a}_0,\cdots\bar{a}_n)+\sum_{l=0}^{n}\varepsilon_l\frac{\partial T}{\partial a_l}+\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_l\,\varepsilon_k}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial a_l\partial a_k}$$

と3項の和であらわされる．仮定により右辺第2項は0，また十分小さい任意の $\varepsilon_l\neq0$ に対して左辺は右辺第1項より常に大きいから第3項は正でなければならない．したがって

$$\frac{\partial^2 T}{\partial a_l\partial a_k}=2\sum_{j=0}^{m}\exp[-\alpha\{(x_j-c_k)^2+(x_j-c_l)^2\}]=2E_\alpha(k,l)$$

を用いて

$$(\varepsilon_0\cdots\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix}E_\alpha(0,0)\cdots\cdots\cdots E_\alpha(n,0)\\ \vdots\qquad \boldsymbol{E}^t \qquad\vdots\\ E_\alpha(0,n)\cdots\cdots\cdots E_\alpha(n,n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_0\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}>0 \quad (4)$$

が0ではない任意の行列 $\boldsymbol{\varepsilon}$ について成立しなければならない．すなわち行列 $\boldsymbol{E}$ は正値定符号であることが必要となるが，明らかに $\boldsymbol{E}$ は対称行列であるからこれが正値定符号であるためには正則な主小行列からなっていればよい．行列 $\boldsymbol{E}$ は α と c_i の関数であるから，$\boldsymbol{E}$ が正則な主小行列をもつように α と c_i を適当に選ぶことにより $\boldsymbol{E}$ は正値定符号となり，T が $P(\bar{a}_0,\cdots\bar{a}_n)$ で極値をとるならばそれは極小値となる．その条件は

$$\frac{\partial T}{\partial a_l}=2\sum_{j=0}^{m}\Big[\sum_{i=0}^{n}a_i\exp\{-\alpha(x_j-c_i)^2\}-F(x_j)\Big]\times\exp\{-\alpha(x_j-c_l)^2\}=0$$

が $a_l(l=0,\cdots n)$ について成立することで，これを行列表示すると

$$\begin{pmatrix}E_\alpha(0,0)\cdots E_\alpha(n,0)\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ E_\alpha(0,n)\cdots E_\alpha(n,n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=0}^{m}F(x_j)\exp\{-\alpha(x_j-c_0)^2\}\\ \vdots\\ \sum_{j=0}^{m}F(x_j)\exp\{-\alpha(x_j-c_n)^2\}\end{pmatrix}$$

となるが，左辺の行列は先に述べた（4）の行列 $\boldsymbol{E}^t$ とまったく同じものなので正値定符号で，したがってすべてが0ではない（$a_0,\cdots a_n$）が存在し，しかも解はただ一通りである．

以上の理論的考察により，ガウス曲線の和で近似するときその係数が一意的に定まるということが明らかになった．次に図1の例に上記方式を適用してその近似精度を検討してみよう．

3. 計 算 例

図1に示した関数 $\Phi(x)=\exp(-9x^2)$ の値を0から1.0まで等間隔に5点拾い，その点に中心をおくガウス曲線の和として $\Phi(x)$ を近似したものが図2であり，そのフーリエ変換した結果を図3に示す．α をパラメータとして3,5,7の3通りについて計算した．実際の値は実線で示してある．よく知られているように，逆行列の計算は，その行列が対角行列に近くないかぎりまるめの誤差が非常にきいてくるので，思うような精度が得られなかった．しかし図1の例のように，通常の計算法では $N=200$点程度を必要とするのに，この方式ではわずか5点ですむので実用的にはかなり有望な方式と考えられ，さらに iteration を用いて精度をあげることを検討中である．

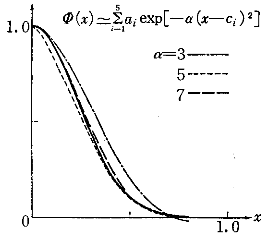

図 2

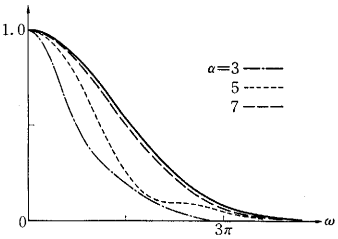

図 3

4. む す び

相関関数のフーリエ変換という問題は，これ以外にも写真の被写体あるいは感光材料の粒状のパワースペクトルの測定[3] など光学ではしばしばあらわれ，こういった相関関数はまたガウス曲線に近い場合が多いので，この近似法は比較的ひろい適用範囲をもつと考えられる．

(1967 年5月 15 日受理)

文 献

1) H.KUBOTA & H.OHZU; J.O.S.A. **47**, 666 (1957).
2) 私信
3) 大上信吾; 応用物理 **29**, 169 (1960).