

不規則分布係数波動方程式の解析

—変断面棒の縦振動—

The analysis of a wave equation possessing randomly distributed parameter
—Longitudinal vibration of the variable cross sectional bar—

宮本 昌幸・柴田 碧

Masayuki MIYAMOTO and Heki SHIBATA

1. まえがき

最近のように種々の構造物が非常に複雑になってくると、その応答波形も複雑になってきて、従来の波形による取り扱いが困難となる。本研究は系をあらわすパラメータを統計的な量として扱い、応答波形との間に対応をつけることを目的とする。このことはパラメータの確定的な値は知ることができず、統計的な値のみが既知であるような多くの実際上の問題（たとえば地震波が基盤から地表へ、不規則に性質の変化する地層の中を反射、透過を繰り返して伝わっていくときの地表での地震波の問題など）においても、その応答を推定するのに有効である。ここではこのような複雑な系として、係数が不規則に分布する1次元波動方程式であらわせる系を考える。これは不規則変断面棒の縦振動の基礎方程式なので実際のモデルとしては、不規則変断面棒の縦振動でのステップ応答と固有振動数について考える。

2. ステップ応答

(1)式が今後扱う不規則変断面棒の縦振動の基礎方程式で、アンダーライン部が不規則分布係数である。

$$\frac{\partial^2 U(X, T)}{\partial X^2} + \frac{d(\log s(X))}{dX} \cdot \frac{\partial U(X, T)}{\partial X} = \frac{\partial^2 U(X, T)}{\partial T^2} \quad (1)$$

$U(X, T) = u(x, t)/l$, $X = x/l$, $T = t/(l/a)$, $u(x, t)$: 変位, t : 時間, a : 波動の伝ば速度, l : 棒の全長, $s(X)$: 棒の断面積

断面の変化、すなわち半径 $r(x)$ の変化を無次元微小量を用いて $r(x) = r_0(1 + P(x))$ とあらわし、 $P(lX)$, $dP(lX)/dX$ の大きさが ε のオーダーと仮定すると $d(\log s(x))/dX$ は(2)式となる。

$$\frac{d(\log s(X))}{dX} = (1 - P(X) + O(\varepsilon^2)) \cdot \frac{dP(X)}{dX} \quad (2)$$

(3)式なる微分演算子を導入し(2)式と共に用い、(1)式は(4)式となる。

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\partial^2}{\partial T^2}, \quad \varepsilon \varepsilon_1 = 2(1 - P(X)) \cdot \left(\frac{dP(X)}{dX} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial X} \quad (3)$$

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon \varepsilon_1)U(X, T) = 0 \quad (4)$$

(4)式の両辺に ε_0^{-1} を乗じ(5)式を得、その右辺の U にさらに同じ(5)式を代入し ε^2 以上を無視すると(6)式を得る。

$$U(X, T) = U_0(X, T) - \varepsilon \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_1 U(X, T) \quad (5)$$

$$U(X, T) = U_0(X, T) - \varepsilon \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_1 U_0(X, T) \quad (6)$$

(6)式が任意断面棒の縦振動の変位の基本解である。

$U_0(X, T)$ は一様断面棒の解で既知のものだから、後は右辺第2項を求めればよい。それには波動方程式のグリーン関数を用いて X, T により定まる範囲にわたって積分すればよい。結局両端自由の境界条件のもとでのひずみのステップ応答が、たとえば $X < T(2-X)$ で(7)式と求まる。

$$\frac{\partial U(X, T)}{\partial X} = -\frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \int_0^X \frac{dP(\xi)}{d\xi} (1 - P(\xi)) d\xi - \int_X^{(X+T)/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \cdot (1 - P(\xi)) d\xi \right] \quad (7)$$

また一端固定、他端自由の境界条件のもとでの固定端のひずみは、たとえば $1 < T < 3$ で(8)式となる。

$$\frac{\partial U(X, T)}{\partial X} = -\frac{\sigma_0}{E} \left[2 + \int_0^1 \frac{dP(\xi)}{d\xi} (1 - P(\xi)) d\xi + \int_{(3-T)/2}^1 \frac{dP(\xi)}{d\xi} \cdot (1 - P(\xi)) d\xi \right] \quad (8)$$

σ_0 : ステップ状初期応力の大きさ, E : ヤング率

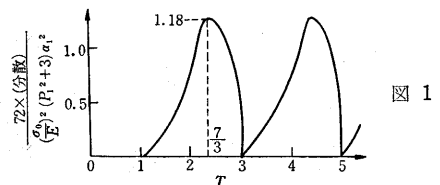
次に $P(X)$ そのものはわからず $P(X)$, $dP(X)/dX$ の棒の全長についての、それぞれ独立な度数関数 $p(P)$, $q(P')$ のみがわかったときの固定端でのひずみの平均、分散を式(8)を基にして求めた。たとえば半径、こう配が様に分布するときの場合を表1に示し、分散の時間的变化を図1に示す。

3. 固有振動数

(1)式で $U = \bar{U}(X) \cdot e^{i p t}$ と置き変数分離をし、求める任意断面棒の固有振動数 p^2 を一様断面棒の固有振動数

表1 半径、こう配が様に分布するときのひずみの平均、分散

| | |
|---|---|
| $p(P) = \begin{cases} 1/2P_1 & P \leq P_1 \\ 0 & P > P_1 \end{cases}$ | $q(P') = \begin{cases} 1/2\alpha_1 & P' \leq \alpha_1 \\ 0 & P' > \alpha_1 \end{cases}$ |
| 平均 = $-\frac{\sigma_0}{E}$ | 分散 = $\frac{(3-T)(T-1)^2(3+P_1^2)\alpha_1^2\sigma_0^2}{72E^2}$ |



p_0^2 とそれからの変化分 εp_1^2 の和と考え $p^2 = p_0^2 + \varepsilon p_1^2$ と置き、ステップ応答の時と同様な操作をすると U は (9) 式となる。

$$U(X) = \overline{U_0(X)} - \varepsilon \mathfrak{M}_0^{-1} \mathfrak{M}_1 \overline{U_0(X)} \quad (9)$$

$$(\mathfrak{M}_0 = d^2/dX^2 + l^2 p_0^2/a^2, \quad \varepsilon \mathfrak{M}_1 = 2(dP/dX) \cdot d/dX + \varepsilon l^2 p_1^2/a^2)$$

棒の半径 r が (10) 式のように \sin 関数で変化するときの一端固定他端自由のもとでの固有振動数は (9) 式を用い (11) 式となる。(j は j 次の固有振動数を示す)

$$r(x) = r_0 \left(1 + \varepsilon \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right) \quad (10)$$

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{0j} & i: \text{奇数} \\ p_{0j} \sqrt{1 + \frac{8i\varepsilon}{(\pi(i^2 - (2j-1)^2))}} & i: \text{偶数} \end{cases} \quad (11)$$

(11) 式は i が奇数の時には固有振動数には変化があらわれず、 i が偶数の時には $i=2j$ で固有振動数のずれは最大となり $i=2j-2$ で最小となることを示している。この様子を図 2 に示す。一般に半径が不規則に変化する棒について

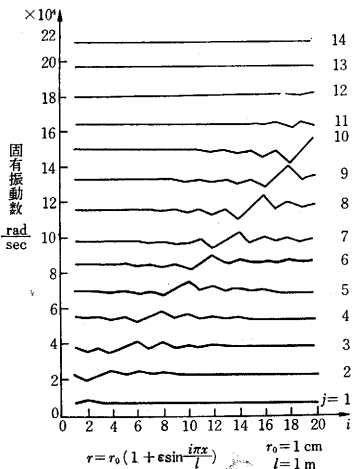


図 2

は、まず半径の変化を (12) 式のように Fourier 級数に展開して \sin 状断面のときと同様に求めると (13) 式となる。

$$r(x) = r_0 \left[1 + \varepsilon \left\{ a_1 \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) + a_2 \cos \left(\frac{2\pi x}{l} \right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + b_1 \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) + \dots \right\} \right] \quad (12)$$

$$p_j = p_{0j}^2 + \varepsilon \left[\sum_{i=2,4,6,\dots} p_{1ji}^2 \sin^2 b_i + p_{1j(2j-1)}^2 \cos^2 a_{2j-1} \right] \quad (13)$$

(13) 式は一端固定、他端自由の任意断面棒の固有振動数の一様断面棒の固有振動数からのずれは、半径を Fourier 級数に展開したときの \sin の偶数次の係数、 \cos の $(2j-1)$ 次の係数が影響し、その係数 b_i, a_{2j-1} を重みとした \sin 状断面棒、 \cos 状断面棒の固有振動数のずれ $\varepsilon p_{1ji}^2 \sin^2 b_i, \varepsilon p_{1j(2j-1)}^2 \cos^2 a_{2j-1}$ の和となっていることを示している。

4. 理論値, 多質点系近似値, 実験値の比較

多質点系近似値とは棒の縦振動をばね、質量が交互に

直列につながれている系で近似した場合の値である。

実験は鋼製試料棒に半導体ゲージをはり直接シンクロに出力を入れ観測した。

ステップ応答 ここでは一例としてテーパ棒に両端自由の境界条件のもとでステップ状の力が加わったときの $A-A'$ 断面の応力変化を前記の 3 者について比較した結果を図 3 に示す。多質点系近似によるものだけが始めの期間でこう配が逆なのは、実験においてのハンマー中を波が 1 往復する間はハンマー、試料棒が一体となって運動しているということを考慮してないためである。その他の期間では 3 者は定性的によく一致している。

固有振動数 \sin 状断面棒およびテーパ棒の一端固定、他端自由のもとでの固有振動数の理論値と多質点系近似値との比較を図 4 に示す。両者はよく一致している。

5. ま と め

(イ) 1 次元波動方程式で空間微分項の係数が任意に空間的に微小変化する場合のステップ応答、固有振動数を摂動法で理論的に求めた。

(ロ) (イ) で求めた理論式で、パラメータが統計量であることを考慮してステップ応答の統計量を求めた。

(ハ) \sin, \cos 状断面棒, テーパ棒, 不規則断面棒な

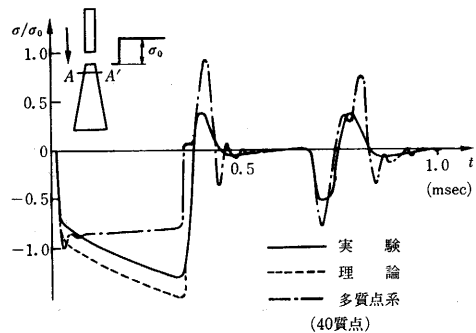


図 3

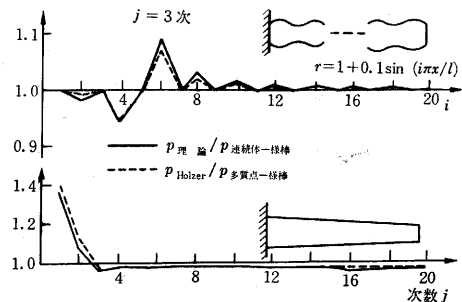


図 4

どについてステップ応答、固有振動数を、理論値、多質点系近似値、実験値の 3 者で比較を行ないよい一致をみた。(1967 年 4 月 26 日受理)