研 究 速 報

UDC 535.412

幾何光学によるホログラフィの結像

Geometrical Optical Treatment for Holography

小 瀬 輝 次

Teruji OSE

ホログラフィの結像論はすでに Leith[1], Meier[2] により波動光学的，あるいは波面光学的に取り扱われ，レンズ系の結像には無い特色や，再生像の収差が求められている．これらの方法では理論式が複雑になるので理論の所期に近似を用いるのでレンズ系の近軸光線に対応する結像式のみが求められる．また Offner[3] は回折格子の回折式を用い光線追跡を試みている．しかしホログラムに記録される物体光と参照光でつくる干渉縞の空間周波数は未知とする代わりに，ホログラムの再生時に再生光源を参照光と同一のものを用いれば理想的な結像が得られるというホログラフィの結像条件を既知として用いているので，これから一般的な結像式を導くことはできない．

これと同じ手法であるが， Offner が未知としたホログラム上の干渉縞の空間周波数として，通信理論で用いられている瞬時周波数の概念を適用して回折式を一般化すると，幾何光学的にホログラフィの一般的な結像式が導かれる．

今1次元で考え，光路差 $\Delta(y)$ の二つの光の波面が干渉して作る y 軸上の干渉縞の強度分布の変動成分は $\cos\{2\pi\Delta(y)/\lambda\}$ で与えられる．

通信の周波数変調波は一般に $\sin\{\phi(t)\}$ で与えられ，これの瞬時周波数は

$$f=\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

で定義される．

この定義を光学にも適用し干渉縞の場合 $\phi(t)$ の代わりに $2\pi\Delta(y)/\lambda$ を用い，空間周波数を

$$u=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dy}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta(y)\right)=\frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta(y)}{dy}$$

と定義する．これを局所空間周波数[4]と呼ぶことにする．

1次元の格子常数 d の回折格子に格子方向に直交し，かつ垂直な平面内では入射角 i と回折角 θ の間には

$$\sin i+\sin\theta=\pm\frac{n\lambda}{d},\quad n=1,\ 2,\ 3\cdots$$

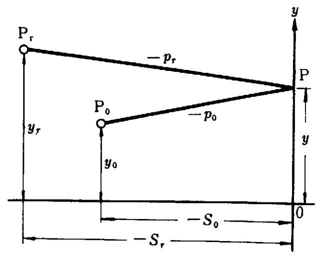
の関係がある．

ホログラムは参照光と物体光の干渉によって生じる干渉縞をフィルムに記録するので，その縞は再生のときには回折格子の役割をなす．この干渉縞の格子常数 d は一般に場所により変化しているので，$1/d$ の代わりに前記の局所空間周波数 u を用いれば

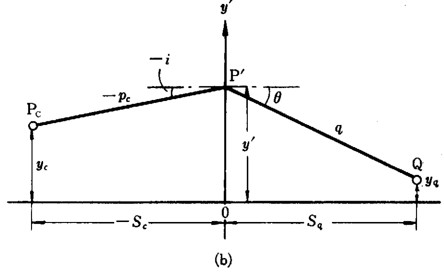
$$\sin i+\sin\theta=\pm\lambda u \qquad (1)$$

がホログラム再生のときの照明光と結像光の関係式となる．u はホログラムの製作時の条件で決まるから，この式はちょうどレンズ系を幾何光学で取り扱うときの屈折の式に相当する．ここで $n=1$ と ±1 次の回折波のみを考えたが，ホログラムでは入射強度に比例する振幅透過率が得られるのが理想であるから高次の回折波は無視してもさしつかえない．

以下簡単のために1次元で考え，かつ参照光源，物点，再生光源はすべて，ホログラムの子午的面内にあるとする．



(a)



(b)

図1

図1(a)のようにホログラム面上に座標 y をとり，その上の一点 P から点物体 P_0，参照光源 P_r までの距離を p_0，p_r とするとP点における干渉縞は光路差 $\Delta=p_r-p_0$ で決まり空間周波数 u は

$$u=\frac{1}{\lambda}\frac{d(p_r-p_0)}{dy}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dp_r}{dy}-\frac{dp_0}{dy}\right)$$

もしこのホログラムを m 倍に引き伸ばせば u は $1/m$ になるから

$$u'=\frac{1}{m\lambda}\left(\frac{dp_r}{dy}-\frac{dp_0}{dy}\right)$$

となる．

再生は図1(b)のように波長 λ' の光で点光源 P_c よ

りホログラムを照明し，その像はQに生じたとする．ホログラム上に座標 $y'=my$ をとりその上の一点 P′ より P_c, Q までの距離を p_c, q とおくと，

$$p_c=\sqrt{s_c^2+(y'-y_c)^2},\quad q=\sqrt{s_q^2+(y'-y_q)^2} \text{ より}$$

$$\sin i=\frac{y'-y_c}{p_c}=-\frac{dp_c}{dy'},\ \text{同様に}\ \sin\theta=\frac{dq}{dy'}$$

したがって（1）式は

$$\frac{dq}{dy'}-\frac{dp_c}{dy'}=\pm\lambda' u'=\pm\frac{\lambda'}{m\lambda}\left(\frac{dp_r}{dy}-\frac{dp_c}{dy}\right) \qquad (2)$$

ただし　$y'=my$

これが結像の一般式となる．

$$\frac{dq}{dy'}=\frac{y'-y_q'}{q},\quad \frac{dp_r}{dy}=\frac{y-y_r}{p_r}=\frac{\dfrac{y'}{m}-y_r}{p_r}$$

などを用いて上式を書きなおすと

$$\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_c}\right)y'-\left(\frac{y_q'}{q}-\frac{y_c'}{p_c}\right)=\pm\frac{\mu}{m}\left[\frac{y'}{m}\left(\frac{1}{p_r}-\frac{1}{p_0}\right)-\left(\frac{y_r}{p_r}-\frac{y_0}{p_0}\right)\right]$$

ここに $\mu=\lambda'/\lambda$

上式が y' に無関係に成立するためには

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{q}-\frac{1}{p_c}&=\pm\frac{\mu}{m^2}\left(\frac{1}{p_r}-\frac{1}{p_0}\right)\\ \frac{y_q'}{q}-\frac{y_c'}{p_c}&=\pm\frac{\mu}{m}\left(\frac{y_r}{p_r}-\frac{y_0}{p_0}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

が成立すればよい．

これは近似なしの結像式である．上式の左辺は再生時，右辺は製作時の量であり，ちょうど屈折系の Abbe の不変量に相当するものと考えることができる．

（3）式は y' を含まないから光線追跡のためには適当に y' を与え p_0, p_r, p_c を決めれば q と y_q を求めることができる．

ホログラムの原点からの P_r, P_0, P_c, Q までの距離をそれぞれ，p_r', p_0', p_c', q' とおくと，たとえば

$$p_r=\sqrt{s_r^2+(y-y_r)^2},\quad p_r'=\sqrt{s_r^2+y_r^2} \text{ より}$$

$$p_r=p_r'+\frac{1}{2}\left(\frac{y^2-2yy_r}{p_r'}\right)+\cdots\cdots$$

と展開してはじめ第2項までをとれば

$$\frac{dp_r}{dy}=\frac{y-y_r}{p_r'}$$

すなわち，1次近似では $dp_r/dy=y-y_r/p_r$ の代わりに $y-y_r/p_r'$ を用いてよいことがわかる． その結果，1次近似での結像式は（3）式の q, p_c, p_r, p_0 すべてを q', p_c', p_r', p_0' を用いて書けば求められる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{q'}-\frac{1}{p_c'}&=\pm\frac{\mu}{m^2}\left(\frac{1}{p_r'}-\frac{1}{p_0'}\right)\\ \frac{y_q'}{q'}-\frac{y_c'}{p_c'}&=\pm\frac{\mu}{m}\left(\frac{y_r}{p_r'}-\frac{y_0}{p_0'}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

さらに近似をすすめて p_r', p_0', p_c', q' の代わりに軸上の距離を用い，$p_r'\simeq s_r$, $p_0'\simeq s_0$, $p_c'\simeq s_c$, $q'\simeq s_q$ を用いると（3′）式は Meier の導いた結像式[2]を与える．

Meier は倍率については近似式のみを導いている．近似なしのときを上式を用いて求めてみると，

A）　横倍率は $M_{\text{Lat}}=dy_q/dy_0$ で定義され

$$M_{\text{Lat}}=\mp\frac{\mu}{m}\left(\frac{d^2p_0}{dy\,dy_0}\right)\bigg/\left(\frac{d^2q}{dy'\,dy_q}\right)=\mp\frac{\mu}{m}\frac{q}{p_0}$$

近軸では $M_{\text{Lat}}'=\mp\dfrac{\mu}{m}\dfrac{q'}{p_0'}=\dfrac{m}{1\mp\dfrac{m^2}{\mu}\dfrac{p_0'}{p_c'}-\dfrac{p_0'}{p_r'}}$

さらに近似を進め軸上の値 s_0, s_r, s_c を用いれば，上式は Meier の導いた式となる．

B）　縦倍率は $M_{\text{Long}}=ds_q/ds_0$ で定義され

$$M_{\text{Long}}=\pm\frac{\mu}{m}\left(\frac{d^2\Delta}{dy\,ds_0}\right)\bigg/\left(\frac{d^2q}{dy'\,ds_q}\right)$$

$$=\mp M^2_{\text{Lat}}\frac{m}{\mu}\frac{q\cdot s_0}{p_0\cdot s_q}\cdot\frac{y-y_0}{my-y_q}$$

近軸では $q\simeq s_q$, $p_0\simeq s_0$ とおき，さらに $y_0/y\leq 1$, $y_q/y\leq 1$ の時

$$M_{\text{Long}}\cong\mp M^2_{\text{Lat}}\cdot\frac{1}{\mu}$$

を得る．これは Meier の導いた式であるが， 光軸のごく近傍という条件が加わることに注意しなければならぬ．

以上簡単な1次元の場合のみを用いて回折式に局所空間周波数を導入することで，幾何光学的にホログラフィの結像論が組み立てられることの大要を示した．したがってここでは符号の約束などは省略した．

この理論を3次元に拡張することは容易である．またここではホログラムには2次元的な干渉縞が記録されると考えたが，リップマン乾板などを用いた3次元的ホログラムでも回折格子の3次元的方向を導入することで容易に結像を解析することができる．さらに収差論は（3）式を出発点としてそれぞれの量に近似展開を行なえば，通常のレンズ系の収差論とまったく同じに取り扱われ Meier などの方式よりははるかに見通しの容易な収差論が組み立てられる．

(1967 年3月6日受理)

文　献

1) E.M. Leith, J. Upatnieks & K.A. Haines: J. Opt. Soc. Am 55 (1965) 981
2) R.W. Meier: ibid. 55 (1965) 987
3) Abe Offner: ibid. 56 (1966) 1509
4) T. Ose: Sci. Light 7 (1958) 85
5) 小瀬輝次，応用物理 35 (1966) 661