研　究　速　報
UDC 539. 37

弾塑性問題における剛性マトリクス

Stiffness Matrix in Plastic-elastic Problems of Continua

山　田　嘉　昭
Yoshiaki YAMADA

本稿は，有限要素マトリクス法（finite-element method）を，弾性の問題から降伏点を越えて弾塑性問題に拡張する場合，その剛性マトリクスがどのような形に書きあらわされるかを検討した結果である．出発点となる考え方は，Marcal[1),2)] によって述べられているが，弾塑性問題における剛性マトリクスを，弾性の問題におけるそれと対比して，具体的な形で提示しようとするのが主眼である．

1.　弾性問題のフック則と剛性マトリクス

弾性問題におけるフックの法則は

$$\varepsilon_{ij}=\sigma_{ij}'/2G+\delta_{ij}(1-2\nu)\sigma_{ii}/3E \qquad (1)$$

で与えられる[3),4)]．E と G は縦および横弾性係数，ν はポアソン比，$\sigma_{ii}=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$，$\sigma_{ij}'$ は偏差応力，δ_{ij} はクロネッカのデルタ記号をあらわす．（1）式を σ_{ij} について解き，その結果をマトリクスの形で表示すれば

$$\boldsymbol{\sigma}=2G\boldsymbol{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{D}^e\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{D}^e=\begin{bmatrix}\frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix} \qquad (3)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ は σ_{ij} と ε_{ij} を成分とする列マトリクスをあらわす．（2）式と（3）式で，$\boldsymbol{\varepsilon}$ のせん断成分（$\varepsilon_{ij}, i\neq j$）は工学の定義（テンソル成分の2倍）に従っている．

応力が σ_x, σ_y, τ_{xy} のみで，その他は0の平面応力問題では，（2）式と（3）式から ε_z を消去して得られる次の式が用いられるのが普通である[5)]．

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=E\boldsymbol{D}^e\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{D}^e=\frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix} \qquad (4)$$

とくに各要素間の ε_z に不連続を許すような解析手法では，（4）式によって問題が扱われるのが一般である．

2.　弾塑性問題の Reuss の式と剛性マトリクス

ここでは，降伏条件として Mises の条件を選び，応力-ひずみ関係式は，Reuss の式で与えられるものとする．

Reuss の式で，ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ の偏差成分 $d\varepsilon_{ij}'$ は

$$d\varepsilon_{ij}'=\sigma_{ij}'d\lambda+\frac{d\sigma_{ij}'}{2G},\quad d\lambda=\frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon^p}}{\bar{\sigma}}=\frac{3}{2}\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}H'} \qquad (5)$$

σ_{ij}' は偏差応力，$H'=d\bar{\sigma}/\overline{d\varepsilon^p}$，$\bar{\sigma}$ と $\overline{d\varepsilon^p}$ はそれぞれ相当応力と相当塑性ひずみ増分をあらわし

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'},\quad \overline{d\varepsilon^p}=\sqrt{\frac{2}{3}d\varepsilon_{ij}^p\, d\varepsilon_{ij}^p} \qquad (6)$$

一方において，Mises の降伏条件とその微分形は

$$\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'=\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2,\quad \sigma_{ij}'d\sigma_{ij}'=\frac{2}{3}\bar{\sigma}d\bar{\sigma}=\frac{4}{9}\bar{\sigma}^2H'd\lambda \qquad (7)$$

（5）式と（7）式を $d\sigma_{ij}'$ と $d\lambda$ について解き，$d\varepsilon_{ij}'$ または $d\varepsilon_{ij}$ の関数としてあらわせば

$$d\lambda=\frac{\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}'}{S}=\frac{\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}}{S},\quad S=\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2\left(1+\frac{H'}{3G}\right) \qquad (8)$$

$$d\sigma_{ij}'=2G\left(d\varepsilon_{ij}'-\sigma_{ij}\frac{\sigma_{kl}'d\varepsilon_{kl}}{S}\right) \qquad (9)$$

ただし（9）式では，添字記号の互換性を用い，スカラ量 $d\lambda$ を $d\lambda=\sigma_{kl}'d\varepsilon_{kl}/S$ と書きあらわしてある．

(8) 式は，よく知られている応力とひずみ増分の幾何学的表示からも明らかである．すなわち1図において，

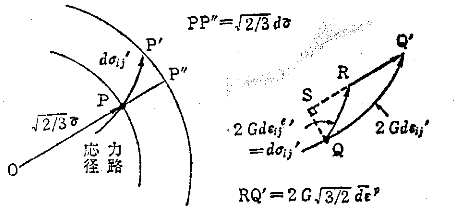

図 1　応力増分とひずみ増分の幾何学的表示

ひずみ増分を $2G$ 倍して表示すれば

OP と QQ′ のスカラ積は

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QQ}'=2G\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}'=\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}\times\mathrm{SQ}' \qquad (10)$$

一方において SQ′ は

$$\mathrm{SR}=\mathrm{PP}''=\sqrt{\frac{2}{3}}d\bar{\sigma},\quad \mathrm{RQ}'=2G\sqrt{\frac{3}{2}}\overline{d\varepsilon^p}$$

$$\mathrm{SQ}'=\mathrm{SR}+\mathrm{RQ}'=2G(1+H'/3G)\sqrt{\frac{3}{2}}\overline{d\varepsilon^p} \qquad (11)$$

(10) 式と (11) 式を組み合せると，容易に（8）式に一致する結果が導かれる．

（9）式にもどり，偏差ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}'$ が定義により

$$d\varepsilon_{ij}'=d\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}d\varepsilon_{ii}/3,\quad d\varepsilon_{ii}=d(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \tag{12}$$

で与えられることを用いると

$$d\sigma_{ij}'=2G\left(d\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\frac{d\varepsilon_{ii}}{3}-\sigma_{ij}\frac{\sigma_{kl}'d\varepsilon_{kl}}{S}\right) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}d\sigma_{ij}&=d\sigma_{ij}'+\frac{E}{3(1-2\nu)}\delta_{ij}d\varepsilon_{ii}=d\sigma_{ij}'\\&\qquad+\frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)}\delta_{ij}d\varepsilon_{ii}\\&=2G\left(d\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}d\varepsilon_{ii}-\sigma_{ij}\frac{\sigma_{kl}'d\varepsilon_{kl}}{S}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

(14) 式をマトリクスの形で書けば

$$d\boldsymbol{\sigma}=2G\boldsymbol{D}^p d\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{D}^p d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{15}$$

$\boldsymbol{D}^p$ は弾性の問題における（3）式の $\boldsymbol{D}^e$ に代わるもので，次のように与えられる対称マトリクスである．

$$\boldsymbol{D}^p=\begin{pmatrix}\frac{1-\nu}{1-2\nu}-\frac{\sigma_x'^2}{S} & & & & & \text{SYM (対称)}\\ \frac{\nu}{1-2\nu}-\frac{\sigma_x'\sigma_y'}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu}-\frac{\sigma_y'^2}{S} & & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu}-\frac{\sigma_x'\sigma_z'}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu}-\frac{\sigma_y'\sigma_z'}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu}-\frac{\sigma_z'^2}{S} & & & \\ -\frac{\sigma_x'\tau_{xy}}{S} & -\frac{\sigma_y'\tau_{xy}}{S} & -\frac{\sigma_z'\tau_{xy}}{S} & \frac{1}{2}-\frac{\tau_{xy}^2}{S} & & \\ -\frac{\sigma_x'\tau_{yz}}{S} & -\frac{\sigma_y'\tau_{yz}}{S} & -\frac{\sigma_z'\tau_{yz}}{S} & -\frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{S} & \frac{1}{2}-\frac{\tau_{yz}^2}{S} & \\ -\frac{\sigma_x'\tau_{zx}}{S} & -\frac{\sigma_y'\tau_{zx}}{S} & -\frac{\sigma_z'\tau_{zx}}{S} & -\frac{\tau_{xy}\tau_{zx}}{S} & -\frac{\tau_{yz}\tau_{zx}}{S} & \frac{1}{2}-\frac{\tau_{zx}^2}{S}\end{pmatrix} \tag{16}$$

弾性の場合と同様に，平面応力問題では，(15) 式から $d\varepsilon_z$ を消去した式を用いる必要が起こる．こうして，（4）式に対応する関係式は

$$\begin{Bmatrix}d\sigma_x\\d\sigma_y\\d\tau_{xy}\end{Bmatrix}=E\boldsymbol{D}^p\begin{Bmatrix}d\varepsilon_x\\d\varepsilon_y\\d\gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{D}^p=\frac{1}{Q}\begin{bmatrix}\sigma_y'^2+2P & -\sigma_x'\sigma_y'+2\nu P & -\frac{\sigma_x'+\nu\sigma_y'}{1+\nu}\tau_{xy}\\ -\sigma_x'\sigma_y'+2\nu P & \sigma_x'^2+2P & -\frac{\sigma_y'+\nu\sigma_x'}{1+\nu}\tau_{xy}\\ -\frac{\sigma_x'+\nu\sigma_y'}{1+\nu}\tau_{xy} & -\frac{\sigma_y'+\nu\sigma_x'}{1+\nu}\tau_{xy} & \frac{R}{2(1+\nu)}+\frac{2H'}{9E}(1-\nu)\bar{\sigma}^2\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}P&=\frac{2H'}{9E}\bar{\sigma}^2+\frac{\tau_{xy}^2}{1+\nu},\quad Q=R+2(1-\nu^2)P\\R&=\sigma_x'^2+2\nu\sigma_x'\sigma_y'+\sigma_y'^2\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Reuss の式における $d\lambda$ と相当塑性ひずみ増分 $\overline{d\varepsilon^p}$ は，一般の表示式では，（5）式および（8）式により

$$d\lambda=\frac{\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}}{S},\quad \overline{d\varepsilon^p}=\frac{2}{3}\bar{\sigma}d\lambda=\frac{\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}}{\bar{\sigma}(1+H'/3G)} \tag{20}$$

で与えられる．平面応力問題では，(18) 式に対応して

$$\begin{aligned}\overline{d\varepsilon^p}=\frac{2}{3}\frac{\bar{\sigma}}{Q}[&(\sigma_x'+\nu\sigma_y')d\varepsilon_x+(\sigma_y'+\nu\sigma_x')d\varepsilon_y\\&+(1-\nu)\tau_{xy}d\gamma_{xy}]\end{aligned} \tag{21}$$

む　す　び

本稿の結論として，弾性の問題における（3）式の $\boldsymbol{D}^e$ を (16) 式の $\boldsymbol{D}^p$ でおきかえるならば，弾塑性問題の取り扱いもまったく同様であることがわかる．ただし弾塑性問題では，応力やひずみの増分を考え，刻々の弾塑性境界を求め，塑性状態に達した要素の $\boldsymbol{D}^p$ ひいては物体全体に関する剛性マトリクス ($\boldsymbol{K}^p$) を修正してゆかなければならない．平面応力問題では，（4）式の $\boldsymbol{D}^e$ に (18) 式の $\boldsymbol{D}^p$ が対応する。(16) 式は，Reuss の式を応力増分について解くことによって得られる逆行列に相当している．Marcal[1),2)] は (15) 式を

$$d\sigma_i=\partial\sigma_i/\partial e_j\cdot de_j$$

の形に表示し，$\partial\sigma_i/\partial e_j$ を偏剛性係数 (partial stiffness coefficient) と呼んでいる．本稿は，その具体な形を示し，弾性の問題との対比を明らかにしたものである．

（3）式と (16) 式を比較すれば，与えられたひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ に対し，塑性変形がはじまって後の応力増分 $d\sigma_{ij}$ が，弾性の場合に比較して，小さくなることがよく理解される ($\boldsymbol{D}^p$ の対角要素は $\boldsymbol{D}^e$ のそれに比較して明らかに小である)．さらに，せん断ひずみ増分に対応して，降伏点を越えて後は，応力のせん断成分ばかりでなく，垂直成分にも変化を生じることが特徴的である．

(1966 年 12 月 24 日受理)

文　　献

1) P.V. Marcal: *Int. J. Mech. Sci.*, **7** (p.229, 1965).
2) P.V. Marcal & I.P. King: 未公表論文.
3) R. ヒル著: 塑性学 (邦訳, 培風館, p.24, 1954).
4) 山田: 塑性力学 (日刊工業新聞社, p.66, 1965).
5) O.C. Zienkiewicz & G.S. Holister: Stress Analysis (Wiley, p.97 および 155, 1965).
6) なおマトリクス構造解析法の一般的な解説については，川井: 機械学会誌, **70**-576 (p.96, 1967) を参照.