

---

## 附録 A

# 平均屈折率の分布

### A.1 光ファイバの光学特性

ここでは、光ファイバに生じるひずみや温度の変化によって、光ファイバの屈折率がどのように変化するかについて述べる。

光は電磁波であり、その挙動は電磁界の支配方程式である Maxwell 方程式に従う。そこで、光ファイバの光学特性を求めるために、次式を用いる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_s \cdot \mathbf{E} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{H} \quad (\text{A.6})$$

ここで、 $\mathbf{E}$  は電界ベクトル [V/m]、 $\mathbf{H}$  は磁界ベクトル [A/m]、 $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{B}$  は、それぞれ電束密度ベクトル [C/m<sup>2</sup>]、磁束密度ベクトル [Wb/m<sup>2</sup>] である。 $\mathbf{J}$  は電流密度ベクトル [A/m<sup>2</sup>] である。 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\boldsymbol{\mu}$  はそれぞれ誘電率テンソル、透磁率テンソルである。 $\varepsilon_0$ 、 $\mu_0$  はそれぞれ真空中の誘電率 (=  $8.854 \times 10^{-12}$  [F/m])。透磁率 (=  $4.0\pi \times 10^{-7}$  [H/m]) である。 $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ 、 $\boldsymbol{\mu}_s$  はそれぞれ比誘電率テンソル、比透磁率テンソルである。通常、光ファイバにおいては、次式が成り立つ。

$$\mathbf{J} = 0 \quad (\text{A.7})$$

そして、光ファイバは非磁性体であり、この場合は次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\mu}_s = \mathbf{I} \quad (\text{A.8})$$

ここで、 $I$  は単位行列である。よって、式 (A.1), (A.2) は次式のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mu_s \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon_s \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

また、Fig A.1 において、光ファイバ中を  $z$  方向に光が伝播するとき、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  はそれぞれ次式のよ

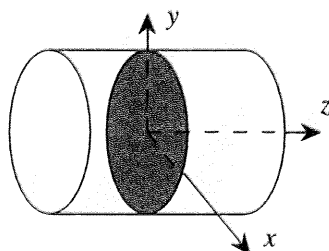


Fig.A.1 Coordinate system of an optical fiber.

うに表される。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (\text{A.14})$$

ここで  $\omega$  は光の角周波数、 $t$  は時間、 $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  は各ベクトルの分布を表す。 $\beta$  は波の伝搬定数であり、次式で表すことができる。

$$\beta = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \quad (\text{A.15})$$

ここで、 $\lambda_0$  は真空における光の波長、 $n$  は光ファイバの屈折率である。

式 (A.9)、(A.11) より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mu_s i \omega \mathbf{H} \quad (\text{A.16})$$

となる。そこで、次式のように変形できる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \mu_s i \omega (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (\text{A.17})$$

次に、式 (A.11) より、 $\nabla \times \mathbf{E}$  を計算する。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\beta E_y \\ -i\beta E_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -i\beta \mathbf{s} \times \mathbf{E} \end{aligned} \tag{A.18}$$

ここで、 $\mathbf{s}$  は  $z$  方向の単位ベクトルであり、次式のように表せる。

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

次に、式 (A.18) を用いて、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$  を計算する。

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i\beta E_y \\ -i\beta E_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \beta^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \beta^2 \mathbf{E} \end{aligned} \tag{A.20}$$

そして、式 (A.10)、(A.12)、(A.17) より、次式が得られる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mu_s \epsilon_s \cdot \mathbf{E} \tag{A.21}$$

真空中では、 $\epsilon_s = \mu_s = 1$  であり、光の速度  $c$  は次式で表される。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 [\text{m/s}] \tag{A.22}$$

そして、光学材料では、 $\mu_s = 1$  である場合が多く、式 (A.21) は次式のようになる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_s \cdot \mathbf{E} \tag{A.23}$$

式 (A.20)、(A.23) より、次式が得られる。

$$\beta^2 \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_s \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{A.24}$$


---

屈折率  $n$  は次式のように定義されている。

$$n = \frac{\beta c}{\omega} \quad (\text{A.25})$$

このため、式 (A.24) は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - \frac{1}{n^2} \boldsymbol{\varepsilon}_s \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_s^{-1} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{n^2} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

次に、式 (A.26) を解く。まず、 $\boldsymbol{\varepsilon}_s^{-1}$  を次式のように表す。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

すると式 (A.26) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \mathbf{E} - \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{n^2}\right) E_x + \varepsilon_6 E_y = 0 \\ \varepsilon_6 E_x + \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{n^2}\right) E_y = 0 \\ \varepsilon_5 E_x + \varepsilon_4 E_y = 0 \end{cases} & \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

そして、 $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$  より、次式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \frac{1}{n^2} & \varepsilon_6 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 - \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.29})$$

$\mathbf{E}$  が解を持つための  $n$  の条件は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \varepsilon_6^2} \\ &\equiv \eta_1 + \eta_2 \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

ここでパラメータ  $\eta_1, \eta_2$  を次のように置く。

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad \eta_2 = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \varepsilon_6^2} \quad (\text{A.31})$$

すると、式 (A.30) の解は次式のような。

$$n_p = \frac{1}{\sqrt{\eta_1 + \eta_2}}, \quad n_q = \frac{1}{\sqrt{\eta_1 - \eta_2}} \quad (\text{A.32})$$

ここで、 $n_p, n_q$  は、それぞれ  $p, q$  方向の屈折率であり、 $p, q$  は  $xy$  面上にあり、互いに直交している。

## A.2 等方性材料の平均屈折率

次に、光ファイバがひずみや温度変化を受けた場合に、屈折率がどのように変化するかを求める。そして、屈折率の変化は式 (A.32) より、次式のように表される。

$$\Delta n_p = -\frac{1}{2} \frac{\Delta\eta_1 + \Delta\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^{3/2}}, \quad \Delta n_q = -\frac{1}{2} \frac{\Delta\eta_1 - \Delta\eta_2}{(\eta_1 - \eta_2)^{3/2}} \quad (\text{A.33})$$

ここで、 $\Delta\eta_1$ 、 $\Delta\eta_2$  を求めるためには、 $\Delta\varepsilon_i (i = 1, \dots, 6)$  を求めなければならない。そこで、 $\Delta\varepsilon_i$  は、ひずみや温度変化に対して、線形的に変化すると仮定する。

$$\Delta\varepsilon_i = W_i \Delta T + p_{ij} (\varepsilon_j - \alpha_j \Delta T) \quad (\text{A.34})$$

ここで、 $\Delta T$  は温度変化、 $\varepsilon_j (j = 1, \dots, 6)$  はひずみ、 $\alpha_j (j = 1, \dots, 6)$  は熱膨張係数であり、添字 1,2,3 は、それぞれ、 $x, y, z$  方向に対応している。 $p_{ij}$  はポッケル定数 [61] であり、次式のように表される。

$$[p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{15} & p_{25} & p_{35} & p_{45} & p_{55} & p_{56} \\ p_{16} & p_{26} & p_{36} & p_{46} & p_{56} & p_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

そして、 $W_i$  は、応力が一定の場合は、温度に関する  $\varepsilon_i$  の変化を表す。

$$W_i = \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial T} \right)_{\sigma_j = \text{const.}} \quad (\text{A.36})$$

## A.2 等方性材料の平均屈折率

光ファイバは等方性であるため、式 (A.35) のポッケル定数は次のようになる。

$$\begin{aligned} p_{12} &= p_{13} = p_{23}, \\ p_{11} &= p_{22} = p_{33}, \\ p_{44} &= p_{55} = p_{66} = \frac{p_{11} - p_{12}}{2}, \\ p_{45} &= p_{46} = p_{56} = 0, \\ p_{ij} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, \quad j = 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

また、ひずみや温度変化がないときは、式 (A.27) の  $\varepsilon_s^{-1}$  は次のように書くことができる。

$$\varepsilon_s^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_0^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

ここで  $n_0$  はひずみや温度変化がないときの光ファイバのコアの屈折率である。

式 (A.36)、(A.38) より、 $W_i$  は次式のようになる。

$$W_i = \begin{pmatrix} -\frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} \\ -\frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} \\ -\frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\sigma_j^i = \text{const.}} \quad (\text{A.39})$$

次に、式 (A.31)、(A.38) より、次式が得られる。

$$\Delta\eta_1 = \frac{\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2}{2} \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta_2 &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \Delta\varepsilon_2}{2}\right)^2 + (\varepsilon_6 + \Delta\varepsilon_6)^2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \varepsilon_6^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2}{2}\right)^2 + (\Delta\varepsilon_6)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

そして、式 (A.34)、(A.37)、(A.39) を代入して、 $\Delta\eta_1$ 、 $\Delta\eta_2$  を求める。

$$\begin{aligned} \Delta\eta_1 &= -\frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} \Delta T + \frac{1}{2} p_{11} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha_1 \Delta T - \alpha_2 \Delta T) \\ &\quad + \frac{1}{2} p_{12} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 - \alpha_1 \Delta T - \alpha_2 \Delta T - 2\alpha_3 \Delta T) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\Delta\eta_2 = \frac{p_{11} - p_{12}}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \alpha_1 \Delta T + \alpha_2 \Delta T)^2 + (\varepsilon_6 - \alpha_6 \Delta T)^2} \quad (\text{A.43})$$

次に、

$$\varepsilon_h \equiv \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_d \equiv \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \quad (\text{A.44})$$

と置く。また、等方性材料である場合、熱膨張係数  $\alpha_i$  は次のようになる。

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s \\ \alpha_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

そして、光ファイバ軸に垂直な面での最大せん断ひずみは、次式のように表される。

$$\gamma_{max} = \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_6^2} \quad (\text{A.46})$$

よって、式 (A.42),(A.43) に式 (A.44)、(A.45)、(A.46) を代入すると、次式が得られる。

$$\Delta\eta_1 = -\frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} \Delta T + p_{11}(\varepsilon_h - \alpha_s \Delta T) + p_{12}(\varepsilon_h + \varepsilon_3 - 2\alpha_s \Delta T) \quad (\text{A.47})$$

$$\Delta\eta_2 = \frac{p_{11} - p_{12}}{2} \gamma_{max} \quad (\text{A.48})$$

式 (A.31)、(A.38)、(A.47)、(A.48) を式 (A.33) に代入すると、 $p$ 、 $q$  方向の屈折率変化が得られる。

$$\Delta n_p = -\frac{n_0^3}{2} \left[ p_{12}\varepsilon_3 + (p_{11} + p_{12})\varepsilon_h - \left\{ \frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} + (p_{11} + 2p_{12})\alpha_s \right\} \Delta T + \frac{p_{11} - p_{12}}{2} \gamma_{max} \right] \quad (\text{A.49})$$

$$\Delta n_q = -\frac{n_0^3}{2} \left[ p_{12}\varepsilon_3 + (p_{11} + p_{12})\varepsilon_h - \left\{ \frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} + (p_{11} + 2p_{12})\alpha_s \right\} \Delta T - \frac{p_{11} - p_{12}}{2} \gamma_{max} \right] \quad (\text{A.50})$$

ここで、次式のように平均屈折率を定義する。

$$n_{avg} \equiv \frac{n_p + n_q}{2} \quad (\text{A.51})$$

これより、光ファイバにひずみや温度変化が生じた場合の平均屈折率の変化を求めることができる。

$$\Delta n_{avg} = -\frac{n_0^3}{2} \left[ p_{12}\varepsilon_3 + (p_{11} + p_{12})\varepsilon_h - \left\{ \frac{2}{n_0^3} \frac{dn_0}{dT} + (p_{11} + 2p_{12})\alpha_s \right\} \Delta T \right] \quad (\text{A.52})$$

---

## 附録 B

# 圧電素子について

### B.1 圧電材料

圧電 (Piezo-Electric) 素子とは、加えられた歪を電圧に変換する、または加えられた電圧を歪に変換するという”圧電性 (piezoelectricity)”を持つ”圧電材料 (圧電体)”を用いた受動素子である。この現象は”圧電効果”と呼ばれており、18 世紀元からその存在は知られていたが、1880 年に Pierre Curie, Jack Curie の兄弟によって正式に発見された。本研究では、この圧電素子を供試体に貼り付け電圧を加えることで供試体内に弾性波を発生させている。

本研究で使用した素子には、圧電材料としてチタン酸ジルコン酸鉛 [ $\text{Pb}(\text{Zr} \cdot \text{Ti})\text{O}_3$ ]、通称 PZT(Pb、Zr、Ti の略) を用いた。PZT は圧電材料の中でも特に大きな圧電性を示す強誘電体の一つで、ペロブスカイト形の結晶構造 (灰チタン石:  $\text{CaTiO}_3$  のもつ結晶構造と同じ。この物質のことをペロブスカイトという。) をしている。Fig.B.1(a) は、ペロブスカイト形強誘電体のうちで最も代表的な PZT の高温における結晶構造の概念図である。高温では立方晶系 (常誘電相、 $a = c$ ) のため自発分極は持たないが、温度が下がると相転移点を通じて正方晶系 (強誘電相、 $a \neq c$ ) になり、 $\text{Ti}^{4+}$ 、 $\text{Zr}^{4+}$ 、 $\text{Pb}^{2+}$  の正イオンが、 $\text{O}^{2-}$  の負イオンに対して相対的に Fig.B.2 のように変位して自発分極を生じる。この転移する温度をキュリー点と呼ぶ。

一般に圧電材料の製造過程では  $800 \sim 1000 \text{ }^\circ\text{C}$  で原料を固溶体化し、その後温度を下げ自発分極を生じさせる。しかしこのままでは分極の向きが Fig.B.3(a) のようにばらばらであり、全体としては分極が 0 の状態である。そこで、ある一定以上の電場をかけると、分極の方向が揃えられ Fig.B.3(b) のように圧電体全体で P 方向に分極を持つようになる。このように外部電場によって自発分極の方向を変えることのできるものを強誘電体という。ただし、各分極ベクトルの方向が完全に揃うわけではなく Fig.B.3(b) のように多少ずれた状態となっている [62][63][64]。

一般的に PZT は、チタン酸鉛 ( $\text{PbTiO}_3$ ) とジルコン酸鉛 ( $\text{PbZrO}_3$ ) の固溶体で、この 2 成分の混合比



を変えることによって圧電・誘電・弾性などの諸特性をコントロールできるため、それぞれの用途に適した圧電材料を得ることが可能である。キュリー点は両者の混合比によって異なるが、およそ 320 °C 付近にあり、それ以下の温度では安定である。また焼結性がよく、分極も比較的容易で十分な分極が可能なため、高い圧電定数を持った圧電材料を作ることができる。

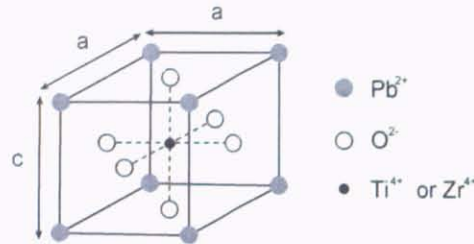


Fig.B.1 Crystalline structure of PZT.

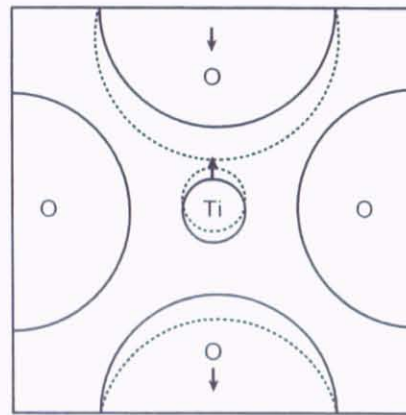


Fig.B.2 Mechanism of spontaneous polarization.

## B.2 圧電効果の発生原理

前節の処理方法により、全体の分極の大きさが  $P$  となっている圧電材料があるとする。この時、この圧電材料に接着した電極には、分極電荷と同じ量の逆極性の真電荷が存在する (Fig.B.4(a) 参照)。ここで Fig.B.4(b) のように圧縮応力が加わると、各分極ベクトルの方向が変化するため、全体の分極ベクトルが小さくなり、分極電荷が減少する。よって結果的に、応力が加わると電位差が生じる。この効果は、Fig.B.4(c) のように引張力を加えた場合でも、電位の正負が変化するだけで同様の現象が起きる。この外部応力により電気信号が発生する現象を圧電気直接効果という。但し、ある一定の応力を加えたままにし

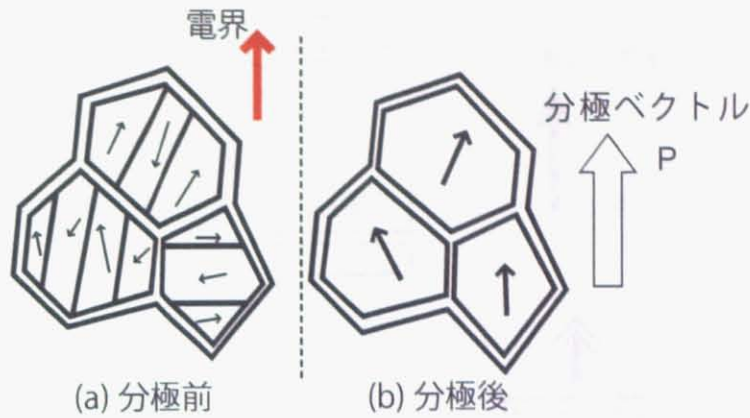


Fig.B.3 Conditions of spontaneous polarization before (a) and after (b) processing.

ておくと数秒後には発生電圧がなくなってしまう。これは、圧電材料が実際には完全な絶縁体ではないので、電極に発生した電荷が次第に消滅していくためである [62][65]。

逆に外部から電圧をかけることは上述の圧電気直接効果を逆順でたどることになり、結果として圧電体の伸縮が生じる。これを圧電気逆効果という。

### B.3 圧電方程式 [66][67]

上記の圧電効果は、圧電方程式と呼ばれる方程式群で記述される。圧電効果とは、結局のところ、機械エネルギーが電気エネルギーに、またはその逆の形に変換される現象のことだと考えることにする。このことより、力学及び電磁気学の統一的な構成則が、両者のポテンシャルエネルギーから統一的に導かれ、この方程式のことを圧電方程式という。

まず圧電方程式を導出する準備として、電氣的な関係式を確認する。圧電理論においては、電磁界が時間的に変化しないと考えることが出来る。これは音波の速度が電磁波の速度に比して約 5 桁小さいので、圧電効果を考える時間スケールでは電磁界は準静的であると考えられるからである。静電場での方程式としては、ガウスの法則の微分形、及び、循環ゼロの法則の微分形のみ考えればよく、これらは、電束密度  $D$ 、電場  $E$ 、電位ポテンシャルを  $\phi$  とすれば、

$$D_{i,i} = 0 \tag{B.1}$$

$$E_i = -\phi_{,i} \tag{B.2}$$

となる。

圧電体の体積を  $V$ 、表面積を  $S$  で表すものとし、この体積  $V$  中のエネルギーを考察すると、エネルギー増

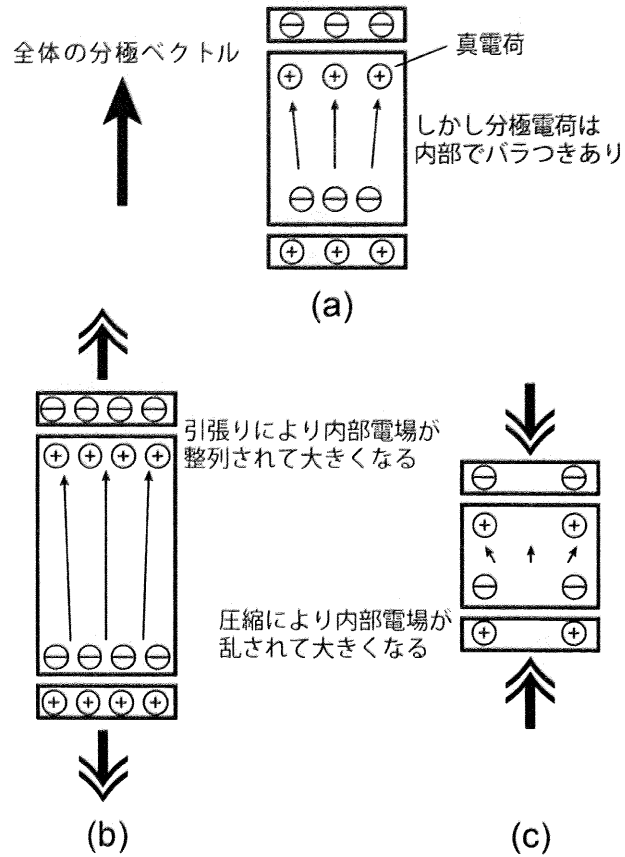


Fig.B.4 Principle of the generation of piezoelectric effect.

加の時間的割合は表面部分に外部からなされる力学的な仕事から、その表面を通して外部に逃げ出す電束による電気的な仕事を差し引いた量に一致する。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + U \right) dV = \int_S (t_j \dot{u}_j - n_j \phi \dot{D}_j) dS \quad (B.3)$$

ここで  $U, u, \rho, t = n \cdot T, T, n$  はそれぞれ、物体の内部エネルギー、変位、密度、表面法線方向応力ベクトル、応力テンソル、表面の法線ベクトルを表す。

ここで、ガウスの発散定理、

$$\int_S n_i R_i dS = \int_V R_{i,i} dV \quad (B.4)$$

(ただし、 $R_i$  は任意のベクトルを表すとす) を考慮すると、式 (B.3) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + U \right) = \rho \ddot{u}_j \dot{u}_j + \dot{U} = (T_{ij} \dot{u}_j)_{,i} - (\phi \dot{D}_i)_{,i} \quad (B.5)$$

となる。これより、内部エネルギーの時間微分は式 (B.1)、(B.2) を用いて、

$$\begin{aligned}\dot{U} &= (T_{ij,i} - \rho\ddot{u}_j)\dot{u}_j + T_{ij}\dot{u}_{j,i} - \phi\dot{D}_{i,i} - \phi_{,i}\dot{D}_i \\ &= T_{ij}\dot{S}_{ij} + E_i\dot{D}_i\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

となる。ここで上記の式変形には、運動方程式、及び、ひずみと変位の関係式、

$$T_{ij,i} = \rho\ddot{u}_j \quad (\text{B.7})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{B.8})$$

を用いた。

次に電氣的なエンタルピ  $H$  を導入する。 $H$  は次式で定義される。

$$H = U - E_i D_i \quad (\text{B.9})$$

そこでこの時間微分をとり、(B.6) 式を代入すると、

$$\dot{H} = \dot{U} - \dot{E}_i D_i - E_i \dot{D}_i = T_{ij}\dot{S}_{ij} - \dot{E}_i D_i \quad (\text{B.10})$$

が得られる。従って  $H$  は、 $S$  と  $E$  の関数

$$H = H(S, E) \quad (\text{B.11})$$

として表されるはずである。そこで、改めてこれらの時間微分をとると

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \dot{S}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_i} \dot{E}_i \quad (\text{B.12})$$

となる。従って、式 (B.10) より、

$$\left(T_{ij} - \frac{\partial H}{\partial S_{ij}}\right)\dot{S}_{ij} - \left(D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i}\right)\dot{E}_i = 0 \quad (\text{B.13})$$

が得られる。この式が任意の  $\dot{S}_{ij}$  と  $\dot{E}_i$  について成立するならば、 $S_{ij} = S_{ji}$  であることを考慮して、

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial S_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial S_{ji}}\right) \quad (\text{B.14})$$

$$D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i} \quad (\text{B.15})$$

となる。さらに、

$$\frac{\partial H}{\partial S_{ij}} = \frac{\partial H}{\partial S_{ji}} \quad (\text{B.16})$$

を認めるとするならば、(B.14) 式は、

$$T_{ij} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \quad (\text{B.17})$$

が得られる。いま圧電方程式としては線形関係のみに着目することとすると、エンタルピー  $H$  は  $S$  と  $E$  について、高々、二次形式となるはずであり、(B.15), (B.17) 式および (B.11) を考慮すれば、 $H$  は改めて、

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{ijk} E_i S_{jk} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j$$

と表される。この式で第 1 項は純弾性的なひずみエネルギー、第 3 項は純電氣的な静電エネルギー、第 2 項は両者間の結合エネルギーを示している。これを式 (B.15), (B.17) に代入すれば、

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} + e_{ijk} E_k \quad (\text{B.18})$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k \quad (\text{B.19})$$

の圧電方程式と呼ばれる関係式を求めることができる。なお、上述の  $c^E, \epsilon^S$  の  $E, S$  はそれぞれ電場  $E$ 、ひずみ  $S$  が一定の場合を意味している。式 (B.18) の右辺第 2 項が圧電気逆効果、式 (B.19) の右辺第 1 項が圧電気直接効果を表す項である。これらの式からわかるように圧電効果において電場と応力は線形関係にある。

この圧電方程式の表現方法は種々あり、例えば電場と応力を独立変数としてひずみを表すと、

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \quad (\text{B.20})$$

となる。 $T = 0$  の場合を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

となる。本研究で用いた圧電素子では、3 軸方向のひずみにより弾性波を発振するため圧電定数  $d_{33}$  のより大きな圧電材料として PZT を選択した (Table B.1 参照)。

この圧電効果とは別の現象として電歪効果がある。誘電体に電場を与え双極子モーメントを誘起した結果、電気分極が発生する。このとき例えばイオン分極の場合はイオンの位置が相対的に変化するので誘電体全体の寸法も若干変化する。このように電気分極により機械的歪が生ずる現象を電歪効果という。

電場  $E$  を与えた場合の電歪効果による歪は、

$$S = Q(\epsilon \epsilon_0)^2 E^2 \quad (\text{B.22})$$

で与えられる [63]。ここで  $Q$  は電歪定数、 $\epsilon$  は比誘電率、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。ここで、チタン酸バリウムの定数を用いて電歪効果によるひずみと圧電効果によるひずみを計算してみる。本研究で用いた

### B.3 圧電方程式 [66][67]

---

電場

$$E_3 = \frac{V}{x} = \frac{75(V)}{16.5(mm)} = 4.5 \times 10^3 (V/m) \quad (B.23)$$

によるひずみを計算すると、(x は圧電素子の電極間距離。)

$$S_{33} = 1.1 \times 10^{-10} \quad (B.24)$$

となる。一方圧電効果によるひずみは式 (B.21) を用いて計算すると、

$$S_{33} = 6.8 \times 10^{-7} \quad (B.25)$$

となる。これより電歪効果によるひずみは、圧電効果によるひずみに比べ非常に小さいことがわかる。尚、キュリー点以上であれば自発分極がなくなり圧電効果は消えるので、電歪効果が直接観測される。

Table B.1 List of  $d_{33}$ s of conventional piezoelectric materials.[64]

圧電材料の種類	圧電定数 $d_{33}(\times 10^{-12}m/V)$
チタン酸鉛	71
ニオブ酸鉛	80
チタン酸バリウム	149
PZT	472

---

## 附録 C

# 発振周波数の選定

### C.1 弾性波の速度分散性

本章では、第3章、及び、第5章において用いた疎密波、曲げ波の発振周波数について、その決定方法を述べる。

理想的な発振周波数とは、“その周波数で加振した場合に、入力波形と同じ形をした弾性波のみが発生し、減衰を除いて、どこまでもその形を維持して伝播する”ような周波数と言える。ただし現実には様々な要因によって、伝播する弾性波の波形は変化する。一般に、弾性波の伝播速度は周波数に依存する。これを“周波数による速度分散性”、あるいは単に“分散性”、と呼ぶ。ある周波数の周りで速度変化が大きい場合、実際に投入されるエネルギーの周波数がどうしても幅を持ってしまうことから、この分散性により様々な速度の波が伝搬されるため、観測される波形が、入力した波形を時間方向に間延びさせたような波形となってしまう。この現象により、観測波形から波の伝搬時間の決定が困難となる。よって、周辺の周波数での速度変化が小さい周波数、すなわち、分散性の小さい周波数を選択する必要がある。さらにこの速度分散性は、物体内部の変形モード毎に異なる。そのため、上記の問題はさらに複雑になる。そこで発振周波数は、一般的に、以下の2点から決定される。

- ① なるべく複数のモードが存在しないこと。
- ② 注目するモードについて分散性が小さいこと。

以上の検討は、周波数と伝搬速度の関係を表した分散曲線を用いてなされる。Fig.C.1に、一例として、異方性矩形断面を持つ棒構造の分散曲線を示す [68]。図中の左側の図は、異方性矩形断面中に生じる変形モードの幾つかを列挙したものであり、右側のグラフは各モードの分散性をあらわしている。グラフの横軸は断面中の異なる二辺の長さのうち短いほう ( $a$ ) を波長 ( $\Lambda$ ) で除した値であり、縦軸は、波の速度 ( $c$ )

を基本速度 ( $c_3$ ) で除したものである。このグラフを見ると、 $a/\Lambda$  が小さい領域では、存在するモード数が少ないこと、さらにその領域では各モードの速度の違いが大きいためモードを分割して評価できること、またその領域において分散性の小さいモードは二つほどしかないこと、などがわかる。

以上のように、分散曲線を得ることによって、特定の変形モードを利用するためには、どの周波数を用いると都合がいいのかを議論することができる。

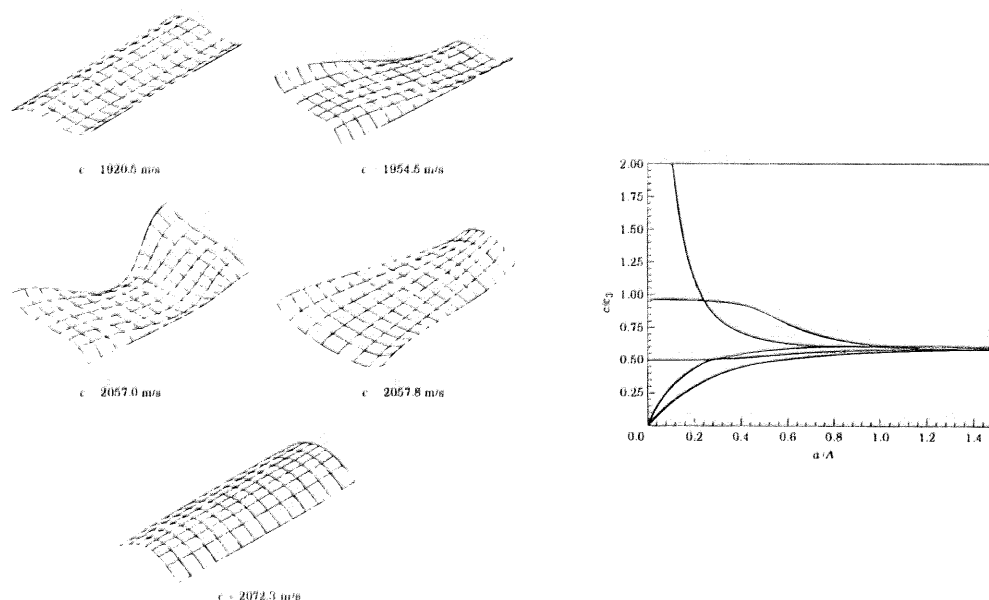


Fig.C.1 Some of the computed shapes of the waves in the infinite rectangular orthotropic rod for  $a/\Lambda = 1$  (left figure) and dispersion curves for the waves.  $c_3 = \sqrt{e_{33}/\rho}$ .

## C.2 既存の分散曲線導出法

AGS 中を伝播する弾性波の分散曲線を厳密に求める場合には、交点の不連続性による影響まで含めて考える必要があり、非常に複雑になる。また系全体に対して交点が占める割合が非常に小さい場合、特に弾性波の波長が交点のサイズに較べて十分に大きいならば、分散曲線の検討にあたり交点の存在を無視して考えて問題ないと考えられる。そこで本研究では、AGS が矩形断面を持つ CFRP 一方向材の繰り返しで構成されていることより、“矩形断面を持つ CFRP 一方向材中を伝播する弾性波”の分散曲線を求めることとし、交点は分散性に影響を与えないと考える。

棒を伝播する弾性波についての分散曲線の導出法には様々なものがあるが、大別して、変形及び波の伝播について特定の仮定をして運動方程式の厳密解を得る方法と、物体を有限要素法などにより離散化して直接運動方程式の近似解を得る方法、の二種類がある。



厳密解を得る方法を考える場合は、基本的に波が定常的に伝播している(無限の過去から無限の未来まで定常的に続いている)と考える。この場合、波は常に物体中に存在しており、それに対してエネルギーを積算したときに初めて波が可視化されると考えていることになる。この方法を用いた、棒状の物体の分散曲線の導出方法としては、Chreeらにその端を発する[69]。彼らは円断面を持つ無限に長い棒について、棒の変形を軸方向変位のみですべて表した一次元モデルを用いて厳密に解いている。

また本研究では特に、異方性を有する材料についての分散曲線を求める必要がある。Morse[70]は直交異方性かつ面内等方性(Hexagonal elastic symmetry)の円断面棒の軸方向に沿って伝搬する疎密波の厳密解を得ている。またMirsky[71]は、直交異方性円断面棒における軸対称な振動に対し厳密解を得ている。

しかしながら著者が知る限り、現段階では、矩形断面をもつ異方性材料に関しての厳密な分散曲線を得る解析解は得られていない。また以上のような厳密解を求める方法においては、三次元棒の変形を軸方向の変数のみで表現して考えている。そのためこの理論は、波長が棒の断面方向の辺の長さに比べ十分長い場合のみ適用可能である。

以上のような厳密解は、より現実に即すよう改良されるに従って導出が困難となり、それにもかかわらず常に仮定や解の予測を必要としてしまう。その対極として、近似解ではあるが基礎式をそのまま解くことにより解を得る方法というものが存在する。Nigroらは、直交異方性矩形断面棒における疎密波の伝搬に関してRayleigh-Ritz法を用いて種々の材料に対し分散曲線を計算している[72]。彼はまた等方性棒の断面の辺の比 $b/a$ が0.125以下の場合において得られた分散曲線と、無限平板の理論(Lamb波)で求めた分散曲線がよく一致することを示している。彼は同様の手法で曲げ波、振り波に対しても位相速度分散曲線を得ている。Mazuchは、Rayleigh-Ritz法を用いる代わりに有限要素法をもちいて断面を離散化し、無限に長い棒中を定常的に伝播する弾性波の分散曲線を計算している[68]。

これらの近似解法においては、結局のところ、無限に長い棒である点、定常的に伝播している波である点を仮定して解を求めていることになる。これは、“分散曲線を得る”という観点から考えれば十分である。そのため今日の周波数の検討は、一般的にはまず前述のような様々な手法を用いて分散曲線を得、その分散曲線から用いる弾性波の周波数にあたりをつけ、その他の要因(棒が有限である点や、反射による影響、初期の局所的な過信の影響など)はこの理論とは別に検討がなされてきた。しかしながら、実際に行うべきことは分散曲線を得ることではなく、“その周波数で加振した場合に、入力波形と同じ形をした弾性波のみが発生し、減衰を除いて、どこまでもその形を維持して伝播する”ような周波数を決定することである。そこで本研究では、昨今の近似解、特に、有限要素解析(FEA)の隆盛・汎用化の背景を鑑み、特定の矩形断面棒を三次元的に有限要素法によりモデル化し、動的FEAにより発振周波数を検討することとした。その利点は、どれだけ複雑な形状であっても(近似解ではあるが)分散曲線を基礎式から得る

ことができる点のみならず、既存の分散曲線を考える際に無視していたような要因も含めてどのような弾性波が伝播されるのかを調べることができる点にある。そこで、群速度分散曲線を求めた上でさらに、実際に受振点においてどのような波形が得られるかその傾向を詳細に調べることとし、この解析ひとつで様々な要因を一度にまとめて考慮して周波数を決定した。

### C.3 有限要素解析による分散曲線の導出

動的な問題 (運動方程式) の有限要素解析にあたり、本研究では構造が比較的複雑である場合に有効とされる陽解法を用いることとした。この解析方法については附録 D に示した。

Fig.C.2 に、用いた解析モデルを、疎密波・曲げ波についてそれぞれ示す。材料物性は、第 3、5 章において実験で用いた材料の物性を与えることとし、Table C.1 にその値をまとめた。

解析における CFRP 一方向梁のモデル化には、8 節点の 6 面体要素を用い、計算の高速化のため低減積分を行うこととした。さらに低減積分時に問題となるアワーグラスモードが発生してしまう問題については、アワーグラス剛性を導入することにより抑制している。疎密波の検討に用いたモデルは、1 軸方向に 2 分割、2 軸方向に 6 分割、3 軸方向に 5000 分割し、要素数は 60,000、節点数は 105,021 とした。一方、曲げ波の検討に用いたモデルは、1 軸方向に 1 分割、2 軸方向に 20 分割、3 軸方向に 2000 分割し、要素数は 40,000、節点数は 42,042 とした。

解析における初期・境界条件であるが、疎密波については棒の端面に、曲げ波については図中に示した位置に、Fig.C.3 に示した波形の圧力を与えている。この発振波形は、正弦波三周期に Hamming 窓関数 [73] をかけあわせた波形となっている。ハミング窓とは、次式で与えられる窓関数のことで波形端部での急激な変化によって様々な周波数の波が励起されてしまう点を抑制するための手段である。(C.1) 式は、本研究で用いた入力波形を表す離散型の関数である。式中、{} 内が Hamming 窓関数を表している。

$$W(n) = \left\{ 0.08 + 0.46 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N} \right) \right) \right\} * \sin \left( 3 * \frac{2\pi n}{N} \right) \quad (C.1)$$

ここで  $N$  は全体の総サンプル数を表し、 $n$  は離散サンプルで、その値の範囲は 0 から  $N$  となる。また、与える圧力の大きさであるが、附録 B の (B.18) 式において  $S = 0$  の場合について行列表示した、

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

を用いて考える。この式に本研究で用いた圧電素子の圧電応力定数  $e_{33} = 17.2 \text{ (C/m}^2\text{)}$  と電場  $E_3 = 4.5 \times 10^3 \text{ (V/m)}$  を用いれば、素子軸方向の最大垂直応力  $T_{33} = 7.7 \times 10^4 \text{ (N/m}^2\text{)}$  と求まる。これと接着剤での減衰を考慮して、最終的に解析において与えた発振圧力の最大値は、 $P = 2.7 \times 10^4 \text{ (Pa)}$  とした。

受信波形の評価には、疎密波については発振端部から 4500mm、5500mm の距離における 3 軸方向の垂直応力成分  $S_{33}$  を用い、曲げ波については発振側端部から 400mm、800mm の距離における 2 軸方向の垂直応力成分  $S_{22}$  を用いることとした。以上の解析を、汎用有限要素法ソフトウェア ABAQUS(ABAQUS Inc.) を用いて行った。得られた波形については、その包絡線を計算し、初期到達波の包絡線が最大値をとる(到達エネルギーが最大となる)時刻を弾性波の到達時刻とすることとした。そして、受信位置の距離の違いとそれによる到達時刻の違いから、弾性波の群速度を計算した。以上の計算を複数の周波数について行うことにより、分散曲線を得ることとした。上述の解析条件を、Table C.2 にまとめた。

Fig.C.4, C.5 に、疎密波曲げ波についてそれぞれ得られた分散曲線を示す。Fig.C.4 を見ると、AGS 中を伝わる疎密波については 400kHz までの周波数範囲では群速度はほぼ一定であることがわかり、分散性はほとんどないといえる。よって、分散性の観点からすると疎密波については、どの周波数を用いてもよいことがわかる。また Fig.C.5 を見ると、20kHz 以下の領域において周波数により速度が大きく変化することがわかる。つまり、20kHz 以下では分散性が強いので、分散性の観点からすると、20kHz 以上の周波数を用いるのが妥当であると結論付けられる。

さらに、Fig.C.6, C.7 に、疎密波曲げ波について実際に計算により得られた波形を、三つの異なる周波数についてそれぞれ示す。Fig.C.6 を見ると、60kHz では入力波形と類似の波形が受信されていることがわかるが、周波数が高くなるにつれてその形が後ろに尾を引くような形に波形が乱れていることがわかる。これは、周波数を上げることにより、疎密波の変形以外の変形モードが生成されるようになることを意味している。特に、100kHz では最初のモードの後に複数のモードが確認できる。よって、出来る限り純粋な疎密波を生成させるには 60kHz 周辺以下の発振を行うことが最適であると考えられるが、周波数が高いほど時間分解能はよいことも勘案すると、疎密波の発振周波数としては 80kHz 程度でも、そこまでいろいろな変形モードが見られないことから、本研究では疎密波の発振周波数としては 80kHz を選択することとした。一方、曲げ波についても Fig.C.7 を見ると、疎密波の場合と同様、発振周波数が 60kHz 以上になると、複数のモードが生成されているのがわかる。よって、曲げ波の発振周波数としては 40kHz を用いることとした。

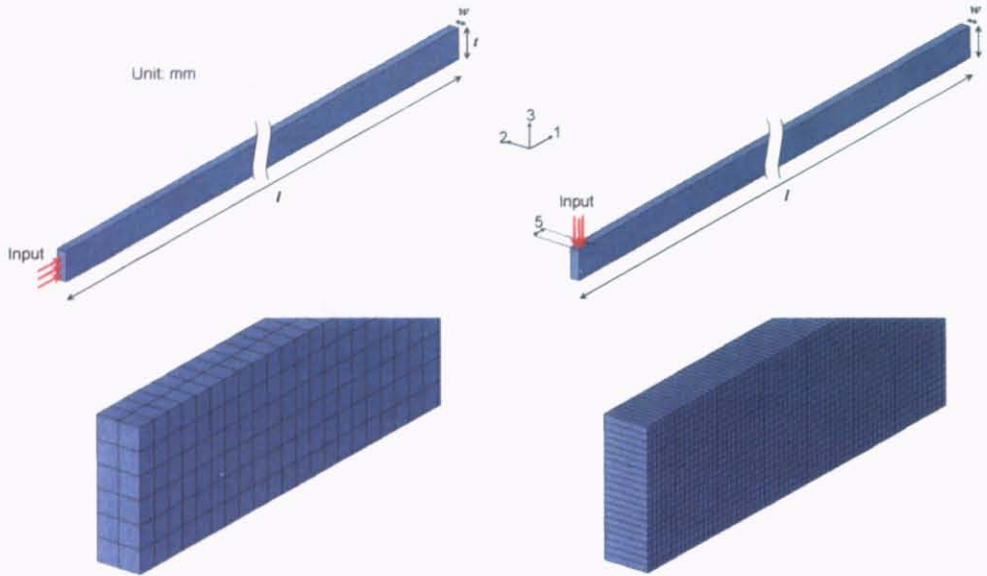


Fig.C.2 Calculation models for the FEA analyses.

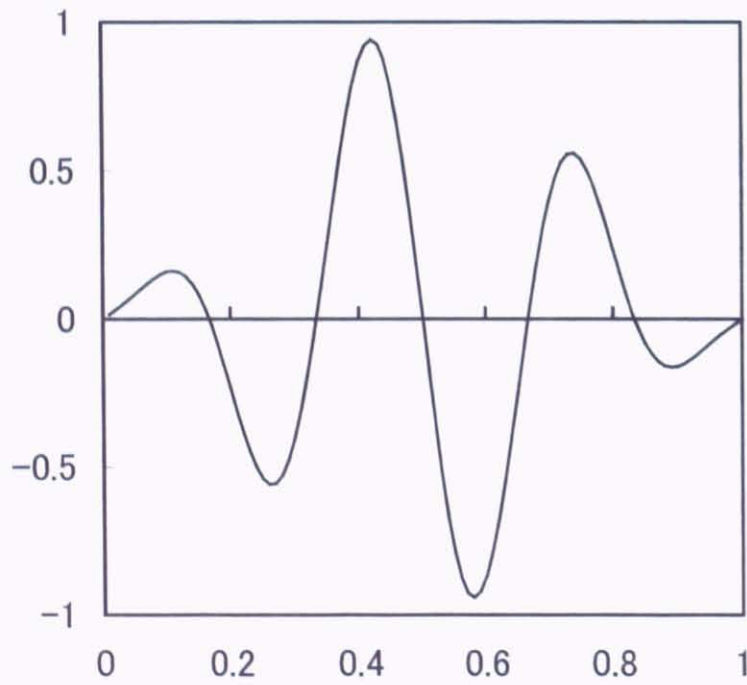


Fig.C.3 Shape of input signal.

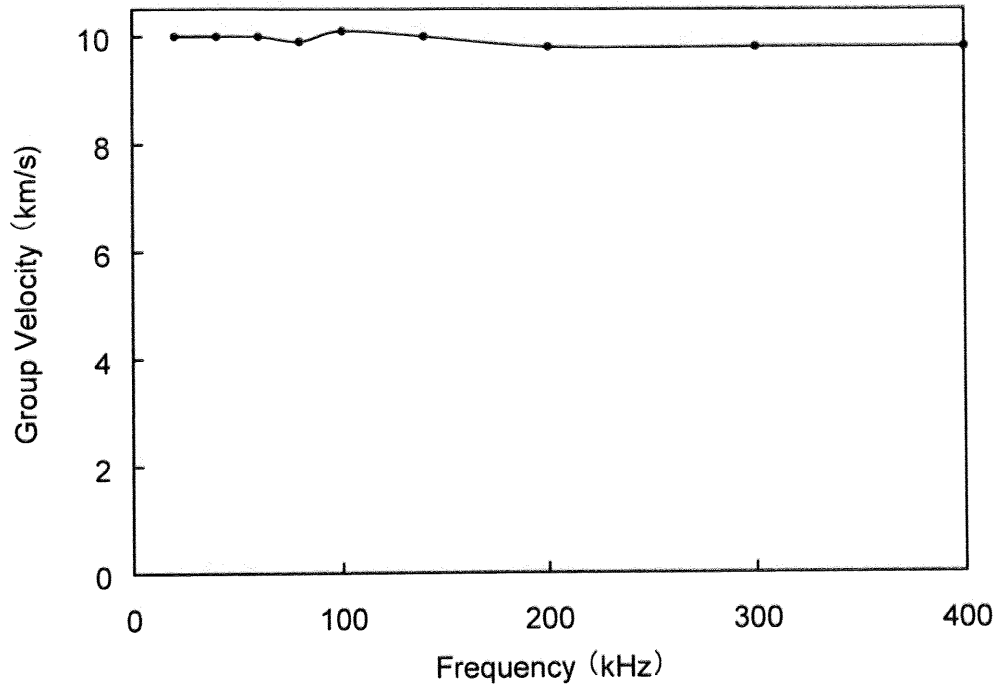


Fig.C.4 Dispersion curve of compressional wave in the orthotropic bar with rectangular cross section.

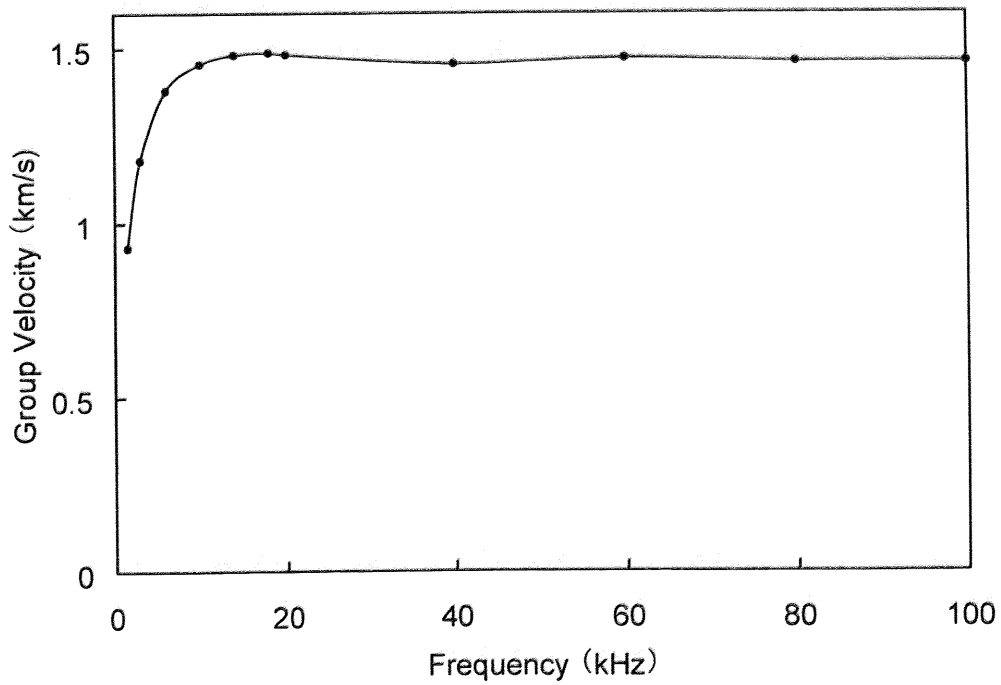


Fig.C.5 Dispersion curve of compressional wave in the orthotropic bar with rectangular cross section.

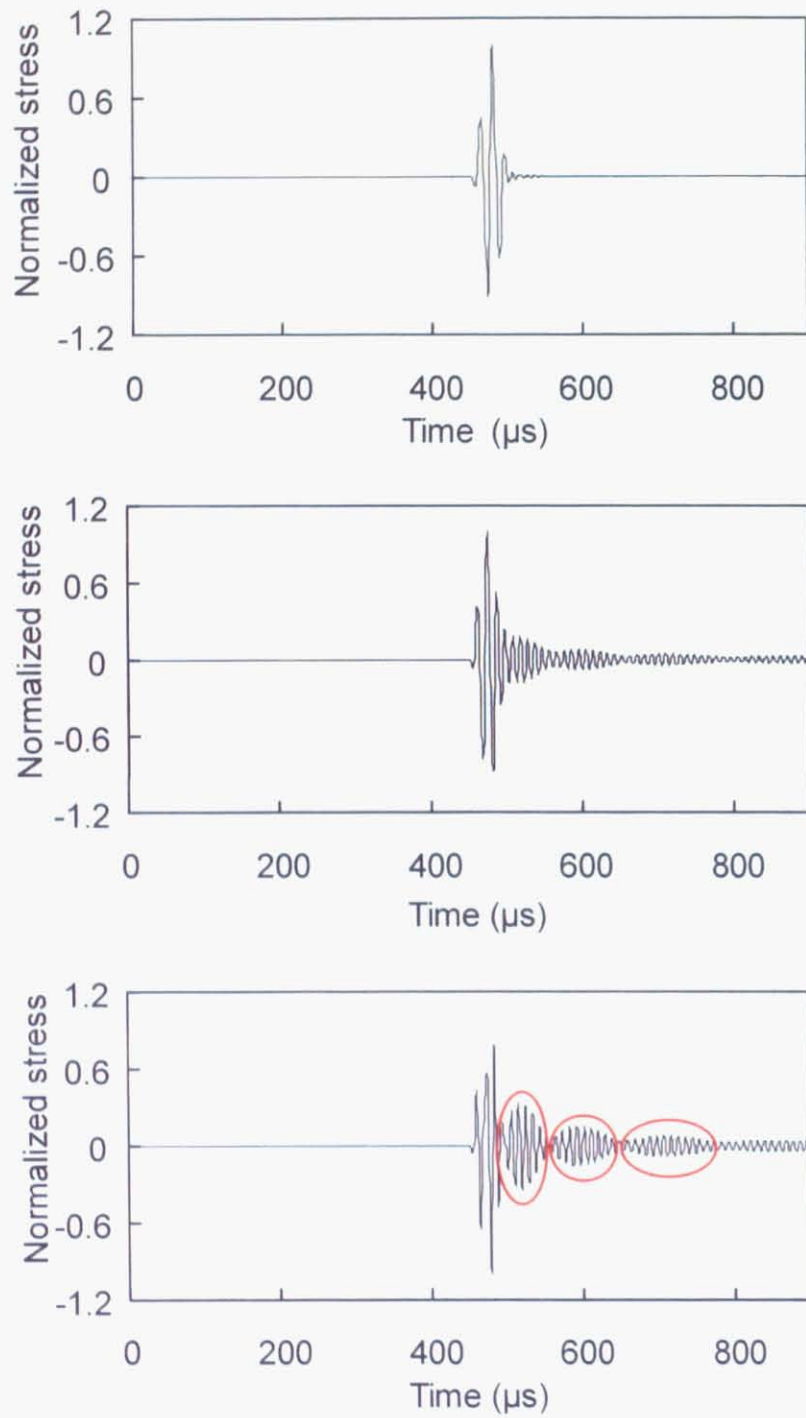


Fig.C.6 Calculated received waveforms of compressional waves with different frequencies (60, 80, 100 kHz).

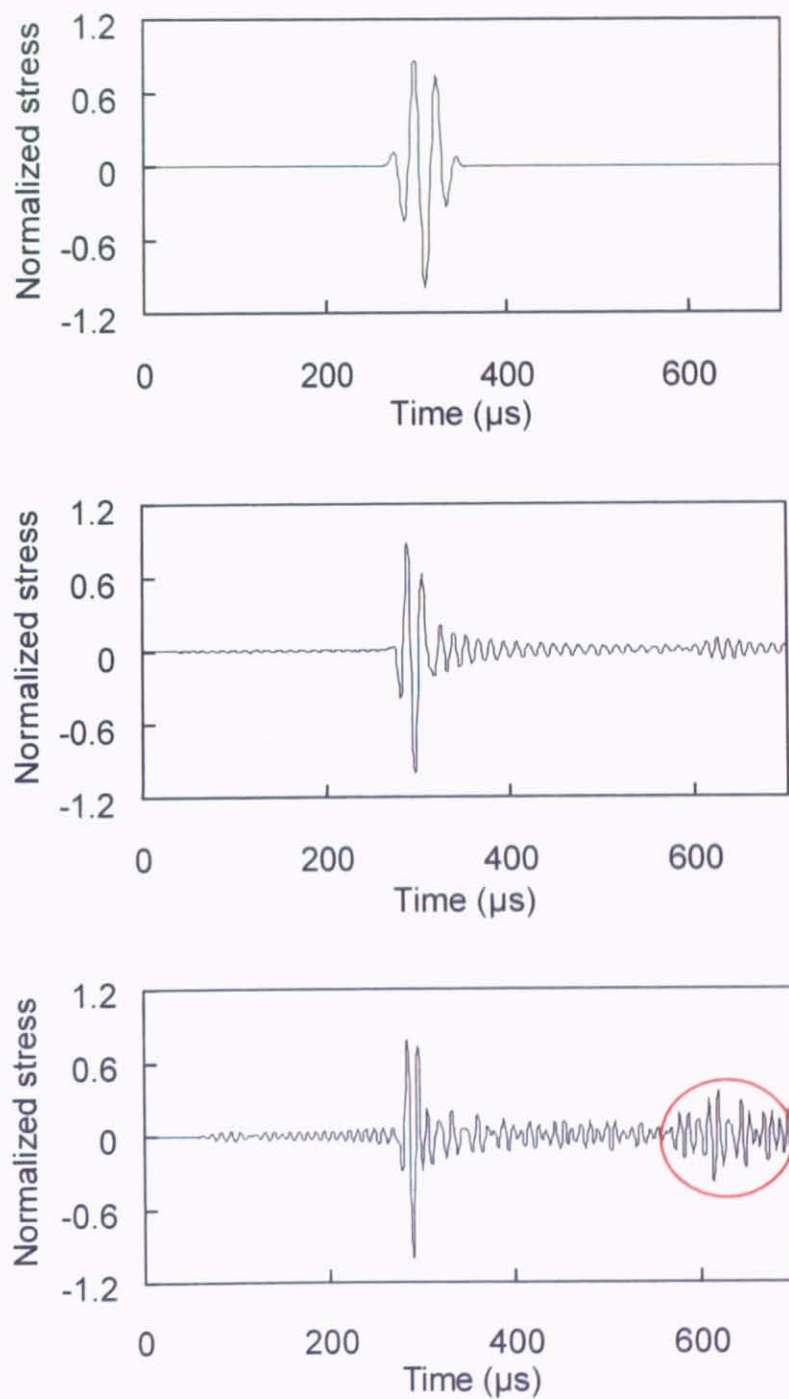


Fig.C.7 Calculated received waveforms of compressional waves with different frequencies (40, 60, 80 kHz).

Table C.1 Mechanical properties of CFRP used for the calculation.

$E_{11}$	(GPa)	149
$E_{22}$	(GPa)	7.65
$G_{12}$	(GPa)	3.25
$G_{23}$	(GPa)	2.57
$\mu_{12}$		0.281
$\mu_{23}$		0.49
$\rho$	(kg/m <sup>3</sup> )	1500

Table C.2 Details of the FEA calculations.

	疎密波	曲げ波
断面寸法 $w \times t$	(mm <sup>2</sup> )	3.46 × 10
長さ $l$	(mm)	7500
インクリメント	(s)	1 × 10 <sup>-7</sup>
線形粘性パラメータ		0.06
二次粘性パラメータ		1.2
要素の種類	三次元ソリッド要素 (8 節点 6 面体要素)	
低減積分要素に対するアワーグラス制御	累積粘弾性形式	
要素数	60,000	40,000(6kHz 以上の周波数検討時) 80,000(1.6~6kHz の周波数検討時)
節点数	105,021	84,042(6kHz 以上の周波数検討時) 168,042(1.6~6kHz の周波数検討時)
弾性波発生方法	最大値 27(kPa) で Fig.C.3 の波形の圧力を Fig.C.2 の位置に付与。	
発振周波数	(kHz)	20~400
弾性波受信の評価に用いた物理量	1 軸方向垂直応力	3 軸方向垂直応力
受振位置 (弾性波入力端より)	(mm)	4500、5500
		400、800



---

## 附録 D

# 有限要素解析における動的陽解法および解の安定性に関わる条件について

### D.1 動的な問題のための仮想仕事の原理

本章では、第 5、C 章における検討で用いた動的陽解法による弾性波の解析について、その概略および特徴を述べた後、解析に際して考慮しなければならない (考慮した) 点について詳しく述べる。

有限要素解析 (Finite Element Analysis、以下 FEA) は、連続体力学の基礎式に基づき、それと等価である仮想仕事の原理を増分分解し、系全体を離散化することによって構造の境界条件下 (時間的にも空間的にも) での応答を解析する手法である。連続体力学の式が微分方程式で局所的に記述された式 (強形式) であるのに対して、仮想仕事の原理は積分方程式で領域全体を記述した式 (弱形式) であるため、系全体を直接離散化するというような近似解法では、仮想仕事の原理を出発点として FEA を定式化する場合が多い。

動的問題における仮想仕事の原理は、d'Alembert の原理、すなわち、「物質点の運動による慣性力は外力として物体力に含めることが出来る」という原理に基づいている。すなわち、Cauchy の第一運動法則の変形として、

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{D.1})$$

として、あたかも静的な平衡方程式の物体力の項に慣性力の項が含まれたように表すことが出来る。ここで、 $\mathbf{x}, \mathbf{T}, \rho, \mathbf{g}, \mathbf{a}$  はそれぞれ、物質点の座標、応力、密度、重力加速度、加速度、を表している。これより、次の関係式は明らかに成立する。

$$\int_V \{\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})\} \cdot \mathbf{u} dV = 0 \quad (\text{D.2})$$

ここで  $V, S$  はそれぞれ、系全体の体積、境界条件が与えられる表面積、を表す。この関係式に Gauss の発

散定理を用い、系が平衡状態にある場合と、そこから可容変位場のみが変分  $\delta \mathbf{u}$  を持つ場合の差をとると、

$$\int_V \rho \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (\text{D.3})$$

という動的問題における仮想仕事の原理が得られる。この式の中の各項は、左辺第一項が慣性力による仮想仕事、左辺第二項が内力による仮想仕事、右辺第一項が外部表面力による仮想仕事、右辺第二項が外部物体力(重力)による仮想仕事、を表している。

以降では、この仮想仕事式の各項の離散化について述べる。

## D.2 各項の離散化

### D.2.1 三次元ソリッド要素

FEA で系全体を離散的にモデル化する際には、一般にアイソパラメトリック要素が用いられるが、その種類は様々である。本研究は先進グリッド構造 (AGS) について解析を行うが、交点の複雑さ、スキン、スキンと格子の接着、損傷の導入など様々な解析に対応させることを考慮して、三次元ソリッド要素を用いた。この要素は、任意の六面体の形をした三次元要素であり、節点において並進三自由度を有している。この要素内の任意の点の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  及び変位ベクトル  $\mathbf{u}$  は、その要素を規定する八つの節点の位置ベクトル  $\underline{\mathbf{x}}^n$  及び変位ベクトル  $\underline{\mathbf{U}}^n (n = 1 \sim 8)$  と、それらを線形結合した際の係数となる形状関数  $N^n$  を用いて、以下のように記述される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= N^n \underline{\mathbf{x}}^n \\ &= N^1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} + N^2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} + \cdots + N^8 \begin{pmatrix} x_1^8 \\ x_2^8 \\ x_3^8 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= N^n \underline{\mathbf{U}}^n \\ &= N^1 \begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{pmatrix} + N^2 \begin{pmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{pmatrix} + \cdots + N^8 \begin{pmatrix} U_1^8 \\ U_2^8 \\ U_3^8 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

ここで形状関数  $N^n (n=1\sim 8)$  は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 N^1 &= \frac{1}{8} (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \\
 N^2 &= \frac{1}{8} (1 + r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \\
 N^3 &= \frac{1}{8} (1 + r_1)(1 + r_2)(1 - r_3) \\
 N^4 &= \frac{1}{8} (1 - r_1)(1 + r_2)(1 - r_3) \\
 N^5 &= \frac{1}{8} (1 - r_1)(1 - r_2)(1 + r_3) \\
 N^6 &= \frac{1}{8} (1 + r_1)(1 - r_2)(1 + r_3) \\
 N^7 &= \frac{1}{8} (1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3) \\
 N^8 &= \frac{1}{8} (1 - r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)
 \end{aligned}
 \tag{D.6}$$

ただし上式中、及び、以降の検討では、下線は離散化されたベクトルであることを表すこととする。ここで、 $\mathbf{r} (-1 \leq r_i \leq 1)$  は一般に自然座標と呼ばれる。式 (D.4), (D.5) は結局、自然座標  $\mathbf{r}$  から任意の異なる形状をした六面体要素内のベクトル  $\mathbf{x}$  への写像を表しているといえる。Fig.D.2.1 に要素の形状及び各節点番号の位置を示す。

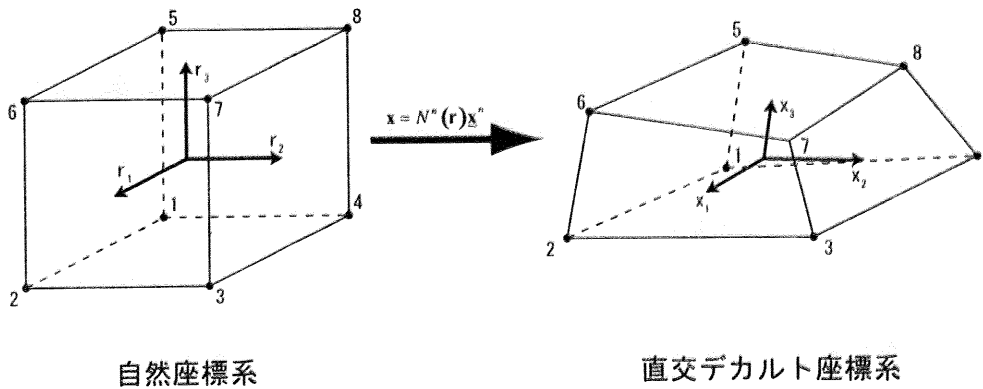


Fig.D.1 Positions of nodal points in 3D brick element.

### D.2.2 慣性力項の離散化

慣性力による仮想仕事は、式 (D.3) の第一項のように表せる。ここで、物質点の加速度  $\mathbf{a}$  は変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の時間二階微分  $\ddot{\mathbf{u}}$  であることから、結局慣性力による仮想仕事は、

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = \sum_e \int_{V_e} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} dV_e
 \tag{D.7}$$

となる。またこの式より、FEA では系全体の仮想仕事の計算を、各要素ごとの仮想仕事の和として計算していることがわかる。ここで、 $V_e$  は各要素の体積を表している。さて、三次元ソリッド要素を用いて離散化していく場合、要素内の任意点の仮想変位ベクトル  $\mathbf{u}$  及び加速度ベクトル  $\ddot{\mathbf{u}}$  が式 (D.5) より、

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u} &= \mathbf{N}^n \delta \underline{\mathbf{U}}^n \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}^n \ddot{\underline{\mathbf{U}}}^n\end{aligned}\quad (\text{D.8})$$

となるので、これを式 (D.7) に代入すると、

$$\begin{aligned}\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} dV &= \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{m^t} \left\{ \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^n \mathbf{N}^m dV_e \right\} \ddot{\underline{\mathbf{U}}}^n \\ &= \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{m^t} \underline{\mathbf{M}}_e \ddot{\underline{\mathbf{U}}}^n\end{aligned}\quad (\text{D.9})$$

と計算される。ここで、 $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  に総和規約を適用する。このように、慣性力項の仮想仕事では、各要素ごとに質量マトリックスを作成し、足し合わせることによって系全体での質量マトリックスを作成する。この質量マトリックスは、後述のその他の通常の有限要素離散化に整合する手順で得られていることから、**consistent** 質量マトリックスと呼ばれる。

これに対して、節点に質量を集中させることにより、フルマトリックスである **consistent** 質量マトリックスを対角項のみのマトリックスにしたものを、**lumped**(集中) 質量マトリックスと呼ぶ。このように質量マトリックスが対角マトリックスになると、マトリックスの乗算や連立一次方程式の解法時の逆行列演算等が瞬時に行え、また計算機の記憶容量も少なくなるため、計算効率が格段に増す。以上の点から特に、陽的動解析手法においては、この **lumped** 質量マトリックスが使用されることが多い。本研究における解析でも、構造の複雑さの観点から、**lumped** 質量マトリックスを用いることとした。**lumped** 質量マトリックスの作成は、要素全体の質量  $\int_{V_e} \rho dV_e$  を求めた後に、しかるべき方法で節点に質量を分配する。この方法には様々なものがあるが、いずれも一長一短であり、特に優劣をつけることが出来ない。したがって、適当な方法を選んで、固有値解析などの基礎解析を実施し、適切な解が得られるものを使用するのが一般的である。

### D.2.3 内力項の離散化

内力による内部の仮想仕事は、式 (D.3) の第二項のように表せる。

まず、この項におけるひずみの変分であるが、変位  $\mathbf{u}$  を用いて

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \right\} \quad (\text{D.10})$$

と表すことができる。ただし、ここでは二次の微小量を無視していることを付記しておく。これは、弾性波による物質点の変位量が非常に微小(マイクロオーダー)となるため、本研究では一次項のみを考慮し

た微小変形問題として扱うためである。よって、ひずみの変分も

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \right\} \quad (\text{D.11})$$

と表される。この式に、式 (D.5) を代入すると、

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial N^n}{\partial x_j} \delta U_i + \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \delta U_j \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

のようにひずみの変分が表される。ここで、せん断成分の対称性を考慮して、ひずみ成分を辞し機のようにベクトル表示する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}\} \quad (\text{D.13})$$

このように記述するならば、式 (D.12) は改めて、

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{U}^n \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^n}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^n}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N^n}{\partial x_2} & \frac{\partial N^n}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^n}{\partial x_3} & \frac{\partial N^n}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^n}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta U_1^n \\ \delta U_2^n \\ \delta U_3^n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

と表される。ここで形状関数の微分  $\frac{\partial N^n}{\partial x_j}$  は次式のように計算される。

$$\frac{\partial N^n}{\partial x_j} = \frac{\partial N^n}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \quad (\text{D.15})$$

ただし、 $\frac{\partial r_k}{\partial x_j}$  については、 $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{x}$  への写像における Jacobi マトリックスを  $\mathbf{J}$  として、

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{J} d\mathbf{r} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{J}^{-1} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

と求められる。

一方、構成則が

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{D.17})$$

というように、4 階テンソル  $\mathbf{C}$  を用いて表せるとする。ここで、ひずみに併せて応力テンソル  $\mathbf{T}$  も、

$$\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, 2\sigma_{12}, 2\sigma_{23}, 2\sigma_{31}\} \quad (\text{D.18})$$

とベクトル表記することとして、これに併せて  $\mathbf{C}$  もマトリックス表記すると、三次元ソリッド要素の場合の構成則は、

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2\sigma_{12} \\ 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

と表される。

以上、式 (D.14), (D.19) を、式 (D.3) の第二項に代入すると、

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV &= \sum_e \int_{V_e} \mathbf{T} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_e \\ &= \sum_e \int_{V_e} (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_e \\ &= \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{m'} \left\{ \int_{V_e} \mathbf{B}' (\mathbf{C} \mathbf{B}) dV_e \right\} \underline{\mathbf{U}}^n \\ &= \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{m'} \underline{\mathbf{K}}_e \underline{\mathbf{U}}^n \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

と表される。

#### D.2.4 外力項の離散化

外力による仮想仕事は、式 (D.3) の右辺のように表せる。ただし本研究では、物体力 (重力) を無視して考えるため、表面力、すなわち、右辺の第一項のみを考慮することとした。

表面力の離散化は、変位の離散化の式 (D.5) より、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS &= \sum_e \int_{S_e} \mathbf{t} \cdot (N^n \cdot \delta U^n) dS_e \\ &= \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{m'} \int_{S_e} N^n \mathbf{t} dS_e \\ &= \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{m'} \underline{\mathbf{F}}_e \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

## D.3 離散化された動的問題の解法

D.2 節で展開したそれぞれの仮想仕事の離散化をまとめると、結局、動的問題の仮想仕事式 (D.3) は、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{mT} \underline{\mathbf{M}}_e \ddot{\underline{\mathbf{U}}}^n + \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{mT} \underline{\mathbf{K}}_e \underline{\mathbf{U}}^n &= \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{mT} \underline{\mathbf{F}}_e \\ \Leftrightarrow \sum_e \delta \underline{\mathbf{U}}^{mT} (\underline{\mathbf{M}}_e \ddot{\underline{\mathbf{U}}}^n + \underline{\mathbf{K}}_e \underline{\mathbf{U}}^n - \underline{\mathbf{F}}_e) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

よって最終的に解かれるべき離散化された (運動方程) 式は、

$$\underline{\mathbf{M}}\ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}} \quad (\text{D.23})$$

となる。ただし、実際に運動方程式を考える際には、この式に減衰項を導入するのが一般的である。有限要素線形解析においては、自由振動の固有モード  $\underline{\phi}_i$  と  $\underline{\mathbf{C}}$  の直交性、すなわち、

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\mathbf{C}} \underline{\phi}_j = 2\omega_i \zeta_i \delta_{ij} \quad (\text{D.24})$$

を主要な二つのモードについてのみ仮定するのが一般的である。すなわち、 $\underline{\mathbf{C}}$  を  $\underline{\mathbf{M}}$  と  $\underline{\mathbf{K}}$  の線形結合で表した、いわゆる Rayleigh 減衰

$$\underline{\mathbf{C}} = \alpha \underline{\mathbf{M}} + \beta \underline{\mathbf{K}} \quad (\text{D.25})$$

を仮定し、予め式 (D.23) より求めておいた二つの主要モードの  $\omega_i, \zeta_i$  を、

$$\alpha + \beta \omega_i^2 = 2\omega_i \zeta_i \quad (\text{D.26})$$

に代入して  $\alpha, \beta$  について解く。このようにして定まる  $\underline{\mathbf{C}}$  が式 (D.23) に導入されるため、結局、以下のような運動方程式を解くことになる。

$$\underline{\mathbf{M}}\ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{C}}\dot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}} \quad (\text{D.27})$$

ここで改めて、 $\underline{\mathbf{M}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{K}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{U}}$  は、それぞれ系全体で定義した要素及び節点で離散化した、質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックス、節点外力ベクトル、変位ベクトルである。

さて、動的問題の場合、外力や構造が時間と共に変化し、しかもその変化は履歴に影響される。よって、解析は増分の形で行う必要がある。その際、解くべき運動方程式をどの時点でのものとするのかということここでこの方程式の解法は、大きく二種類に分かれる。一つは、時刻  $t$  までの変位、速度、加速度が既知であるとして、時刻  $t + \Delta t$  での平衡を満足する解を説く方法で、この場合にはどうしても反復計算が必要となるため、陰解法と呼ばれる。他方、時刻  $t$  での運動方程式を基に  $t + \Delta t$  の解を近似的に評価する手法が考えられる。後述の内容からわかるが、この手法では通常、連立方程式の求解操作や反復計算が必要な

くないため、陽に解けるといふ点から、陽解法と呼ばれる。以降では、その代表的な方法として中央差分法に基づく手法を示す。

時刻  $t + \Delta t$  及び  $t - \Delta t$  での変位を時刻  $t$  での Taylor 展開により表すと、

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} &= \underline{\mathbf{U}}^t + \underline{\dot{\mathbf{U}}}^t \Delta t + \frac{1}{2!} \underline{\ddot{\mathbf{U}}}^t \Delta t^2 + \dots \\ \underline{\mathbf{U}}^{t-\Delta t} &= \underline{\mathbf{U}}^t - \underline{\dot{\mathbf{U}}}^t \Delta t + \frac{1}{2!} \underline{\ddot{\mathbf{U}}}^t \Delta t^2 - \dots\end{aligned}\tag{D.28}$$

と書ける。このうち、 $\Delta t$  の二次の項までを考慮して、式 (D.28) の差および和をとると、

$$\begin{aligned}\underline{\dot{\mathbf{U}}}^t &= \frac{1}{2\Delta t} (\underline{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \underline{\mathbf{U}}^{t-\Delta t}) \\ \underline{\ddot{\mathbf{U}}}^t &= \frac{1}{\Delta t^2} (\underline{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - 2\underline{\mathbf{U}}^t + \underline{\mathbf{U}}^{t-\Delta t})\end{aligned}\tag{D.29}$$

というように、速度、加速度を時刻  $t$  の前後  $\Delta t$  秒での変位を用いて表すことができる。この二式を時刻  $t$  における運動方程式 (D.27) に代入して整理すると、

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\mathbf{M}} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{\mathbf{C}} \right) \underline{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{F}}^t - \underline{\mathbf{K}}^t \underline{\mathbf{U}}^t + \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\mathbf{M}} (2\underline{\mathbf{U}}^t - \underline{\mathbf{U}}^{t-\Delta t}) + \frac{1}{2\Delta t} \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{U}}^{t-\Delta t}\tag{D.30}$$

となる。これより、もし左辺の括弧内が対角マトリックスであるとするならば、連立方程式を解くことなく (対角項の逆数を掛けるだけで)、右辺ベクトルの計算のみによって  $\underline{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$  を求められることがわかる。そのため、まず  $\underline{\mathbf{M}}$  については、D.2.2 で述べたとおり、質量集中マトリックスが良く用いられ、また左辺に関しての減衰項は無視されることが多い。ここで一つ問題となるのが、第一ステップ目の右辺の計算時に  $\underline{\mathbf{U}}^{-\Delta t}$  の値が必要となってしまう。しかしこの問題は、 $t = 0$  とおいた式 (D.29) から  $\underline{\mathbf{U}}^{\Delta t}$  を消去して得られる、

$$\underline{\mathbf{U}}^{-\Delta t} = \underline{\mathbf{U}}^0 - \Delta t \underline{\dot{\mathbf{U}}}^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \underline{\ddot{\mathbf{U}}}^0\tag{D.31}$$

を用いて、すなわち、初期速度及び加速度を与えることにより解くことが出来る。

以上この手法は、時刻  $t - \Delta t, t$  での釣り合い状態から近似的にその次のステップを外挿しているようなものである。そのため、上述のとおり運動方程式を解く計算時間が節約できる反面、時間幅  $\Delta t$  を十分小さくとらないと解の安定性が保証されない欠点も併せ持っている。

## D.4 解の安定性

動的問題の有限要素解析においては、前述のとおり時間増分毎に解析を行う必要があるが、この時間増分  $\Delta t$  をある限界値を超えて大きくすると解が桁違いに不合理な値をとり発散してしまう場合がある。このような不安定現象が  $\Delta t$  を小さくすることで回避される場合、その時間積分法は“条件付安定”であると呼ぶ。(反対に、 $\Delta t$  の値によらず安定な解が得られる場合、その手法は“無条件安定”であると呼ぶ。)



#### D.4 解の安定性

---

中央差分法に基づく陽解法は“条件付安定”な解法であり、その安定限界  $\Delta t_{cr}$  は、

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} = \frac{(2\pi/\omega_n)}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} \quad (\text{D.32})$$

と表される。ここで、 $T_n, \omega_n$  はそれぞれ、最小周期、最大円振動数を表す。これを満足する限りは、解の安定性 (解が発散しないこと) が保証される。

さらに中央差分法では、次式で示す Courant 条件も満足しなければならない。

$$\Delta t < \frac{l_e}{c} \quad (\text{D.33})$$

ここで、 $l_e, c$  はそれぞれ、要素内の最小節点間距離、波の位相速度を表す。

---

## 附録 E

# 正規分布による検定統計表の作成方法

本章では、第4章中で提案した『複数の異常値を全体集合の中より検定する。』という手法を用いる際に必要となる、検定統計表の作成方法について詳述する [74][75]。

ある標本の中に異常値があるということを、統計学の分野では、「2種類の異なる分布に従う標本が混在している」と考える。すなわち、

$$x_1, \dots, x_n \quad (\text{E.1})$$

という標本が、

$$J_1 = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$$
$$J_2 = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$$

という二つの集合からの標本で構成されていると考える。すなわち、 $J_1, J_2$  の一方を“正常値の集合”、もう一方を“異常値の集合”と考えていることになる。。ただし、 $0 \leq k \leq n, m+k \equiv n$  である。よって異常値を検知するとはすなわち、 $J_1, J_2$  を探し出すことと言い換えることができる。

ひとつの異常値をサイズ  $n$  の正規分布から見つける方法には様々なものがあるが、この方法は一般的に次のような手順で行われる。

- ① 標本から計算されるある確率統計量  $S(x)$  について、 $Pr(S(x) > \lambda_\alpha) = \alpha$  となるような  $\lambda_\alpha$  を求める。
- ②  $S(x) > \lambda_\alpha$  となったら異常値が存在しないと、 $S(x) \leq \lambda_\alpha$  となるようであれば異常値は存在しないと判定する。

このとき選択される  $S(x)$  は、いくつかの種類があり、代表的なものをあげると以下のようなものがある。

- Extreme studentized deviate (ESD) =  $\max_{i=1, \dots, n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{s}$

- Studentized range (STR) =  $\frac{(x_{[n]} - x_{[1]})}{s}$
- Kurtosis (KUR) =  $n \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^4}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2}$
- R-statistic (RST) =  $\max_{i=1, \dots, n} \frac{|x_i - a|}{b}$   
 ただし、 $a = \sum_{i=k+1}^{n-k} \frac{x_{[i]}}{n-2k}$ ,  $b^2 = \sum_{i=k+1}^{n-k} \frac{(x_{[i]} - a)^2}{n-2k-1}$

いずれも統計学の分野では一般的な統計量の派生したものであり、これらの良し悪しは一概に述べるのは難しいが、ESD が現在までのところ、異常値をひとつだけ見つけるという目的においては、妥当ではないかと言われている [74]。本研究でも統計量としてこの ESD を用いたので、ESD を例として、複数の異常値を検知する方法について詳述する。

以下に示す手法は、「 $n$  個の標本の中から最大で  $k$  個の異常値を判定する手法」と位置づけられる。つまりこの手法の適用範囲は、標本内に存在する異常値の個数が  $1 \sim k$  個のどの個数の損傷でも検知できなければならない。ここで説明のため、次の予備集合  $I_0, \dots, I_n$  を予め以下のように定義しておく。

$$I_0 = \{x_1, \dots, x_n\} \tag{E.2}$$

$$I_{t+1} = I_t - x^{(t)} \tag{E.3}$$

$$|I_t| = I_t \text{ 中の標本数。} \tag{E.4}$$

ただし、 $x^{(t)}$  は以下の式によって定義される標本である。

$$\max_{x_i \in I_t} |x_i - \bar{x}(I_t)| = |x^{(t)} - \bar{x}(I_t)| \tag{E.5}$$

$$\bar{x}(I_t) = \sum_{x_i \in I_t} \frac{x_i}{|I_t|} \tag{E.6}$$

$$t = 0, \dots, k-1 \tag{E.7}$$

上の式を言い換えると、集合  $I_{t+1}$  は、集合  $I_t$  中の標本のうち  $I_t$  全体の平均から最も外れている値を除いたもの、ということができる。さらに、

$$R_t = S(I_{t-1}) \tag{E.8}$$

とおく。ここで、 $S(I_{t-1})$  とは  $I_{t-1}$  中の標本に対して適応される単一の異常値を見つけるための検定統計量のことである。ただし、 $t = 1, \dots, k$  とする。複数の異常値を検知することを考える場合には、この  $R_t$ 、すなわち、 $R_1, \dots, R_k$  の分布も考慮しなければならない。この集合の端部の分布を考え、次式で示すような  $\beta$  及び  $\lambda_1(\beta), \dots, \lambda_k(\beta)$  を決定していく。

$$\Pr(R_i > \lambda_i(\beta)) = \beta \quad (i = 1, \dots, k) \tag{E.9}$$

$$\Pr \left\{ \bigcup_{i=1}^k [R_i > \lambda_i(\beta)] \right\} = \alpha \quad (\text{E.10})$$

ここで、 $\alpha$  は有意水準を表す。有意水準は、全体集合からどのくらい外れている値から異常値と決定するかの指標となるものであるから、この値を大きくすればそれだけ異常値が判定される可能性も大きくなる。しかしながら、同時に、異常値ではないものを異常値と判定してしまう可能性があるとも言える。つまり  $\alpha$  が、検定の性質を決定することになる。すなわち、

- $\alpha$  が大きい検定は、正常な値を異常と判定してしまうことはあっても、異常値を正常と判断してしまわないように、安全側の判定を行っていることになる。
- $\alpha$  が大きい検定は、異常値を検定しそこなうことはあるが、正常な値を異常とみなさない。

といった特徴が出る。実際には、この検定手法を用いてどのようなことをするのかによって、 $\alpha$  の値 (の傾向) が決定される。

さてこの検定では、もし、

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^k [R_i \leq \lambda_i(\beta)] \right\} \quad (\text{E.11})$$

が真の場合は、異常値はひとつもないと判断し、それ以外の場合には、少なくともどれかの集合には一つ異常値が判定されていることになるので、以下の式

$$\bigcup_{i=1}^k [R_i > \lambda_i(\beta)] \quad (\text{E.12})$$

が真であるということを意味する。そして、 $l$  を

$$l = \max_{i=1, \dots, k} \{i : R_i > \lambda_i(\beta)\} \quad (\text{E.13})$$

すなわち、 $R_i > \lambda_i(\beta)$  となる最大の  $i$  と定義すれば、 $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(l-1)}$  が異常値であると結論付けられる。ここで、 $\beta$  は  $i$  とは独立で任意に定められる値であり、主には手法が単純化されるように決定される値である。

この手法の利点は、どのような個数の異常値でも  $k$  個までであれば、判定力がそれほど変わらないまま、必ず見つけられるという点である。一般的な判定方法では、まず最初に標本全体を眺め、その中に入っているであろう異常値の個数を予測し、その上で予測した一定個数の異常値を判定する。それに対してこの方法は、一般的には異常値の個数というのは予め予測することが難しいことを考えると、非常に有効であるといえる。

さて実際問題としては、結局、任意の  $n, k, \alpha$  に対して  $\lambda_i$  を決定すればよい。この値  $\lambda_i$  は確率的な要素が入っているため、モンテ・カルロ法により決定される。簡単に言えば、有意水準が 5% ならば、ランダ

ムに得られた全標本のうち上位 5% のデータが除外されるような閾値を定めればよい。

本研究では、正常値は正規分布にのっつくと考えているので、まずは正規分布をする乱数を生成させなければならぬ。これには、P まず ark と Miller の「最小」乱数生成法に Bays と Durham の切り混ぜを加えた方法を用いて、0 と 1 の間の一様乱数を発生させる。そして得られた一様乱数に対して、Box-Muller 法により正規分布する乱数を生成する [73]。

さて  $\lambda_i$  を決定する手順は、以下のように記述される。

- ① 生成された正規分布乱数より  $n$  個のデータの組を 500 組生成する。
- ② 各組において  $R_i (i = 1, \dots, k)$  が決定されるので、この 500 個の  $R_i$  について、以下の式で定義される  $\delta_{ij} (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, 499)$  を計算する。

$$\Pr [R_i > \delta_{ij}] = \frac{500 - j}{500} \quad (\text{E.14})$$

- ③ 改めて正規分布する乱数を再度生成し、以下の確率  $P_j$  を計算する。

$$P_j = \Pr \left\{ \bigcup_{i=1}^k [R_i > \delta_{ij}] \right\}, \quad j = 1, \dots, 499 \quad (\text{E.15})$$

- ④ 予め決めておいた有意水準  $\alpha$  から、最小となる  $j_1$  を求める。ただし  $j_1$  は、 $P_{j_1} > \alpha > P_{j_1+1}$  を満たす値とする。
- ⑤  $P_{j_1} = \alpha$  となった場合には、

$$\beta = \frac{500 - j_1}{500} \quad (\text{E.16})$$

$$\lambda_i(\beta) = \delta_{ij_1} \quad (\text{E.17})$$

とする。

$P_{j_1} > \alpha > P_{j_1+1}$  となった場合は、 $\lambda_i(\beta)$  は線形補間によって求めることとし、

$$\lambda_i(\beta) = w\delta_{ij_1} + (1 - w)\delta_{ij_1+1} \quad (\text{E.18})$$

$$w = \frac{\alpha - P_{j_1+1}}{P_{j_1} - P_{j_1+1}} \quad (\text{E.19})$$

と計算される。

以上の 5 つのステップを 10 回繰り返す。ここで  $n$  個のデータを持つグループを 500 個、それを 10 回繰り返すので、合計 5000 個の標本を作成するが、その際に元となる一様分布に同じものが二度以上生成されないように注意する必要がある、そのチェックをプログラム中に必ず入れなければならない。

この 10 回の繰り返しにより、 $\lambda_1(\beta), \dots, \lambda_k(\beta)$  について 10 個の独立した推定値の組み合わせが得られる。このそれぞれ 10 個の値の平均値を取り、本研究で用いる閾値とした。

---

なお、ESD 以外の統計量を用いた場合も、原理的にはすべて同じ手法で表を作成することができる。ESD 以外の統計量との検定力の比較については、Rosner[74][75]のほか、Jain[76]らがすでに検証している。それらによると、特定の条件の下ではその優劣があるものの、一般的にはほとんど違いがないことがわかっており、どの条件でもある程度の検定力を示すものとしては、ESD が最も適していると考えられている。

---

## 附録 F

### 実験に用いた器具一覧

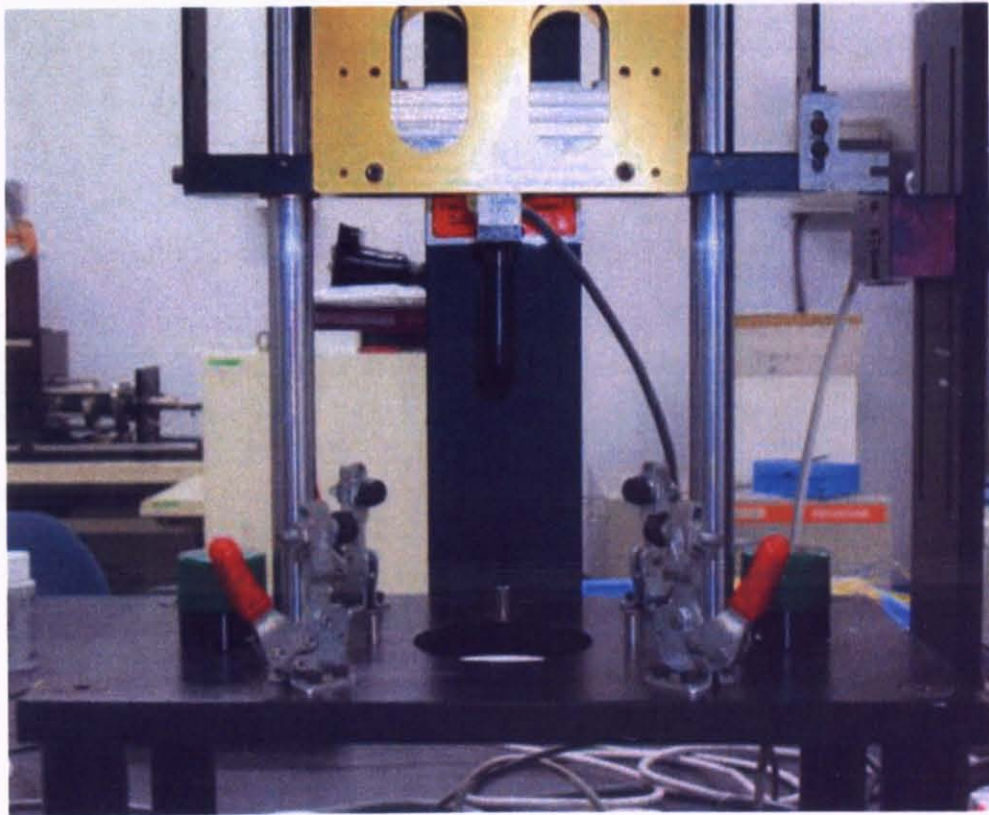


Fig.F.1 Low velocity impact test machine (Dynatup 930-I, Instron Corp.).



Fig.F.2 Scanning Electron Microscopy (SEM).





Fig.F.3 Scanning Acoustic Microscopy (SAM).



Fig.F.4 Optical Microscope.



Fig.F.5 Soft X-ray apparatus.

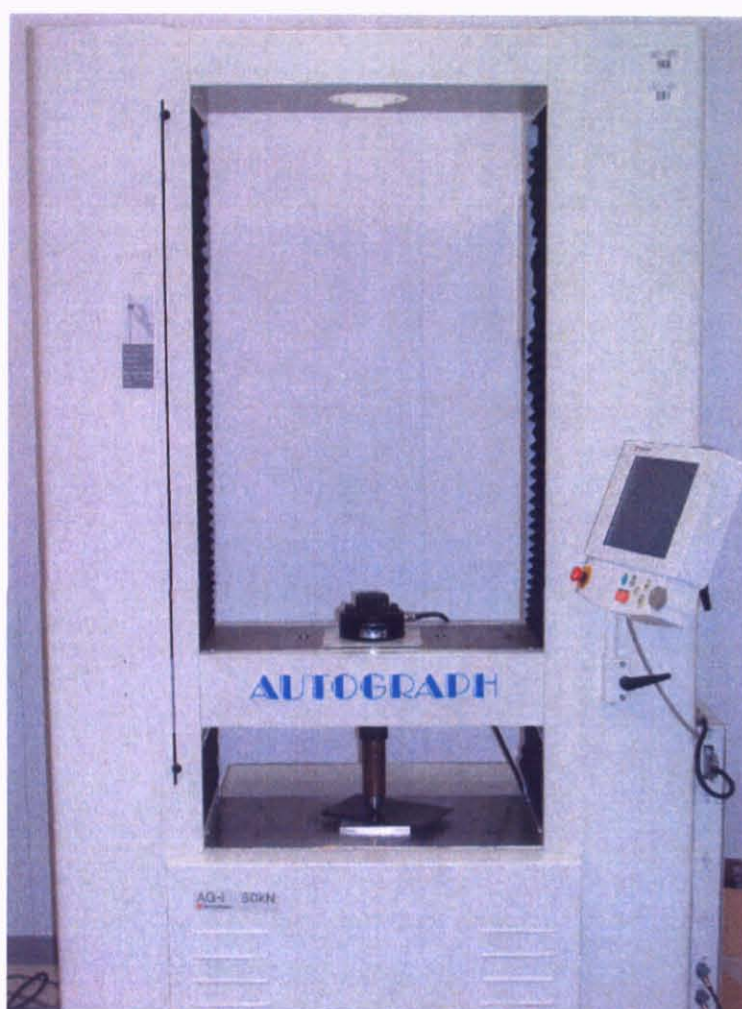


Fig.F.6 Autograph(AG-I, Shimadzu Corp.).



Fig.F.7 Instron(Instron1185, Instron Co.).



## 参考文献

- [1] 邊吾一, 石川隆司. 先進複合材料工学. 培風館, 2005.
- [2] 日本航空広報部編. 最新 航空実用ハンドブック (航空技術/営業用語辞典兼用). 朝日ソノラマ, 2005.
- [3] 山本鎮男・編著. ヘルスモニタリング —機械・プラント・建築・土木構造物・医療の健全性監視—. 共立出版株式会社, 1997.
- [4] D Balageas, CP Fritzen, and A Guemes. *Structural Health Monitoring*. ISTE Ltd., 2006.
- [5] WJ Staszewski, C Boller, and GR Tomlinson. *Health Monitoring of Aerospace Structures: Smart Sensor Technologies and Signal Processing*. John Wiley & Sons Inc, 2004.
- [6] 小林繁夫. 航空機構造力学. 丸善株式会社, 1992.
- [7] *Space Tourism - How Soon Will It Happen?*, Snowmass, Colorado, USA, 1-8, February 1997.
- [8] RR Meyer, OP Harwood, and JI Orlando. Isogrid design handbook. Technical Report NASA-CR-124075; MDC-G4295A, NASA Center for AeroSpace Information (CASI), 1973.
- [9] VV Vasiliev, VA Barynin, and AF Rasin. Anisogrid lattice structures - survey of development and application. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 54, No. 2-3, pp. 361–370, 2001.
- [10] Fibrous Composites in Structural Design. *Continuous Filament Advanced Composite Isogrid - A Promising Structural Concept*, 1980.
- [11] D Slinchenko and VE Verijenko. Structural analysis of composite lattice shells of revolution on the basis of smearing stiffness. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 54, No. 2-3, pp. 341–348, 2001.
- [12] TD Kim. Fabrication and testing of thin composite isogrid stiffened panel. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 49, No. 1, pp. 21–25, 2000.
- [13] Aerospace Conference — Proceeding IEEE, editor. *Advanced Grid Stiffened Structures for the Next Generation of Launch Vehicles*, 1997.
- [14] SM Huybrechts, TE Meink, PM Wegner, and JM Ganley. Manufacturing theory for advanced grid stiffened structures. *COMPOSITES PART A, APPLIED SCIENCE AND MANUFACTURING*, Vol. 33, No. 2, pp. 155–161, 2002.
- [15] J Onoda. Optimal laminate configurations of cylindrical-shells for axial buckling. *AIAA JOURNAL*, Vol. 23, No. 7, pp. 1093–1098, 1985.
- [16] J Onoda. An optimal-design of lattice cylinders. *TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY FOR AERONAUTICAL AND SPACE SCIENCES*, Vol. 29, No. 83, pp. 46–62, 1986.

- 
- [17] 28th International SAMPE Technical Conference. *Hybrid Tooling for Advance Grid Stiffened (AGS) Structures*, 4-7, Nov. 1996.
- [18] S Huybrechts and SW Tsai. Analysis and behavior of grid structures. *COMPOSITES SCIENCE AND TECHNOLOGY*, Vol. 56, No. 9, pp. 1001–1015, 1996.
- [19] HJ Chen and SW Tsai. Analysis and optimum design of composite grid structures. *JOURNAL OF COMPOSITE MATERIALS*, Vol. 30, pp. 503–534, 1996.
- [20] Aerospace Conference, IEEE. *Advanced Grid Stiffened Composite Payload Shroud for the OSP Launch Vehicle*, Vol. 4, Big Sky, MT, USA, 18-25, Mar. 2000.
- [21] PEJ Higgins, P Wegner, A Viisoreanu, and G Sanford. Design and testing of the minotaur advanced grid-stiffened fairing. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 66, pp. 339–349, 2004.
- [22] DY Han and SW Tsai. Interlocked composite grids design and manufacturing. *JOURNAL OF COMPOSITE MATERIALS*, Vol. 37, No. 4, pp. 287–316, 2003.
- [23] DR Ambur and LW Rehfield. Effect of stiffness characteristics on the response of composite grid-stiffened structures. *JOURNAL OF AIRCRAFT*, Vol. 30, No. 4, pp. 541–546, 1993.
- [24] AIAA/ASME/ASCE/AHS. *Optimal Design and Damage Tolerance Verification of An Isogrid Structure for Helicopter Application*, Norfolk Waterside Marriott, Norfolk, Virginia, USA, 7-10, Apr. 2003.
- [25] KP Rao and HR Gopalkrishna. Optimization of composite cylindrical panels for buckling by ranking. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 21, No. 3, pp. 131–140, 1992.
- [26] N Jaunky, NF Knight, and DR Ambur. Optimal design of grid-stiffened composite panels using global and local buckling analyses. *JOURNAL OF AIRCRAFT*, Vol. 35, No. 3, pp. 478–486, 1998.
- [27] N Jaunky, NF Knight, and DR Ambur. Optimal design of general stiffened composite circular cylinders for global buckling with strength constraints. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 41, No. 3-4, pp. 243–252, 1998.
- [28] DR Ambur and N Jaunky. Optimal design of grid-stiffened panels and shells with variable curvature. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 52, No. 2, pp. 173–180, 2001.
- [29] CT Key, MR Garnich, and AC Hansen. Progressive failure predictions for rib-stiffened panels based on multicontinuum technology. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 65, No. 3-4, pp. 357–366, 2004.
- [30] JWH Yap, ML Scott, RS Thomson, and D Hachenberg. The analysis of skin-to-stiffener debonding in composite aerospace structures. *COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 57, No. 1-4, pp. 425–435, 2002.
- [31] International Conference on Composite Materials 14 (ICCM-14). *Advanced Iso-Grid Fairing Qualifi-*
-

- 
- ation Test For Minotaur Launch Vehicle, San Diego, CA, USA, 2003.
- [32] International Conference on Composite Materials 14 (ICCM-14). *Failure Criteria for Composite Isogrid Structures*, San Diego, CA, USA, 2003.
- [33] AD Kersey, MA Davis, HJ Patrick, M LeBlanc, KP Koo, CG Askins, MA Putnam, and EJ Friebele. Fiber grating sensors. *JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY*, Vol. 15, No. 8, pp. 1442–1463, 1997.
- [34] RM Measures. Smart composite structures with embedded sensors. *COMPOSITES ENGINEERING*, Vol. 2, No. 5-7, pp. 597–618, 1992.
- [35] EJ Friebele, CG Askins, MA Putnam, AA Fosha, J Florio, RP Donti, and RG Blosser. Distributed strain sensing with fiber bragg grating arrays embedded in crtm(tm) composites. *ELECTRONICS LETTERS*, Vol. 30, No. 21, pp. 1783–1784, 1994.
- [36] H Sohn and KH Law. Damage diagnosis using experimental ritz vectors. *JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS ASCE*, Vol. 127, No. 11, pp. 1184–1193, 2001.
- [37] H Soon, DW Allen, K Worden, and CR Farrar. Statistical damage classification using sequential probability ratio tests. *Structural Health Monitoring*, Vol. 2, No. 1, pp. 57–74, 2003.
- [38] US-Korea Joint Seminar/Workshop on Smart Structures Technologies. *Minimizing Misclassification of Damage Using Extreme Value Statistics*, Sheraton Walker Hill Hotel, Seoul, Korea, 2-4, Sept. 2004.
- [39] H Sohn, G Park, JR Wait, NP Limback, and CR Farrar. Wavelet-based active sensing for delamination detection in composite structures. *SMART MATERIALS & STRUCTURES*, Vol. 13, No. 1, pp. 153–160, 2004.
- [40] H Sohn, HW Park, KH Law, and CR Farrar. Damage detection in composite plates by using an enhanced time reversal method. *Journal of Aerospace Engineering, ASCE*, 2005.
- [41] H Sohn, DW Allen, K Worden, and CR Farrar. Structural damage classification using extreme value statistics asme. *JOURNAL OF DYNAMIC SYSTEMS MEASUREMENT AND CONTROL TRANSACTIONS OF THE*, Vol. 127, No. 1, pp. 125–132, 2005.
- [42] 青木大助, 関根英樹. 複数のトラス部材が損傷を受けた大規模トラス構造を対象とした逐次領域絞込み法に基づく効率的損傷同定法. 日本航空宇宙学会論文集, Vol. 52, No. 605, pp. 257–264, 2004.
- [43] A Othonos and K Kyriacos. *Fiber Bragg Gratings - Fundamentals and Applications in Telecommunications and Sensing*. Arech House, Boston, London, 1999.
- [44] Y Okabe, T Mizutani, S Yashiro, and N Takeda. Detection of microscopic damages in composite lami-
-



- nates with embedded small-diameter fiber bragg grating sensors. *Composites Science and Technology*, Vol. 62, No. 7-8, pp. 951–958, 2002.
- [45] C Gan, RF Gibson, and GM Newaz. Analytical/experimental investigation of energy absorption in grid-stiffened composite structures under transverse loading. *EXPERIMENTAL MECHANICS*, Vol. 44, No. 2, pp. 185–194, 2004.
- [46] RF Gibson. Energy absorption in composite grid structures. *ADVANCED COMPOSITE MATERIALS*, Vol. 14, No. 2, pp. 113–119, 2005.
- [47] WH Lu, FS Liao, AC Su, PW Kao, and TJ Hsu. Effect of interleaving on the impact response of a unidirectional carbon-epoxy composite. *COMPOSITES*, Vol. 26, No. 3, pp. 215–222, 1995.
- [48] S BIRGER, A MOSHONOV, and S KENIG. Failure mechanisms of graphite-fabric epoxy composites subjected to flexural loading. *COMPOSITES*, Vol. 20, No. 2, pp. 136–144, 1989.
- [49] TV PARRY and AS WRONSKI. Kinking and tensile, compressive and interlaminar shear failure in carbon-fiber-reinforced plastic beams tested in flexure. *JOURNAL OF MATERIALS SCIENCE*, Vol. 16, No. 2, pp. 439–450, 1981.
- [50] D Purslow. Some fundamental-aspects of composites fractography. *COMPOSITES*, Vol. 12, No. 4, pp. 241–247, 1981.
- [51] JM Lifshitz, F Gov, and M Gandelsman. Instrumented low-velocity impact of cfrp beams. *INTERNATIONAL JOURNAL OF IMPACT ENGINEERING*, Vol. 16, No. 2, pp. 201–215, 1995.
- [52] WJ Cantwell and J Morton. The impact resistance of composite-materials - a review. *COMPOSITES*, Vol. 22, No. 5, pp. 347–362, 1991.
- [53] KH Ip and YW Mai. Delamination detection in smart composite beams using lamb waves. *SMART MATERIALS & STRUCTURES*, Vol. 13, No. 3, pp. 544–551, 2004.
- [54] M Lin and FK Chang. The manufacture of composite structures with a built-in network of piezoceramics. *COMPOSITES SCIENCE AND TECHNOLOGY*, Vol. 62, No. 7-8, pp. 919–939, 2002.
- [55] SS Kessler, SM Spearing, and C Soutis. Damage detection in composite materials using lamb wave methods. *SMART MATERIALS & STRUCTURES*, Vol. 11, No. 2, pp. 269–278, 2002.
- [56] 山下真司. イラスト・図解 光ファイバ通信の仕組みがわかる本. 技術評論社, 2002.
- [57] H Uetsuka. Awg technologies for dense wdm applications. *IEEE JOURNAL OF SELECTED TOPICS IN QUANTUM ELECTRONICS*, Vol. 10, No. 2, pp. 393–402, 2004.
- [58] MK Smit and CV Dam. Phasar-based wdm-devices: Principles, design and applications. *IEEE JOUR-*

- 
- NAL OF SELECTED TOPICS IN QUANTUM ELECTRONICS*, Vol. 2, No. 2, pp. 236–250, 1996.
- [59] 近藤恭平. 振動論. 培風館, 1993.
- [60] V Barnett and T Lewis. *Outliers in Statistical Data. 3rd edition*. John Wiley & sons, Chichester, 1994.
- [61] R Dandliker A Bertholds. Determination of the individual strain-optic coefficients in single-mode optical fibers. *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 6, No. 1, pp. 17–20, 1988.
- [62] 藤島啓. ピエゾセラミックス. 裳華房, 1993.
- [63] 内野研二編著訳, 湯田昌子訳. セラミストのための電気物性入門. 内田老鶴圃, 1990.
- [64] <http://www.fujicera.co.jp/product/j/01/10.pdf>. 圧電セラミック テクニカル・ハンドブック. 株式会社 富士セラミックス, 2006.
- [65] 谷腰欣司. 超音波とその使い方: 超音波センサ・超音波モータ. 日刊工業新聞社, 1994.
- [66] 十文字弘道 [ほか] 共著. 電気電子のための固体振動論の基礎. オーム社, 1982.
- [67] 塩寄忠監修. 圧電材料とその応用. シーエムシー出版, 2002.
- [68] T Mazuch. Wave dispersion modelling in anisotropic shells and rods by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 198, No. 4, pp. 429–438, 1996.
- [69] C Chree. On the longitudinal vibrations of aeolotropic bars with one axis of material symmetry. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 24, pp. 340–358, 1890.
- [70] RW Morse. Compressional waves along an anisotropic circular cylinder having hexagonal symmetry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 26, No. 6, pp. 1018–1021, 1954.
- [71] I Mirsky. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders part i: Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 37, No. 6, pp. 1016–1021, 1965.
- [72] NJ Nigro. Wave propagation in anisotropic bars of rectangular cross section. part i. longitudinal wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 43, No. 5, pp. 958–965, 1968.
- [73] WH Press, BP Flannery, SA Teukolsky, and WT Vetterling. *Numerical Recipes in C*. 技術評論社, 1993.
- [74] B Rosner. Detection of many outliers. *TECHNOMETRICS*, Vol. 17, No. 2, pp. 221–227, 1975.
- [75] B Rosner. Percentage points for rst many outlier procedure. *TECHNOMETRICS*, Vol. 19, No. 3, pp. 307–312, 1977.
- [76] RB Jain. Percentage points of many-outlier detection procedures. *TECHNOMETRICS*, Vol. 23, No. 1, pp. 71–75, 1981.
-

## 本研究に関する学会発表および論文

### 学会発表

M. Amano, Y. Okabe, N. Takeda, H. Takeya and T. Ozaki, "Damage Identification in CFRP Grid Structures by Strain Monitoring with FBG Sensor Network", Asia-Pacific Workshop on Structural Health Monitoring, 2006.

M. Amano, T. Mizutani, Y. Okabe, N. Takeda and T. Ozaki, "Design and testing of integrated Bragg grating sensor systems for Advanced Grid Structures", 13th SPIE International Symposium, Smart Structures and Materials, An SPIE Event, 2006.

M. Amano, Y. Okabe, N. Takeda and T. Ozaki, "Detection of Rib Fractures in Advanced Grid Structure by Monitoring of Static Strain Distributions", 56th International Aeronautical Congress, 2005.

M. Amano, Y. Okabe, N. Takeda and T. Ozaki, "Identification of damage location in composite grid structures with embedded fiber Bragg grating sensors", 9th Japan International SAMPE Symposium & Exhibition (JISSE-9), 2005.

M. Amano, I. Takahashi, Y. Okabe, N. Takeda, H. Takeya and T. Ozaki, "Identification of damage location in Advanced Grid Structures using Fiber Bragg Grating Sensor", 12th SPIE International Symposium, Smart Structures and Materials, An SPIE Event, 2005.

天野正太郎, 新井健夫, Francois Germain, 武田展雄"複合材料グリッド構造中の損傷検知に用いる弾性波特性の検討" 第31回複合材料シンポジウム, 2006.

天野正太郎, 岡部洋二, 武田展雄, "埋め込み FBG センサを用いた先進グリッド構造の損傷同定", 第47回構造強度に関する講演会, 2005.

天野正太郎, 岡部洋二, 武田展雄, "クロスプライ積層板に埋め込んだ SMA 箔による損傷抑制効果の評価", 第12回複合材料界面シンポジウム, 2004.

天野正太郎, 高橋市弥, 岡部洋二, 武田展雄, 石井英隆, 竹谷元, 尾崎毅, "先進グリッド構造の損傷位置同定手法の確立", 第12回機械材料・材料加工技術講演会 (M&P2004), 2004.

N. Takeda, M. Amano, I. Takahashi, Y. Okabe, H. Takeya and T. Ozaki, "Damage Identification in Composite Grid Structures using Fiber BRAGG Grating Sensor", II ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials, 2005.

I. Takahashi, M. Amano, Y. Okabe and N. Takeda, "Damage Identification in CFRP Grid Structures by Strain Measurement with FBG Sensors", M&P2005, 2005.

I. Takahashi, M. Amano, Y. Okabe, N. Takeda, S. Hahn, H. Takeya and T. Ozaki, "Strain Analysis for Health Monitoring of CFRP Grid Structures Using FBG Sensors", 11th US-Japan Conference on Composite Materials & International Conference on Textile Composites, 2004.

高橋市弥, 天野正太郎, 岡部洋二, 武田展雄, 竹谷元, "ひずみ分布の変化を用いた CFRP グリッド構造の損傷位置同定", 日本実験力学学会 2005 年度年次講演会, 2005.

高橋市弥, 天野正太郎, 岡部洋二, 武田展雄, "CFRP グリッド構造のヘルスマモニタリングのための荷重分布解析", 第 53 回理論応用力学講演会, 2004.

高橋市弥, 天野正太郎, 岡部洋二, 武田展雄, 竹谷元, Steve Hahn, 尾崎毅志, "FBG センサを用いた CFRP グリッド構造のヘルスマモニタリング", 第 46 回構造強度に関する講演会, 2004.

Y. Okabe, M. Amano, N. Takeda, H. Takeya and T. Ozaki, "Damage Identification in CFRP Grid Structures by Strain Monitoring with FBG Sensor Network", 11th Composite Durability Workshop Jeju, KOREA, Jun 21-23, 2006.

岡部洋二, 天野正太郎, 武田展雄, "FBG センサひずみ測定による CFRP グリッド構造の損傷位置同定", 第 30 回複合材料シンポジウム 松江, 愛媛, 2005.

新井健夫, 天野正太郎, 岡部洋二, 武田展雄, "ガイド波を用いた先進グリッド構造の損傷検知", 日本機械学会 2006 年度年次大会 熊本, Sept., 2005.

## 投稿論文

M. Amano, Y. Okabe, N. Takeda and T. Ozaki, "Structural Health Monitoring of Advanced Grid Structure with Embedded-Fiber Bragg Grating Sensors", Structural Health Monitoring, ??[?], pp?-?,

2007.

## 今後の学会発表

M. Amano, T. Arai and N. Takeda, "Guided Wave Diagnosis in Composite Grid Structure with Embedded FBG Sensors", 14th SPIE International Symposium, Smart Structures and Materials, An SPIE Event, 2007.

新井健夫, 天野正太郎, Francois Germain, 岡部洋二, 武田展雄, "ガイド波を用いた先進グリッド構造の損傷診断手法の構築", JCOM-36 - 材料・構造の複合化と機能化に関するシンポジウム - (旧:FRP シンポジウム), Mar., 2007.

岡部洋二, 天野正太郎, 新井健夫, 武田展雄, 竹谷元, 尾崎毅志, "FBG センサネットワークを用いた複合材グリッド構造の損傷同定", 第6回構造物の安全性・信頼性に関する国内シンポジウム, 東京, June, 2007.

## 謝辞

本研究は著者が博士課程の三年間において、研究室にとどまらず、関係企業との打ち合わせ、共同実験、プロジェクト会議への参加等、様々な貴重な体験を基に成り立っております。指導教官である武田展雄教授(東京大学大学院新領域創成科学研究科)には、このような興味深い研究テーマを与えていただいただけでなく、このような経験を得る機会を与えていただいたこと、実験・解析の両面において十分な環境を与えていただいたこと、適切な時期に研究への適切な助言をいただいたこと、プロジェクトにおけるいくつもの障害を助け導いていただいたこと、など、大変お世話になりました。心より御礼申し上げます。

岡部洋二助教授(東京大学工学系研究科)には、研究を進める上での貴重な助言・ご指導、実験や論文作成に関する指導のほか、多忙な時期に実験をお手伝いいただいたことなど、心より感謝いたしております。多大な心労をおかけしてしまったかとは思いますが、このように論文作成にこぎつけることが出来ましたのも、ひとえに温かい目で見守っていただけたおかげと思っております。また、青木隆平教授(東京大学工学系研究科)、鈴木宏二郎助教授(東京大学大学院新領域創成科学研究科)、小笠原俊夫氏(航空宇宙研究開発機構, 総合技術研究本部)には、本論文の作成に当たり有益なご助言とご討論をいただきました。

本研究は経済産業省「民間航空機基盤技術プログラム」のうち中核的要素技術研究として位置付けられた「次世代構造用部材創製加工技術開発」プロジェクトの1テーマである「構造健全性診断技術開発」の一環として経済産業省の委託を受けた財団法人次世代金属・複合材料研究開発協会(RIMCOF)との契約に基づき実施されました。特に、直接の関係企業でありました、三菱電機株式会社 先端技術総合研究所 マテリアル技術部 複合材料グループの皆様(尾崎毅志氏、竹谷元氏、Steve Hahn氏、石井英隆氏、久米将実氏)には、供試体作成のみならず、研究及びプロジェクトの推進に当たり非常に多くのご協力をいただきました。初めての経験で、多大なご迷惑をおかけしたこともあったかと思いますが、貴重な経験をさせていただきましたこと、ここに厚く御礼申し上げます。

また本研究は、研究室の後輩からの多くの協力の上に成り立っております。新井健夫氏(東京大学新領域創成科学研究科先端エネルギー工学専攻、修士二年)とは、三年間の研究のうちの二年間を、共に、CFRP グリッド構造の研究に打ち込んでまいりました。彼の強力なサポートのおかげで、非常に密度の濃い研究が出来ましたことを、ここに述べると共に、謝意を表したいと思います。

首藤伸一氏(東北大学工学系研究科航空宇宙工学専攻、修士一年)、Francois Germain氏(SUPMECA, France)、にはそれぞれ一年間ずつ、グリッド構造への損傷、曲げ波の伝播特性、に関して個別に協力いただきました。重ねて謝意を表します。

そして武田研究室所属の皆様とは、研究についてのみならず、研究しやすい環境、楽しくも厳しい雰囲気

気、など多くの面でのサポートをいただき、充実した研究生生活を送ることが出来ました。特に同期の吉村彰記氏とは、のべ六年間の研究生生活を共に過ごしてまいりましたが、彼との切磋琢磨により多くのことを学びました。この経験が、本研究にも大いに役立ちましたことをここに感謝します。

最後に、これまで自分を支えてきてくれた両親に対して敬意を、そして博士課程の三年間を、全ての面でサポートしてくれた私の妻、真理に、この論文を捧げたいと思います。

2006年12月

天野 正太郎