

平面応力問題について

坪井 善勝・川股 重也・塩屋 繁松

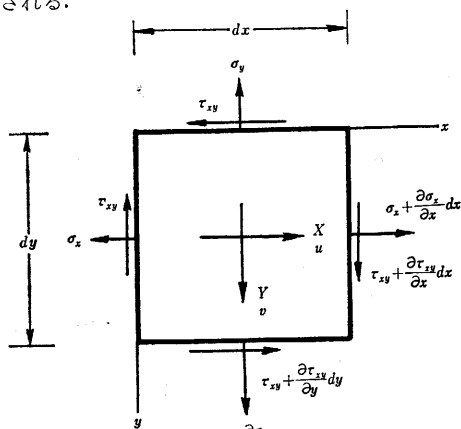
平面応力の問題は、建築物などの実際設計においてしばしばぶつかる問題ではあるが、現在までに適切な解法をみていない。本報告では壁体などとして一番利用度の高い矩形平板について、板周辺で任意な荷重が作用した場合の内部応力の算定に容易に適用し得る一解析法を示し、それを用いた解析例を二、三あげてみよう。

1. ま え が き

建築構造物の応力算定に際し、従来の計算法では柱とよりの交叉部（パネル部分）の解析は特殊化され、特に壁式構造物では各部材がプレファブ化されるにつれて、それらの局部的応力算定が必要になってくる。本論文ではそれらの問題に対し平面応力問題として一般的取扱いをしている。すなわち矩形平板の周辺に任意応力が作用した場合の内部応力を求める。一般にこの種の問題では重調和方程式を解くことに帰されるのであるが、ここでは差分法を適用し、多元連立一次方程式に直し、解の精密化のためにより細分割して応力の算定を行なっている。計算はまず板の性状行列を作成し、その逆行列を求め、境界条件を満足する荷重ベクトルを掛けて解を求め、その後に応力を算定している。これらの問題は必ずしも差分法で求める必要はなく、Fourier 解析は可能である。しかし板の性状行列とその逆行列を得ておくことは各種荷重と境界条件とに対して板の応力状態を手取り早く解明するのに役立つと考える。

2. 釣 合 式

高次微小項を省略すると図・1より釣合式は(1)で表わされる。



図・1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

3. 適合条件式

歪と変位との関係(2)で与える。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

変位を消去すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

ここでフックの法則

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} (4)$$

を用いると、適合条件式(3)は(1)を考慮して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (5)$$

となる。

4. 応力関数

$X=0, X=p$ (自重)のとき、応力を応力関数 F を用いて

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - px \quad (6)$$

とすれば、(1)を満足する。これらを適合条件式(5)へ代入して重調和方程式(7)を得る。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (7)$$

物体力 (body force) X, Y がポテンシャル関数 Ω から導かれるとき、物体力および応力を

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (8)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \Omega, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \Omega, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

とおくと、(1)を満足し、適合条件式(5)は次のようになる。

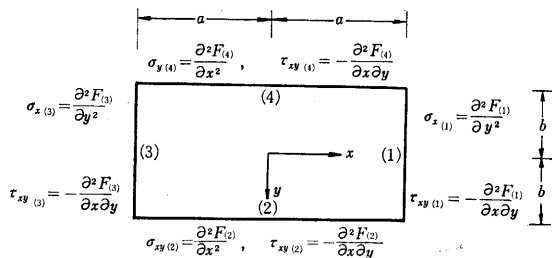
$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

以下に述べる境界条件を満足するような、これらの解 F を求める。

5. 境界条件

二次弾性問題において、作用力が境界で与えられた

場合、板の自重を無視すると、応力は重調和方程式 (7) を満足する F を求めることにより得られる。境界が図 2 のような場合の境界条件式を求める。



図・2

周辺 (1), (3) においては y に対して, 周辺 (2), (4) においては x に対してそれぞれの応力を積分すれば, A_n^1, B_n^1 ($n=1, 2, 3, 4$) を積分定数として

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(1)}{\partial x} &= A_1^1 - \int_0^y \tau_{xy(1)} dy, & \frac{\partial F(1)}{\partial y} &= B_1^1 + \int_0^x \sigma_{x(1)} dx \\ \frac{\partial F(2)}{\partial x} &= B_2^1 + \int_0^x \sigma_{y(2)} dx, & \frac{\partial F(2)}{\partial y} &= A_2^1 - \int_0^x \tau_{xy(2)} dx \\ \frac{\partial F(3)}{\partial x} &= A_3^1 - \int_0^y \tau_{xy(3)} dy, & \frac{\partial F(3)}{\partial y} &= B_3^1 + \int_0^x \sigma_{x(3)} dx \\ \frac{\partial F(4)}{\partial x} &= B_4^1 + \int_0^x \sigma_{y(4)} dx, & \frac{\partial F(4)}{\partial y} &= A_4^1 - \int_0^x \tau_{xy(4)} dx \end{aligned} \right\} (11)$$

を得る。積分定数は 4 偶点での条件から求まる。つまり

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(1)}{\partial x} \Big|_{y=b} &= \frac{\partial F(2)}{\partial x} \Big|_{x=a} \\ \therefore A_1^1 - \int_0^y \tau_{xy(1)} dy \Big|_{y=b} &= B_2^1 + \int_0^x \sigma_{y(2)} dx \Big|_{x=a} \\ \frac{\partial F(1)}{\partial y} \Big|_{y=b} &= \frac{\partial F(2)}{\partial y} \Big|_{x=a} \\ \therefore B_1^1 + \int_0^x \sigma_{x(1)} dy \Big|_{y=b} &= A_2^1 - \int_0^x \tau_{xy(2)} dx \Big|_{x=a} \\ \frac{\partial F(2)}{\partial x} \Big|_{x=-a} &= \frac{\partial F(3)}{\partial x} \Big|_{y=b} \\ \therefore B_2^1 + \int_0^x \sigma_{y(2)} dx \Big|_{x=-a} &= A_3^1 - \int_0^y \tau_{xy(3)} dy \Big|_{y=b} \\ \frac{\partial F(2)}{\partial y} \Big|_{x=-a} &= \frac{\partial F(3)}{\partial y} \Big|_{y=b} \\ \therefore A_2^1 - \int_0^x \tau_{xy(2)} dx \Big|_{x=-a} &= B_3^1 + \int_0^y \sigma_{x(3)} dy \Big|_{y=b} \\ \frac{\partial F(3)}{\partial x} \Big|_{y=-b} &= \frac{\partial F(4)}{\partial x} \Big|_{x=-a} \\ \therefore A_3^1 - \int_0^y \tau_{xy(3)} dy \Big|_{y=-b} &= B_4^1 + \int_0^x \sigma_{y(4)} dx \Big|_{x=-a} \\ \frac{\partial F(3)}{\partial y} \Big|_{y=-b} &= \frac{\partial F(4)}{\partial y} \Big|_{x=-a} \\ \therefore B_3^1 + \int_0^y \sigma_{x(3)} dy \Big|_{y=-b} &= A_4^1 - \int_0^x \tau_{xy(4)} dx \Big|_{x=-a} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(4)}{\partial x} \Big|_{x=a} &= \frac{\partial F(1)}{\partial x} \Big|_{y=-b} \\ \therefore B_4^1 + \int_0^x \sigma_{y(4)} dx \Big|_{x=a} &= A_1^1 - \int_0^y \tau_{xy(1)} dy \Big|_{y=-b} \\ \frac{\partial F(4)}{\partial y} \Big|_{x=a} &= \frac{\partial F(1)}{\partial y} \Big|_{y=-b} \\ \therefore A_4^1 - \int_0^x \tau_{xy(4)} dx \Big|_{x=a} &= B_1^1 + \int_0^y \sigma_{x(1)} dy \Big|_{y=-b} \end{aligned} \right\} (12)$$

(12) において, 応力に無関係な任意定数を 2 つとる。すなわち $A_1^1=0, B_1^1=0$ として他の定数を決定する。

$$\left. \begin{aligned} A_1^1 &= 0 \\ A_2^1 &= \int_0^a \tau_{xy(2)} dx + \int_0^b \sigma_{x(1)} dy \\ A_3^1 &= \int_0^b \tau_{xy(3)} dy - \int_0^b \tau_{xy(1)} dy + \int_{-a}^a \sigma_{y(2)} dx \\ A_4^1 &= \int_0^a \tau_{xy(4)} dx - \int_{-b}^0 \sigma_{x(1)} dy \\ B_1^1 &= 0 \\ B_2^1 &= - \int_0^b \tau_{xy(1)} dy - \int_0^a \sigma_{y(2)} dx \\ B_3^1 &= \int_{-a}^a \tau_{xy(2)} dx + \int_0^b \sigma_{x(1)} dy - \int_0^b \sigma_{x(3)} dx \\ B_4^1 &= \int_{-b}^0 \tau_{xy(1)} dy - \int_0^a \sigma_{y(4)} dx \end{aligned} \right\} (13)$$

また (12) から 2 つの平衡方程式 (外的釣合式) (14) が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-a}^a \tau_{xy(2)} dx + \int_{-b}^b \sigma_{x(1)} dy \\ = \int_{-a}^a \tau_{xy(4)} dx + \int_{-b}^b \sigma_{x(3)} dy \\ \int_{-b}^b \tau_{xy(1)} dy + \int_{-a}^a \sigma_{y(2)} dx \\ = \int_{-b}^b \tau_{xy(3)} dx + \int_{-a}^a \sigma_{y(4)} dx \end{aligned} \right\} (14)$$

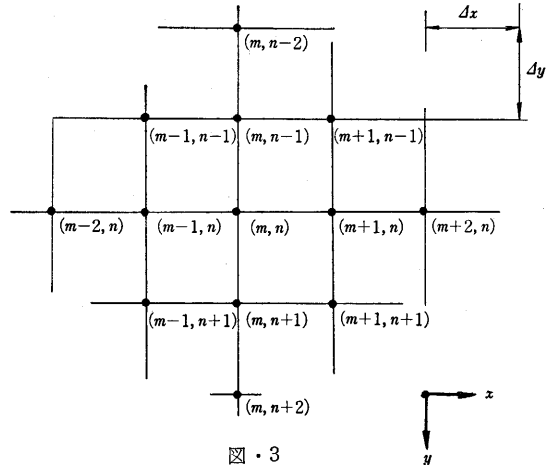
応力関数 F は (11) を積分すると次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} F(1) &= B_1^0 + B_1^1 y + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \\ F(2) &= B_2^0 + B_2^1 x + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \\ F(3) &= B_3^0 + B_3^1 y + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(3)} dy dy \\ F(4) &= B_4^0 + B_4^1 x + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(4)} dx dx \end{aligned} \right\} (15)$$

ここに B_n^1 は (13) で表わされている。 B_n^0 は積分定数であって, 4 偶点での条件より求められる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} F(1) \Big|_{y=b} &= F(2) \Big|_{x=a} \\ \therefore B_1^0 + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \Big|_{y=b} \\ &= B_2^0 + a B_2^1 + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \Big|_{x=a} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 F^{(2)}|_{x=-a} &= F^{(3)}|_{y=b} \\
 \therefore B_2^0 - aB_2^1 + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \Big|_{x=-a} \\
 &= B_3^0 + bB_3^1 + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(3)} dy dy \Big|_{y=b} \\
 F^{(3)}|_{y=-b} &= F^{(4)}|_{x=-a} \\
 \therefore B_3^0 - bB_3^1 + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(3)} dy dy \Big|_{y=-b} \\
 &= B_4^0 - aB_4^1 + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(4)} dx dx \Big|_{x=-a} \\
 F^{(4)}|_{x=a} &= F^{(1)}|_{y=-b} \\
 \therefore B_4^0 + aB_4^1 + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(4)} dx dx \Big|_{x=a} \\
 &= B_1^0 + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \Big|_{y=-b}
 \end{aligned} \right\} (16)$$



図・3

ここでもう一つの任意定数として $B_1^0=0$ にとれば

$$\left. \begin{aligned}
 B_1^0 &= 0 \\
 B_2^0 &= \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \Big|_{y=b} \\
 &\quad - \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \Big|_{x=a} - aB_2^1 \\
 B_3^0 &= \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \Big|_{x=-a} \\
 &\quad - \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(3)} dy dy \Big|_{y=b} + B_2^0 - aB_2^1 - bB_3^1 \\
 B_4^0 &= \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \Big|_{y=-b} \\
 &\quad - \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(4)} dx dx \Big|_{x=a} - aB_4^1
 \end{aligned} \right\} (17)$$

を得る。また平衡方程式として

$$\begin{aligned}
 &b \left[\int_{-a}^a \tau_{xy(2)} dx + \int_{-a}^a \tau_{xy(4)} dx \right] \\
 &- a \left[\int_{-b}^b \tau_{xy(1)} dy + \int_{-b}^b \tau_{xy(3)} dy \right] \\
 &= \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \Big|_{y=b} - \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \Big|_{y=-b} \\
 &- \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \Big|_{x=a} + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \Big|_{x=-a} \\
 &- \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(3)} dy dy \Big|_{y=b} + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(3)} dy dy \Big|_{y=-b} \\
 &+ \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(4)} dx dx \Big|_{x=a} - \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(4)} dx dx \Big|_{x=-a}
 \end{aligned} \tag{18}$$

が求まる。周辺で与えられる作用力は3つの平衡方程式(14)および(18)を同時に満足していなければならない。

6. 差分形式

差分法を用いて近似解法を示す。図・3のように座標軸および格子点をとる。

(1) 適合条件式 重調和方程式(7)を点 m, n にお

いて差分表示すると次式のように表現される。

$$\begin{aligned}
 &\beta F_{m,n} + \gamma (F_{m-1,n} + F_{m+1,n}) + \delta (F_{m,n-1} + F_{m,n+1}) \\
 &\quad + 2(F_{m-1,n-1} + F_{m-1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m+1,n+1}) \\
 &\quad + \alpha^2 (F_{m-2,n} + F_{m+2,n}) + \alpha^{-2} (F_{m,n-2} + F_{m,n+2}) \\
 &= 0 \tag{19}
 \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha = \Delta y / \Delta x$, $\beta = 8 + 6(\alpha^2 + \alpha^{-2})$, $\gamma = -4(1 + \alpha^2)$, $\delta = -4(1 + \alpha^{-2})$ である。

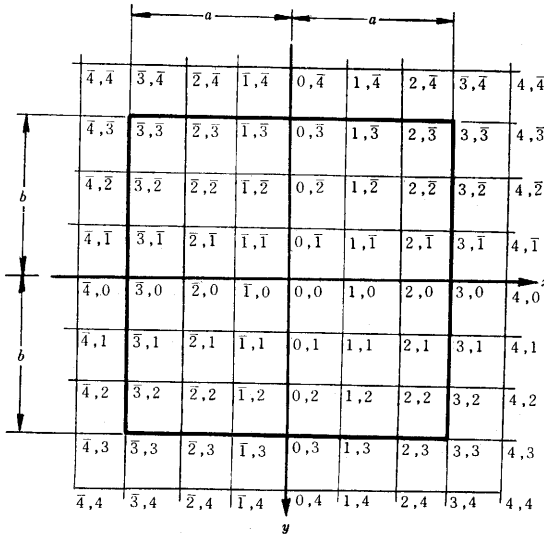
(2) 境界条件式 (11), (15) を差分表示すると

$$\left. \begin{aligned}
 \text{境界 (1):} & F_{m+1,n} - F_{m-1,n} = C_1(y), \quad F_{m,n} = D_1(y) \\
 \text{境界 (2):} & F_{m,n+1} - F_{m,n-1} = C_2(x), \quad F_{m,n} = D_2(x) \\
 \text{境界 (3):} & F_{m-1,n} - F_{m+1,n} = C_3(y), \quad F_{m,n} = D_3(y) \\
 \text{境界 (4):} & F_{m,n-1} - F_{m,n+1} = C_4(x), \quad F_{m,n} = D_4(x)
 \end{aligned} \right\} (20)$$

ただし、 $C_2(x)$, $C_4(x)$, $D_2(x)$, $D_4(x)$ は x の、また $C_1(y)$, $C_3(y)$, $D_1(y)$, $D_3(y)$ は y の関数であって、(21)により、それぞれの境界上の点に対して求める。

$$\left. \begin{aligned}
 C_1(y) &= 2 \Delta x \left[A_1^1 - \int_0^y \tau_{xy(1)} dy \right] \\
 C_2(x) &= 2 \Delta y \left[A_2^1 - \int_0^x \tau_{xy(2)} dx \right] \\
 C_3(y) &= 2 \Delta x \left[A_3^1 - \int_0^y \tau_{xy(3)} dy \right] \\
 C_4(x) &= 2 \Delta y \left[A_4^1 - \int_0^x \tau_{xy(4)} dx \right] \\
 D_1(y) &= \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(1)} dy dy \\
 D_2(x) &= B_2^0 + B_2^1 x + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(2)} dx dx \\
 D_3(y) &= B_3^0 + B_3^1 y + \int_0^y \int_0^y \sigma_{x(3)} dy dy \\
 D_4(x) &= B_4^0 + B_4^1 x + \int_0^x \int_0^x \sigma_{y(4)} dx dx
 \end{aligned} \right\} (21)$$

(3) 連立一次方程式とその解 図・4 のように $\Delta x = a/3, \Delta y = b/3$ とした場合を考える. 内点 (m, n) ($m, n = \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2$) について適合条件式 (19) をたてると (22) の形で表現できる.



図・4

$$[A]\{F\} = \{P\} \tag{22}$$

ここで $[A]$ を性状行列と名づけ, (23) で表わされる.

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdot & \cdot \\ A_{12} & A_{22} & A_{12} & A_{13} & \cdot \\ A_{13} & A_{12} & A_{22} & A_{12} & A_{13} \\ \cdot & A_{13} & A_{12} & A_{22} & A_{12} \\ \cdot & \cdot & A_{13} & A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} \tag{23}$$

ただし \cdot は 0 行列, $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{22}$ は次のような小行列である.

$$\left. \begin{aligned} [A_{11}] &= \begin{pmatrix} \beta + \alpha^2 + \alpha^{-2} & \delta & \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ \delta & \beta + \alpha^2 & \delta & \alpha^{-2} & 0 \\ \alpha^{-2} & \delta & \beta + \alpha^2 & \delta & \alpha^{-2} \\ 0 & \alpha^{-2} & \delta & \beta + \alpha^2 & \delta \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} & \delta & \beta + \alpha^2 + \alpha^{-2} \end{pmatrix} \\ [A_{22}] &= \begin{pmatrix} \beta + \alpha^{-2} & \delta & \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ \delta & \beta & \delta & \alpha^{-2} & 0 \\ \alpha^{-2} & \delta & \beta & \delta & \alpha^{-2} \\ 0 & \alpha^{-2} & \delta & \beta & \delta \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} & \delta & \beta + \alpha^{-2} \end{pmatrix} \\ [A_{12}] &= \begin{pmatrix} \gamma & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \gamma & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \gamma & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \gamma & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \gamma \end{pmatrix} \\ [A_{13}] &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

また $\{F\}$ は内点の未知応力関数ベクトル, $\{P\}$ は境界条件を満足する荷重ベクトルで (25) のように表わされる.

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_{2\bar{2}} \\ F_{2\bar{1}} \\ F_{20} \\ F_{21} \\ F_{2\bar{2}} \\ F_{1\bar{2}} \\ F_{1\bar{1}} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{1\bar{2}} \\ F_{1\bar{1}} \\ F_{10} \\ F_{0\bar{2}} \\ F_{01} \\ F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \\ F_{1\bar{2}} \\ F_{1\bar{1}} \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{2\bar{2}} \\ F_{2\bar{1}} \\ F_{20} \\ F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix}, \{P\} = \begin{pmatrix} -\gamma D_3(-2) - 2D_3(-3) - 2D_3(-1) - \alpha^2 C_3(-2) - \alpha^{-2} C_4(-2) - 2D_4(-1) - \delta D_4(-2) \\ -\gamma D_3(-1) - 2D_3(-2) - 2D_3(0) - \alpha^2 C_3(-1) - \alpha^{-2} D_4(-2) \\ -\gamma D_3(0) - 2D_3(-1) - 2D_3(1) - \alpha^2 C_3(0) \\ -\gamma D_3(1) - 2D_3(0) - 2D_3(2) - \alpha^2 C_3(1) - \alpha^{-2} D_2(-2) \\ -\gamma D_3(2) - 2D_3(1) - 2D_3(3) - \alpha^2 C_3(2) - \alpha^{-2} C_2(-2) - 2D_2(-1) - \delta D_2(-2) \\ -\alpha^2 D_3(-2) - \alpha^{-2} C_4(-1) - 2D_4(-2) - 2D_4(0) - \delta D_4(-1) \\ -\alpha^2 D_3(-1) - \alpha^{-2} D_4(-1) \\ -\alpha^2 D_3(0) \\ -\alpha^2 D_3(1) - \alpha^{-2} D_2(-1) \\ -\alpha^2 D_3(2) - \alpha^{-2} C_2(-1) - 2D_2(-2) - 2D_2(0) - \delta D_2(-1) \\ -\alpha^2 C_4(0) - 2D_4(-1) - 2D_4(1) - \delta D_4(0) \\ -\alpha^{-2} D_4(0) \\ 0 \\ -\alpha^{-2} D_2(0) \\ -\alpha^{-2} C_2(0) - 2D_2(-1) - 2D_2(1) - \delta D_2(0) \\ -\alpha^2 D_1(-2) - \alpha^{-2} C_4(1) - 2D_4(2) - 2D_4(0) - \delta D_4(1) \\ -\alpha^2 D_1(-1) - \alpha^{-2} D_4(1) \\ -\alpha^2 D_1(0) \\ -\alpha^2 D_1(1) - \alpha^{-2} D_2(1) \\ -\alpha^2 D_1(2) - \alpha^{-2} C_2(1) - 2D_2(2) - 2D_2(0) - \delta D_2(1) \\ -\gamma D_1(-2) - 2D_1(-3) - 2D_1(-1) - \alpha^2 C_1(-2) - \alpha^{-2} C_4(2) - 2D_4(1) - \delta D_4(2) \\ -\gamma D_1(-1) - 2D_1(-2) - 2D_1(0) - \alpha^2 C_1(-1) - \alpha^{-2} D_4(2) \\ -\gamma D_1(0) - 2D_1(-1) - 2D_1(1) - \alpha^2 C_1(0) \\ -\gamma D_1(1) - 2D_1(0) - 2D_1(2) - \alpha^2 C_1(1) - \alpha^{-2} D_2(2) \\ -\gamma D_1(2) - 2D_1(1) - 2D_1(3) - \alpha^2 C_1(2) - \alpha^{-2} C_2(2) - 2D_2(1) - \delta D_2(2) \end{pmatrix} \tag{25}$$

(22) の解は

$$\{F\} = [A]^{-1}\{P\} \quad (26)$$

ここに $[A]^{-1}$ は作用力に関係なく求められる $[A]$ の逆行列である。

7. 応力式

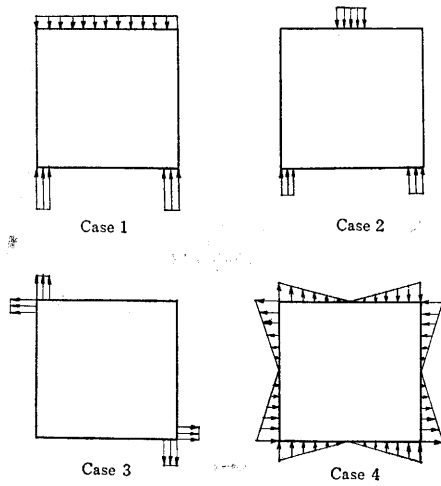
前節で求めた応力関数 $F_{m,n}$ を用いて応力式を表わすと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x(m,n)} &= (F_{m,n-1} - 2F_{m,n} + F_{m,n+1}) / (\Delta y)^2 \\ \sigma_{y(m,n)} &= (F_{m-1,n} - 2F_{m,n} + F_{m+1,n}) / (\Delta x)^2 \\ \tau_{xy(m,n)} &= (F_{m-1,n+1} + F_{m+1,n-1} - F_{m-1,n-1} \\ &\quad - F_{m+1,n+1}) / (4\Delta x \Delta y) \end{aligned} \right\} (27)$$

となる。

8. 数値解析例

数値解析例として図・5 のような作用力が境界で与えられた場合の応力計算結果を図・6 に示す。ただし $\alpha = 1$ とした。

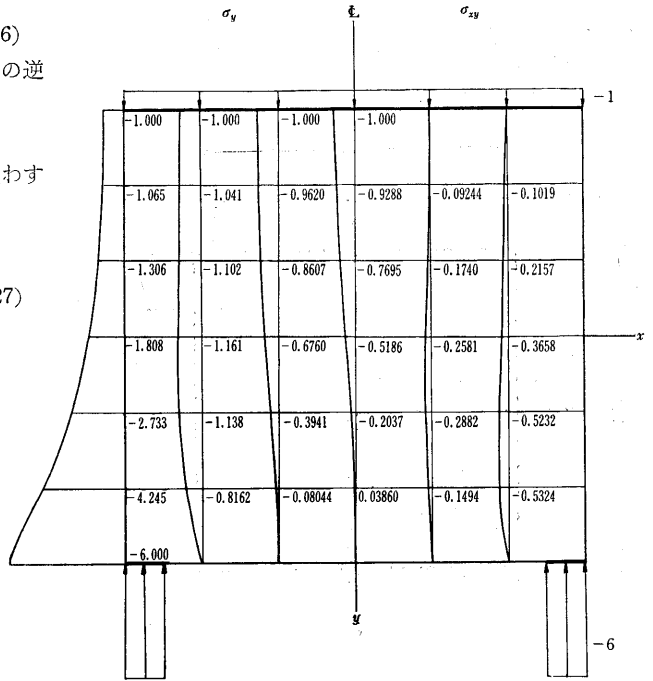


図・5

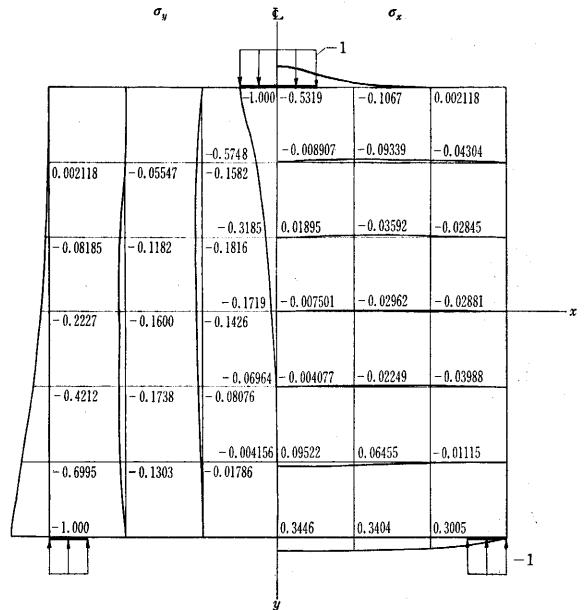
以上板の自重を無視した場合について記したが、自重 p を考慮した場合には、 τ_{xy} を $\tau_{xy} + px$ として上述の解法が適用される。

差分法による応力結果の傾向を Case 3 について簡単に調べてみると、図(その1)に示すように応力集中部分に対しては、この程度の分割数では不十分ではあるが(フーリエ級数解によるとこの部分の τ_{xy} が大きくでている)。その他の部分では他の解法(フーリエ級数解など)と非常によく一致している。中央点について、矩形板の差分法とそのフーリエ級数解(別報1)および円板に部分荷重が作用した場合のフーリエ級数解(別報2)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p}{\pi} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho^{2n-2} - \frac{n-1}{n} \rho^{2n} \right) \sin n\epsilon \cos 2n\theta + \epsilon \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{p}{\pi} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\rho^{2n-2} + \frac{n-1}{n} \rho^{2n} \right) \sin n\epsilon \cos 2n\theta + \epsilon \right] \end{aligned} \right\} (28)$$



図・6 Case 1



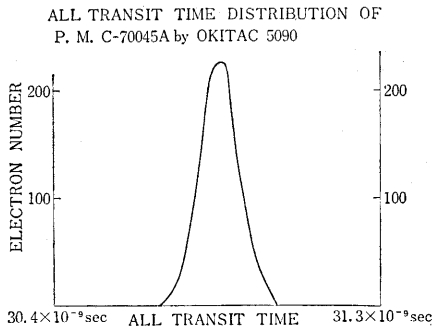
図・6 Case 2

から求めたものを比較してみると

解法	差分法	フーリエ級数(20項)	円板としたときのフーリエ級数解(3項)
σ_x' または σ_r	-0.04535	-0.05580	-0.05777
σ_y' または ρ_θ	0.1758	0.1892	0.1726

となつて差分法でも十分であると思われる。(p.28 へつづく)

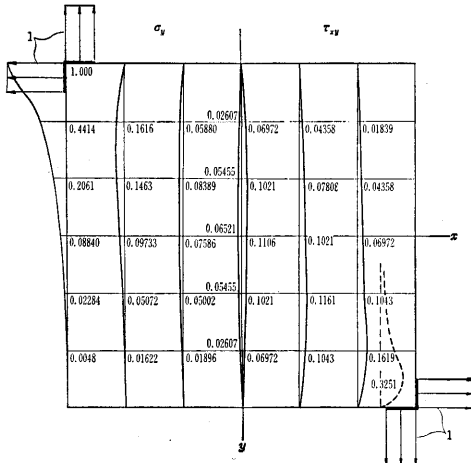
研 究 速 報



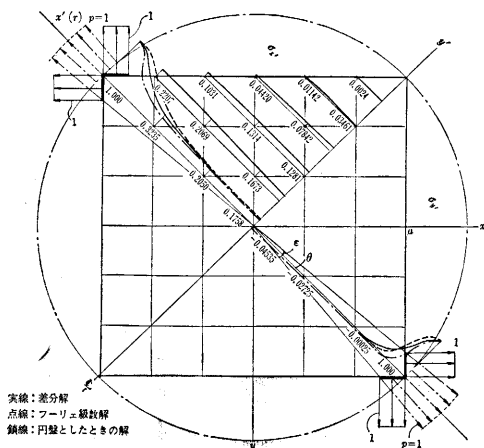
図・4 光電子増倍管 C-70045 A のインパルス応答

ルトとし、OKITA C-5090, HITA C-5020 を使用した。計算機によるインパルス応答は図・4 に示す。実験との不一致は、主に出力端によるストレージ容量のためと思われる。

(p.26 よりつづく)



図・6 Case 3 (その1)



実線：差分解
点線：フーリエ級数解
鎖線：円盤としたときの解

図・6 Case 3 (その2)

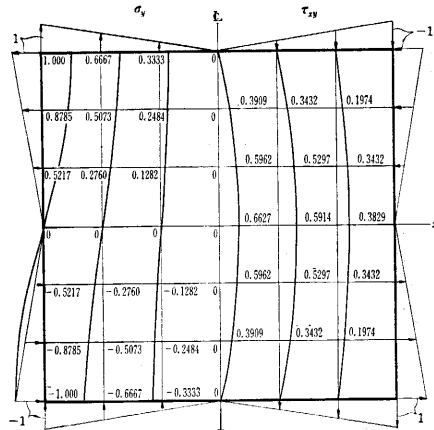
結 論

この光電子増倍管は図・3のように1GHzまで平坦な特性を示しており、パルスによる立上り時間測定値 0.5 ns とよく一致している。レーザ通信用としては、微弱な受信光においても、受信機雑音よりも光電流による雑音がおおきくなる感度の最良状態に容易にすることができる。したがって、この光電子増倍管は、広帯域のレーザ通信用の検波器として有用であり、その第一段階としてその報告をさせていただきます。終始ご指導を賜わる斎藤教授、浜崎助教授に感謝する。この研究は昭和40年度選定研究費によるものである。

(1966年3月25日受理)

文 献

- 1) R. C. Miller, N. C. Wittwer, "High Speed Photomultipliers" IEEE Int. Conv. Rec, vol. 13, Pt. 5, pp. 7~16; March 1965.



図・6 Case 4

参 考 文 献

- 1) Timoshenko and Goodier, "Theory of Elasticity" McGraw-Hill, 1934.
- 2) C. W. McCormik, "Plane Stress Analysis", Jour. of the S. D. Proc. of the ASCE, Aug. 1963.
- 3) R. N. White, "Optimum Solution Techniques for Finite-difference Equations", Jour. of the S. D. Proc. of the ASCE, Aug. 1963
- 4) S. Rosenhaupt, "Stresses in Point Supported Composite Walls", Jour. of the ACI, July 1964
- 5) Zienkiewicz and Holister, "Stress Analysis," John Wiley & Sons LTD, 1965.
- 6) (別報1)坪井・中田, "平面応力問題", 未発表
- 7) (別報2)坪井・磯貝, "部分荷重を受ける円板の問題," 未発表

(1966年3月31日受理)

正 誤 表 (5月号)

頁	段	行	種 別	正	誤
127	左		図・1	時間波形	時間波型
"	左	19	本 文	$\frac{a_n}{2}$	$\frac{a_n}{2}$