

# うなりをともなう減衰波形の解析法

Graphical Methods for Analysing the Damped Oscillations with Beats

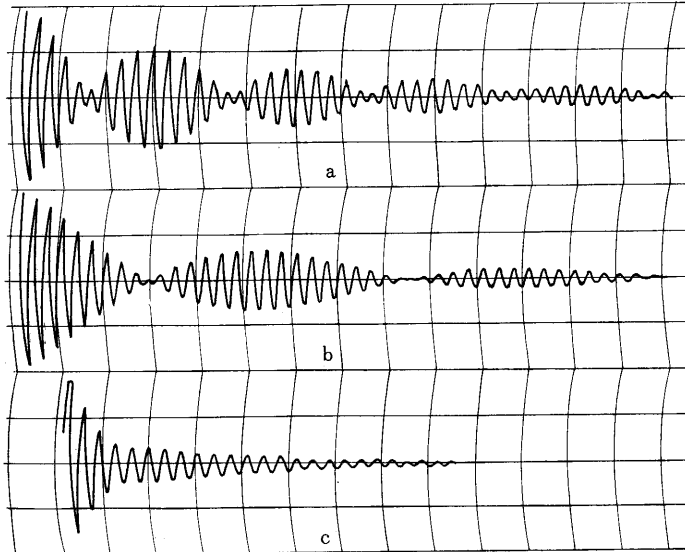
柴 田 碧・原 亮 一

## 1. ま え が き

うなりの現象は、一般に振動数がわずかに異なる二つの振動波が重ね合わされたときに生ずることはよく知られている。この二つの振動波がそれぞれ減衰波である場合の合成波形は第1図のようにうなりを生じながら波高、うなりの振幅ともども減衰してゆく。単純な減衰波の記録処理法でこれを扱おうとするとうまくつかめない。その1例をあげると第2図のようになる。

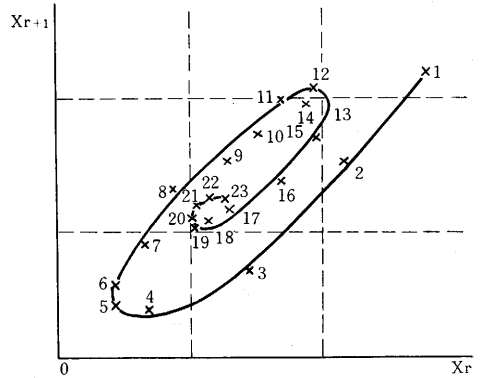
第2図にあげた例はある火力発電所の蒸気管の過渡振動の応答の整理例であるが、このようなプラントの配管の振動特性をえようとして加振実験を行なうと、しばしばつき当たる問題であった。

ここでは第1図のような記録が二つの減衰をともなった1自由度ばね質量系の自由減衰振動波の合成されたものであると仮定し、以下に図式を併用してそれぞれの系の固有振動数と減衰比係数を求める方法について述べる。ただし減衰比はかなり小さいときに限定する。



- a :  $\omega_1=1.0$  rad/sec,  $\omega_2=0.9$  rad/sec,  $\zeta_1=\zeta_2=0.01$
- b :  $\omega_1=1.0$  rad/sec,  $\omega_2=0.95$  rad/sec,  $\zeta_1=\zeta_2=0.01$
- c :  $\omega_1=1.0$  rad/sec,  $\omega_2=0.90$  rad/sec,  $\zeta_1=0.1, \zeta_2=0.02$

第1図 うなりをともなう減衰波形の例



第2図 うなりを生じた配管減衰波の1例  
〔原子炉配管系の耐震安全設計に関する研究(東京電力)より〕

## 2. 図式解析

うなりを構成する二つの振動波を一般的に

$$x_1(t) = C_1(t) \cos \omega_1 t \quad (1 \cdot a)$$

$$x_2(t) = C_2(t) \cos \omega_2 t \quad (1 \cdot b)$$

で表わす(以下添字1, および2はこの二つの振動波を示す)。また  $\omega, C(t)$  はそれぞれ固有振動数, 振幅を表わす。ただし  $\omega_1 - \omega_2 > 0$  でかつかなり小さいものとする。

したがってうなりを表わす式を

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = C(t) \cos \theta(t) \quad (2)$$

なる形に変形すれば

$$C(t) = \{C_1^2(t) + C_2^2(t) + 2C_1(t)C_2(t) \cos(\omega_1 - \omega_2)t\}^{1/2} \quad (3)$$

$$\theta(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

$$+ \tan^{-1} \left( \frac{C_1(t) - C_2(t)}{C_1(t) + C_2(t)} \tan \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad (4)$$

となる。実際には減衰をともなう二つの振動波は減衰比を  $\zeta$  とすれば

$$x_1(t) = A_1 \exp(-\zeta_1 \omega_1 t) \cos(\sqrt{1 - \zeta_1^2} \omega_1 t) \quad (5 \cdot a)$$

$$x_2(t) = A_2 \exp(-\zeta_2 \omega_2 t) \cos(\sqrt{1 - \zeta_2^2} \omega_2 t) \quad (5 \cdot b)$$

なるように書きなおせるから

$$C(t) = \{A_1^2 \exp(-2\zeta_1 \omega_1 t) + A_2^2 \exp(-2\zeta_2 \omega_2 t)$$

$$+2A_1A_2\exp(-(\zeta_1\omega_1+\zeta_2\omega_2)t) \cos(\sqrt{1-\zeta_1^2}\omega_1-\sqrt{1-\zeta_2^2}\omega_2)t)^{1/2} \quad (6)$$

ここでは  $A_1, A_2$  二つの振動波の初期振幅である。さらに  $\zeta_1$  および  $\zeta_2$  が 1 にくらべ十分小さいものとするれば

$$C(t) \doteq \{A_1^2\exp(-2\zeta_1\omega_1t) + A_2^2\exp(-2\zeta_2\omega_2t) + 2A_1A_2\exp(-(\zeta_1\omega_1+\zeta_2\omega_2)t)\cos(\omega_1-\omega_2)t\}^{1/2} \quad (7)$$

上式の  $C(t)$  が  $\dot{\quad}$ の振幅を表わすものであるから、 $C(t)$  が極大、極小となる時間が  $\cos(\omega_1-\omega_2)t$  のそれとほぼ一致するとすれば、その極大値および極小値をそれぞれ  $C_{max}$  および  $C_{min}$  と書くと

$$C_{max \cdot n}(t_n) = A_1\exp(-\zeta_1\omega_1t_n) + A_2\exp(-\zeta_2\omega_2t_n) \quad (8 \cdot a)$$

$$C_{min \cdot n}(t_n') = A_1\exp(-\zeta_1\omega_1t_n') + A_2\exp(-\zeta_2\omega_2t_n') \quad (8 \cdot b)$$

ここで

$$t_n = \frac{2n\pi}{\omega_1-\omega_2} \quad (9 \cdot a)$$

$$t_n' = \frac{(2n+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (9 \cdot b)$$

したがって (8・a) および (8・b) から減衰比  $\zeta_1, \zeta_2$  を算出するには  $C_{max \cdot n}(t_n)$  および  $C_{min \cdot n}(t_n)$  の値が既知であり、 $\omega_1$  および  $\omega_2$  も後述の方法で求められるので、(8・a)、(8・b) を  $\dot{\quad}$ の極大値、極小値を表わす包絡線とみなして両式のおよび差を計算すると

$$X = C_{max}(t) + C_{min}(t) = 2A_1\exp(-\zeta_1\omega_1t) \quad (10 \cdot a)$$

$$Y = C_{max}(t) - C_{min}(t) = 2A_2\exp(-\zeta_2\omega_2t) \quad (10 \cdot b)$$

となる。実際にこの演算を行なうには図式的な方法を用いる。すなわち (2) を片対数方眼紙に時間を横軸に、振幅を対数軸にとって図示し、図上で  $X$  および  $Y$  に相当する値を求めて図示すればよい。また (10・a)、(10・b) から明らかのように  $X$  および  $Y$  は片対数方眼紙の上では直線となるのがわかる。次にこの直線  $X$  上の 2 点  $a$  および  $b$  の座標 ( $t_a, X_a$ ) および ( $t_b, X_b$ ) を読みとれば、この直線の勾配を表わす式から減衰比  $\zeta_1$  を算出することができる。すなわち

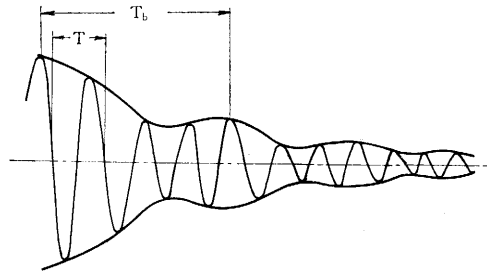
$$\zeta_1 = \frac{\ln X_a/X_b}{\omega_1(t_b-t_a)} \quad (11 \cdot a)$$

また  $Y$  についても同様のことを行なえば減衰比  $\zeta_2$  を求めることができる。すなわち

$$\zeta_2 = \frac{\ln Y_a/Y_b}{\omega_2(t_b-t_a)} \quad (11 \cdot b)$$

なお (11・a)、(11・b) 中の  $\omega_1, \omega_2$  は (4)、(9・a) より時間  $t$  があまり経過しない範囲では、合成波の周期および  $\dot{\quad}$ の周期をそれぞれ  $T, T_b$  とすれば

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2} \quad (12 \cdot a)$$



第 3 図 読 取 法

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2} \quad (12 \cdot b)$$

となるから両式より

$$\omega_1 = \frac{\pi(2T_b+T)}{T_b \cdot T} \quad (13 \cdot a)$$

$$\omega_2 = \frac{\pi(2T_b-T)}{T_b \cdot T} \quad (13 \cdot b)$$

が求められる。

### 3. 計算例

次にある配管系に対して得られた  $\dot{\quad}$ をとともなう振動記録を上述の方法により解析した例を示す。

**A例** 実験記録を両振幅を縦軸にとって片対数線図に図示したのが第 4 図である。これより (10・a)、(10・b) に相当するものを求めたのが直線  $X$  および  $Y$  である。図より

$$T_b = 0.272 \text{ sec}, \quad T = 0.0545 \text{ sec}$$

となるから (13・a)、(13・b) より

$$\omega_1 = 63.5 \text{ rad/sec}, \quad \omega_2 = 51.8 \text{ rad/sec}$$

さらに直線  $X$  および  $Y$  について 2 点  $a$  および  $b$  における座標を読みとると

$$X_a = 70.0, \quad X_b = 35.0, \quad t_b - t_a = 1.65 \text{ sec}$$

$$Y_a = 10.0, \quad Y_b = 5.0, \quad t_b - t_a = 1.32 \text{ sec}$$

(11・a)、(11・b) より

$$\zeta_1 = 0.00330, \quad \zeta_2 = 0.00508$$

となる。

**B例** 減衰のやや大きい例である。A例とまったく同じようにして

$$T_b = 0.458 \text{ sec}, \quad T = 0.153 \text{ sec}$$

$$\omega_1 = 24.0 \text{ rad/sec}, \quad \omega_2 = 17.1 \text{ rad/sec}$$

$$X_a = 20.0, \quad X_b = 10.0, \quad t_b - t_a = 0.653 \text{ sec}$$

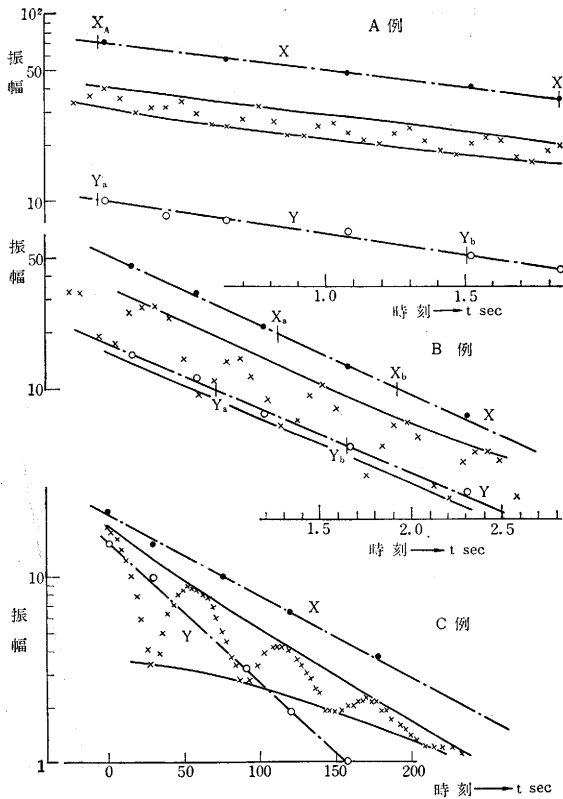
$$Y_a = 10.0, \quad Y_b = 5.0, \quad t_b - t_a = 0.713 \text{ sec}$$

$$\zeta_1 = 0.00221, \quad \zeta_2 = 0.0284$$

**C例** アナログ計算機により  $\omega_1 = 1.0, \zeta_1 = 0.01$  および  $\omega_2 = 0.90, \zeta_2 = 0.02$  なる二つの振動波を合成したものをから逆にそれぞれの定数をもとめてみると

$$\omega_1 = 0.96, \quad \zeta_1 = 0.0106$$

研究速報



第4図 計算例

$$\omega_2 = 0.84, \quad \zeta_2 = 0.0208$$

となる。また振動数が正確な値がえられたとして  $\omega_1 = 1.0, \omega_2 = 0.90$  を入れて減衰比を求めてみると

$$\zeta_1' = 0.0102, \quad \zeta_2' = 0.0194$$

以上のことからわかるように減衰比に生ずる誤差は、主として読取りおよび(4)の第2項の省略による誤差によっている。

むすび

この解析方法は、1964年末に日本原子力発電KKの東海発電所における蒸気管の振動特性測定試験のデータ整理に試用された。この試験では蒸気管の有する数多くの固有振動のおおのこの減衰比を見出すため、加振機で共振状態におき後加振を中断して減衰振動波の記録を得た。記録の大部分はうなりをともっていたが、本法でだいたい二つの振動に分離することができた。

なうなりのため振幅が零になった点を振動波のおわりと誤って、在来の方法で解析すると、減衰比がいちじるしく過大になったり、あるいはクーロン摩擦の値がかなり大きくあらわれたりする。

以上のことから連続体、分布定数系の減衰波形の解析にあたって、単純な系として扱うだけでなく二つ以上の波の合成されたものか否かに留意する必要があることを知った。そのために本解析法は有効であるが、なお精度の点では、もう一段改善する必要があると考える。

(1965年5月28日受理)

次号予告 (9月号)

研究解説

レーザー光の顕微鏡への応用.....永朝 井倉 昌利 平光

デジタル情報伝送における同期の一方式.....猪高 瀬木 幹 博雄

海外事情

グレノーブル大学の制御学科.....高橋 安人

研究速報

試験溶鋳炉第16次操作について(I).....館 研究室 充員  
——送風限界について——

試験溶鋳炉第16次操作について(II).....館 野 充  
——主として炉頂ガスの連続分析について——.....桑山 村 芳 一武