技術メモ

測定値を結んで曲線を描くときに便利な放物線の性質

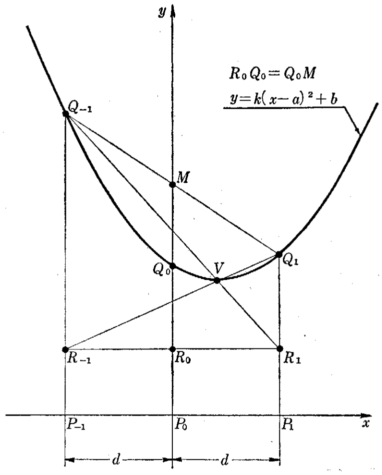
大井光四郎

1. まえがき

実験の結果をグラフに表わすときに，x 軸上に並んだ点 $P_n(x_n)$ に対する測定値 y_n をプロットして，それらの点を滑らかな曲線で結ぶことはしばしば行なわれることである．滑らかな曲線の一部は放物線と見なすことができるから，測定点が十分に密に取られているときにはこれらの並んだ数点ずつを放物線で結ぶと滑らかな曲線を描くことができる．このとき放物線のある種の性質を利用すると便利なことがある．ここで述べることは簡単なことがらであるので，すでに使っておられる向きもあるかも知れないが，必ずしも広く知られてはいないようなので，ここに紹介したい．ここで取り扱う放物線はすべて y 軸に平行な軸を持ち，したがって x の2次式で表わされるものばかりである．

2. 与えられた 3 点を通る放物線の頂点の位置を作図によって求めること

実験の目的によってはしばしば関数の極値およびその位置が重要な意味を持つ．いま極値を与える点の付近に等間隔に取られた3点 P_{-1}, P_0, P_1 における測定値 y_{-1}, y_0, y_1 が与えられているとする．第1図のように



第 1 図　放物線の頂点の作図法

これらをプロットした点 Q_{-1}, Q_0, Q_1 を通る放物線の頂点 V の位置を作図によって求めてみる．$P_{-1}P_0=P_0P_1=d$ とし，P_0 を座標の原点とする．放物線の方程式を

$$y=k(x-a)^2+b \tag{1}$$

とすれば，頂点 V の座標は (a, b) である．

作図：弦 $Q_{-1}Q_1$ の中点を M とする． MQ_0 を二倍に延長して $Q_0R_0=MQ_0$ とする．R_0 を通り x 軸に平行な直線を引き $P_{-1}Q_{-1}$, P_1Q_1 との交点を R_{-1}, R_1 とする．$R_{-1}Q_1$, R_1Q_{-1} の交点が頂点 V になる．

証明：(1)により

$$y_{-1}=k(-d-a)^2+b$$
$$y_0=ka^2+b$$
$$y_1=k(d-a)^2+b$$

よって M の y 座標は

$$(y_{-1}+y_1)/2=k(d^2+a^2)+b$$

となり，R_0 の y 座標は

$$2y_0-\{(y_{-1}+y_1)/2\}=k(a^2-d^2)+b$$

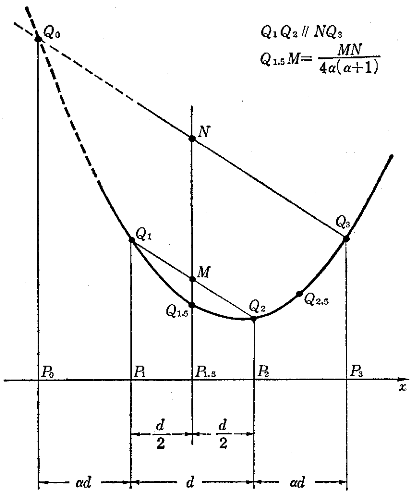
そこで3点 R_{-1}, V, Q_1 の座標は次のようになる．

$$R_{-1}(-d,\ k(a^2-d^2)+b)$$
$$V(a,\ b)$$
$$Q_1(d,\ k(d-a)^2+b)$$

この3点が同一直線上にあることは計算によって容易に確かめられる．同様にして R_1, V, Q_{-1} も同一直線上にある．すなわち V は $R_{-1}Q_1$, R_1Q_{-1} の交点になる．

3. 与えられた 3 点を通る放物線上の他の点の位置を作図によって求めること

たとえば第2図において Q_1, Q_2, Q_3 の位置が与えら



第 2 図　測定点の中間の点に対する放物線上の点を求める作図

れているとき，これだけでは放物線を描くのは少し困難であるが，もし P_1P_2 および P_2P_3 の中点に対応する放物線上の点の位置が知れれば，作図がかなり容易になる．このために放物線の次の性質を利用する．

同図において Q_1Q_2 および Q_0Q_3 は平行弦とし，M, N をそれらの中点とする．平行弦の中点の軌跡は放物線の軸に平行であるから MN の延長は P_1P_2 の中点 $P_{1.5}$ を通る．$P_{1.5}$ に対応する放物線上の点を $Q_{1.5}$ とすれば

$$\frac{Q_{1.5}M}{Q_{1.5}N}=\left(\frac{P_1P_2}{P_0P_3}\right)^2 \qquad (2)$$

となることは容易に証明できる．$P_0P_1=P_2P_3$ であるから

$$P_0P_1=P_2P_3=\alpha P_1P_2$$

とすれば（2）は

$$\frac{Q_{1.5}M}{Q_{1.5}N}=\frac{1}{(2\alpha+1)^2}$$

となる．ここで両辺の分母から分子を引き

$$\frac{Q_{1.5}M}{MN}=\frac{1}{(2\alpha+1)^2-1}$$

すなわち

$$Q_{1.5}M=\frac{MN}{(2\alpha+1)^2-1}=\frac{MN}{4\alpha(\alpha+1)} \qquad (3)$$

そこで $Q_1Q_2Q_3$ が与えられているときに次の作図法を得る．

作図: Q_1Q_2 の中点 M を通り y 軸に平行な直線と，Q_3 を通り Q_1Q_2 に平行な直線の交点を N とする．NM を延長してその上に $Q_{1.5}$ を $Q_{1.5}M=MN/4\alpha(\alpha+1)$ に等しくとれば $Q_{1.5}$ は放物線上の点になる．$Q_{2.5}$ についても $P_1P_2=\beta P_2P_3(\beta=1/\alpha)$ とし（3）の α の代わりに β を用いれば同様に作図することができる．

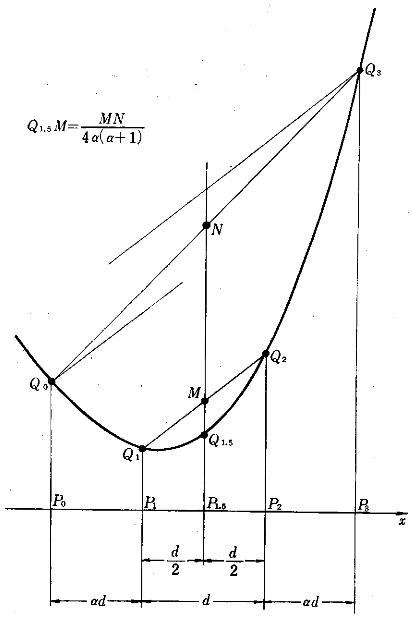
とくに P_1, P_2, P_3 が等間隔であれば $\alpha=1$ であるから

$$Q_{1.5}M=MN/8$$

となる．

またこの方法を繰り返せば放物線上の点をいくらでも密に取ることができる．

つぎに第3図のように4点 P_0, P_1, P_2, P_3 が左右対称に並んでいるとき，すなわち $P_0P_1=P_2P_3=\alpha P_1P_2$ で



第3図　曲線が3次式で表わされる場合の作図法

あるときに，それに対応する点 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 が与えられているとする．これらの点を通る3次式の P_1P_2 の中点 $P_{1.5}$ に対応する点 $Q_{1.5}$ は第3図のようにして作図されることは容易に証明できる．とくに測定点が等間隔に取られているときには

$$Q_{1.5}M=MN/8$$

となる．

4. 補　　足

実際の実験結果に上の方法を適用すると，かえって変な図形が得られることがある．これはランダムな実験誤差が影響しているためか，または測定値の密度が粗くて2次式（または3次式）では近似できない範囲の値を無理に2次式（または3次式）に当てはめようとしているためであろう．いずれにしても，そのような場合にはそれだけのデータでは滑らかな曲線で結ぶことが無理であることを示していると考えられる．

(1965 年2月 13 日受理)