

## 棒の縦衝撃と塑性波の伝ば(2)

山田 嘉昭

前回では、棒の縦衝撃における塑性波について、基礎となる理論、および一端に定速度の衝撃を受ける棒を取り扱った。棒が引張りを受ける場合には、棒内における応力とひずみの直接の測定は困難であったが、圧縮試験では、適当な方法で、高速下における応力-ひずみ図の決定が可能になる。今回は、圧縮試験の問題と、剛塑性体近似による解を詳細に取り扱い、高速試験におけるいろいろな問題点にも言及することにした。

### 5. 高速圧縮試験と応力-ひずみ図

圧縮試験では、適当な方法を用いることによって、前回の終わりで述べた困難を取り除くことができ、高速下における加工硬化特性(応力-ひずみ図)を求めることが可能である。以下に述べる二つの方法が考えられている。

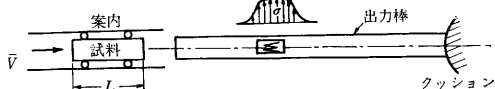
第1の方法では、第15図のように、試料を適当な方法で飛ばし、出力棒に衝突させる<sup>9)</sup>。試料の飛しょう速度を $\bar{V}$ 、衝突時の試料と出力棒の接触部における速度を $V'$ 、出力棒で計測された応力を $\sigma$ (平端部の値をとる)とする。ウゴニオの式により

$$V' = -\frac{\sigma}{\rho c}, \quad (37)$$

したがって第15図の試験は、試料端に、右の側から絶対値であらわして

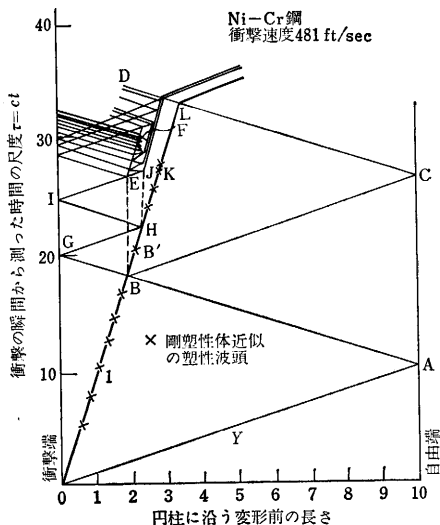
$$V = \bar{V} + \sigma/\rho c, \quad \sigma \text{は負値} \quad (38)$$

の速度 $V$ を与える圧縮試験と同等である。ただし、 $\rho$ と $c$ は出力棒における密度と弾性波の伝ば速度をあらわす。第15図の試験では、試料の一端が自由端に相当し、自由端に達した波は除荷(unloading)の波として反射される。それ以後の波の干渉と反射は複雑で、特性曲線論による取扱いが必要であるが、第16図と第17図に直線硬化の材料について得られている解の例<sup>10)</sup>を示す。

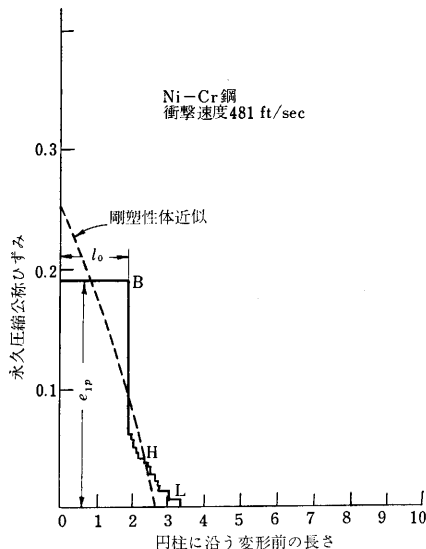


第15図 高速圧縮試験法の1

弾性波頭はA点で自由端に達し、応力0、速度 $20v$ の除荷の波として反射される。この反射波は、左から右へ進んできた塑性波頭とB点で出会い、波の干渉によって、Bの自由端側に、新たな弾性波BCと塑性波BHを生ずる。Bの衝撃端の側のBGは弾性除荷の波である。BGはG点で反射され、反射波GHは除荷の波である。さらにGHはH点とI点で弾性負荷の波HIおよびIEとして反射される。こうしてE点(B点と同じx座標



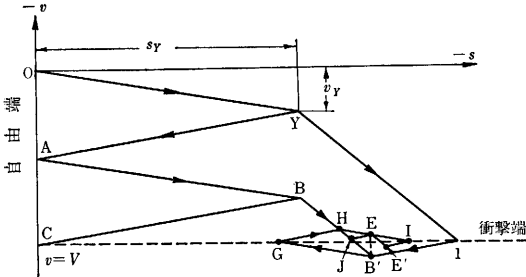
第16図 一端が自由な試料における波の反射と干渉(特性曲線)



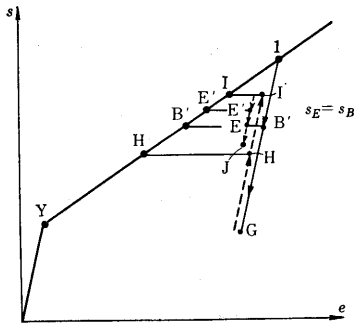
第17図 衝突ののちに試料に残留する変形

の位置)およびその前方EJのところ、棒の要素が以前に受けた応力値を越える大きさの応力を生じ、新たな

塑性変形が起こる。上のような過程が繰り返され、何回かの反射と干渉ののちに塑性変形が終わる。塑性変形の結果棒に残留する永久ひずみは第 17 図のようである。第 18 図と第 19 図は、以上の過程の J 点までの部分を  $s-v$  面および応力-ひずみ図上に示したものである。



第 18 図 一端が自由な試料における波の反射と干渉



第 19 図 波の反射と干渉による応力とひずみの変化

第 16 図および第 17 図にみられるように、試料の衝撃端にあらわれるひずみの一様な部分（永久ひずみ  $e_{1p}$ 、変形前の長さ  $l_0$ ）は、 $c_1$  の速度で進んだ塑性波と、 $c_0$  の速度で伝ばし、自由端で反射された弾性波とが、初めて出合った点と考えることができる。ゆえに、試料の最初の長さを  $L$  とすれば

$$\frac{l_0}{c_1} = \frac{2L - l_0}{c_0}, \quad l_0 = \frac{2Lc_1}{c_1 + c_0} \quad (39)$$

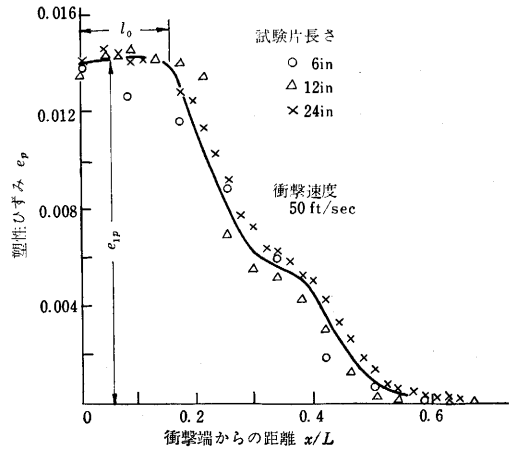
この式は、材料の硬化が、直線硬化であるかと否かを問わず成立する。

いま、第 15 図の飛しょう衝突の圧縮試験を行ない、試験後の試料の寸法を測定して第 20 図のようなデータを得たものとする。一方において、第 15 図の出力棒で計測した応力を  $\sigma$  とする。さらに衝撃端の近傍に、ひずみの一様な領域が存在し、そこでは、軸に沿う変形前の長さ  $l_0$  が、試験後に  $l'$  になったとする。弾性回復前の長さを  $l$  として

$$l' = l \left( 1 - \frac{\sigma}{E} \right), \quad l = \frac{l'}{1 - \sigma/E} \approx l' \left( 1 + \frac{\sigma}{E} \right), \quad (40)$$

衝撃時における公称ひずみ  $e_1$  は

$$e_1 = \frac{l}{l_0} - 1 = \frac{l'}{l_0(1 - \sigma/E)} - 1 \approx \frac{l'}{l_0} \left( 1 + \frac{\sigma}{E} \right) - 1. \quad (41)$$



第 20 図 試料に残留する変形の計測例

衝撃端の近傍における公称応力  $s_1$  は

$$s_1 = \sigma / (1 + e_1). \quad (42)$$

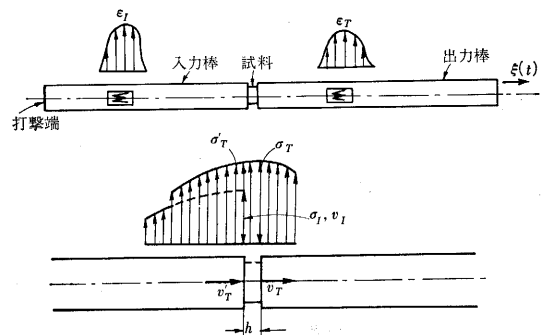
飛しょう速度  $\bar{V}$  を変え、上のようにして  $e_1$  と  $s_1$  を求めると、高速下における ( $\bar{V}$  を変えているので必ずしも単一の速度下にはないが) 公称応力-ひずみ図が得られる。応力-ひずみ図から、ひずみ  $e_1$  における塑性波の伝ば速度  $c_1$  を求め、(39) 式の右辺を計算する。こうして左辺の  $l_0$  の実測値と比較すれば、理論の適用性の検証を行なうことができる。

衝撃端における接触時の速度  $V$  と  $e_1$  の間には、前回の (29) 式により

$$V = - \int_0^{e_1} \sqrt{\frac{\partial s}{\partial e}} \rho_s de, \quad \rho_s \text{ は試料の密度} \quad (43)$$

が成立する。(43) 式から求められる  $V$  と、計測したデータから (38) 式によって計算される  $V$  を比較することも、一つの検証となる。

第 2 の方法<sup>11)</sup> では、第 21 図のように、二つの棒の間に試料をはさみ、入力棒の一端に打撃を与え (たとえば適当な飛しょう質量による)、試料に入射する波  $\epsilon_T(\sigma_T)$



第 21 図 高速圧縮試験法の 2

と透過する波  $\epsilon_T(\sigma_T)$  を時間の関数として計測する。ただし棒内の波は、弾性範囲内にあるものとし、棒内の真応力と公称応力などを区別しない。

時刻  $t$  に、 $\sigma_I$  の値で試料面に達した波は、それぞれ  $\sigma'_T$  と  $\sigma_T$  の値を持つ波として反射、透過されるが、ここでは試料は薄く、 $\sigma_T = \sigma'_T$  が成立するものとする。ただし試料の変形により、試料両端面の速度、それぞれ  $v'_T$  と  $v_T$  とは等しくない。ウゴニオの式を適用して

$$\left. \begin{aligned} \rho c v_T + \sigma_T &= 0, & v_T + c \varepsilon_T &= 0, \\ \rho c v_I - \sigma_I &= \rho c v'_T - \sigma_T, & v_I - c \varepsilon_I &= v'_T - c \varepsilon'_T. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

さらに入射した波については

$$\rho c v_I + \sigma_I = 0, \quad v_I + c \varepsilon_I = 0. \quad (45)$$

試料の最初の高さを  $h_0$  とすれば、時刻  $t$  における公称ひずみ  $e$  は

$$e = \frac{1}{h_0} \int_0^t (v_T - v'_T) dt. \quad (46)$$

この式に、(44) 式と (45) 式から得られる関係

$$v_T = -\frac{\sigma_T}{\rho c}, \quad v'_T = v_I - \frac{\sigma_I - \sigma_T}{\rho c} = \frac{\sigma_T - 2\sigma_I}{\rho c} \quad (47)$$

を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{2}{h_0 \rho c} \int_0^t (\sigma_I - \sigma_T) dt, \\ \text{または} \quad e &= \frac{2c}{h_0} \int_0^t (\varepsilon_I - \varepsilon_T) dt. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

計測した  $\varepsilon_I$  と  $\varepsilon_T$  を、波が試料に初めて達した時間を 0 として重ね合わせ、上の式を積分すれば、各時間における公称ひずみ  $e$  がわかる。試料の応力は、真応力を  $\sigma$ 、公称応力を  $s$  とし

$$\sigma = \sigma_T = \sigma'_T = E \varepsilon_T = \rho c^2 \varepsilon_T, \quad s = \frac{\sigma}{1+e}. \quad (49)$$

別法<sup>12)</sup>では、試料をはさまない場合と、試料をはさんだ場合について、出力棒の側だけから得られるデータを用いる。たとえば、おのおの場合について、出力棒の一端で、端面の変位  $\xi_I$  と  $\xi_T$  を計測したものとしよう。端面は自由端であるから、到達した波は、粒子速度が 2 倍になって反射される。したがって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T &= -\rho c v_T = -\frac{1}{2} \rho c \frac{d\xi_T}{dt}, \\ \rho_I &= -\rho c v_I = -\frac{1}{2} \rho c \frac{d\xi_I}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

(48) 式に代入すれば

$$e = \frac{2}{h_0} \frac{1}{\rho c} \int_0^t (\sigma_I - \sigma_T) dt = \frac{1}{h_0} (\xi_T - \xi_I). \quad (51)$$

$\xi_T$  と  $\xi_I$  の差をとる場合、 $\xi_T$  の記録について、正確には試料をはさんだための時間遅れを考えなければならない。

上で述べた方法では、試料の横方向変形の影響が考慮されていない。これを考えると、第 1 近似として

$$|\bar{\sigma}| = |\sigma| + \frac{1}{2} \rho_s a^2 \nu^2 \varepsilon. \quad (52)$$

$\sigma$  は横方向変形を考えないときの応力、 $a$  は円形試料の半径、 $\rho_s$  は試料の密度、 $\varepsilon$  は試料の厚さ方向の縦ひずみ加速度、 $\nu$  は横ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_r$  と縦ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}$  の比で、

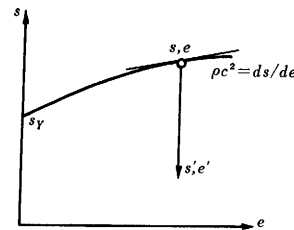
広義のポアソン比にあたる。以上の諸量は、いずれも変形後の状態について定義する。近似の精度を高めると、補正項は

$$\rho_s \left( \frac{1}{2} a^2 \nu^2 - \frac{1}{6} h^2 \right) \varepsilon, \quad (53)$$

ゆえに試料の寸法を  $3a^2 \nu^2 = h^2$ 、すなわち最初の寸法を  $h_0/a_0 \approx \sqrt{3} \nu$  に選べば、横方向変形の影響を小さくすることができる。

### 6. 剛塑性体近似の解

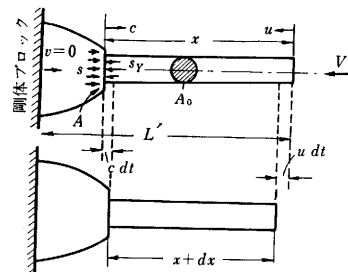
剛塑性体とは  $E$  (または  $G$ ) を無限大とした極限において得られる理想材料で、第 22 図のような応力-ひずみ図を持つ。この理想材料によって、塑性波の伝ば、その反射と干渉の解析は簡単になり、すでに示した第 9 図



第 22 図 剛塑性体

にもみられるように、変形の終わりまでの間に波の反復の多い問題では、弾性を考慮した解に対するよい近似ともなる。以下に二、三の例題を取り扱い、解を通じて、高速試験の特徴と、試験に関するいくつかの注意事項を述べることにしたい。剛塑性体では、弾性波の伝ば速度は無有限大である。

(a) 飛しょう質量の圧縮試験 これはすでに、前節において弾性を考慮して取り扱った問題である。 $V(>0)$  の速度で飛しょうしてきた試料が剛体ブロックに衝突すると、衝撃端から自由端に向かって、塑性波が  $c$  の速度で伝ばする (第 23 図)。伝ば速度  $c$  は、塑性波頭のひずみ  $e$  の関数である。塑性波頭前方の自由端側は、ちょうど弾性波が無有限大の速度で反射を繰り返す状態にあるので、剛体のように挙動する。波頭の後方、すなわち衝撃端の側は、波頭の通過後、応力が次第に減少し除荷の状態にあるので、静止の剛体のように挙動する。しかも最



第 23 図 飛しょう質量の圧縮 (剛塑性体)

み  $e$  の関数である。塑性波頭前方の自由端側は、ちょうど弾性波が無有限大の速度で反射を繰り返す状態にあるので、剛体のように挙動する。波頭の後方、すなわち衝撃端の側は、波頭の通過後、応力が次第に減少し除荷の状態にあるので、静止の剛体のように挙動する。しかも最

初の反射の波は無限大の速度で衝撃端にもどり、衝撃端に、弾塑性体におけるような、一樣な変形の領域は残らない。以上の結果、塑性波の伝ばの様子は、ちょうど平面波のようである。

いま時刻  $t$  における未変形部の長さ  $x$  および  $u(>0)$ 、塑性波の伝ば速度を  $c$ 、塑性波頭の塑性域側と剛性域側の断面積を  $A$  および  $A_0$  とする。  $A_0$  は、試料の原断面積でもある。塑性波頭に接する剛性域側は、塑性変形を始めようとする状態にあり、応力は  $sY$  である。以上を考慮して、次の諸式が成立する。

$$\frac{dx}{dt} = -(u+c), \tag{54}$$

$$\text{剛性域の運動方程式} \quad \rho x \frac{du}{dt} = -sY, \tag{55}$$

$$\text{質量保存の式} \quad A_0(u+c) = Ac. \tag{56}$$

以上の諸式において、 $x$  は変形前の座標、すなわちラグランジュの座標として取り扱うことができるが、 $c$  は絶対速度をあらわしている。ラグランジュ座標における速度を  $c_0$ 、波頭のひずみを  $e$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{c}{1+e}, & A(1+e) &= A_0, \\ u+c &= \frac{A}{A_0}c = c_0. \end{aligned} \right\} \tag{57}$$

この関係を用いると、(54) 式は

$$\frac{dx}{dt} = -c_0. \tag{58}$$

以下、簡単のため添字 0 を省略し、解析に必要な式を書く

$$\frac{dx}{dt} = -c, \quad \rho x \frac{du}{dt} = -sY. \tag{59}$$

塑性波頭にウゴニオの式を適用して (以下においては圧縮応力と圧縮ひずみを正值と約束)

$$\rho cv - s = -\rho cu - sY, \quad v - ce = -u - ceY,$$

$v=0, eY=0$  であるから

$$\rho cu = s - sY, \quad u = ce. \tag{60}$$

(59) 式と (60) 式を解けば、最初に (59) 式から

$$\rho x du = -sY dt = \frac{sY}{c} dx, \quad 2 \frac{dx}{x} = 2 \frac{\rho c}{sY} du, \tag{61}$$

次に (60) 式から

$$\rho c du = d(s - sY) - \rho u dc = d(s - sY) - \frac{s - sY}{c} dc. \tag{62}$$

一方において、剛塑性体の仮定により、(22) 式または (60) 式から次の関係が成立する。

$$\frac{s - sY}{e} = \rho c^2. \tag{63}$$

(63) 式の微分形は

$$\frac{d(s - sY)}{e} - \frac{s - sY}{e^2} de = 2 \rho c dc = \frac{2}{e} \frac{s - sY}{c} dc,$$

この関係を用いると (62) 式は

$$2 \rho c du = d(s - sY) + (s - sY) \frac{de}{e} = \frac{d[e(s - sY)]}{e},$$

(61) 式に代入すれば

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{d[e(s - sY)]}{e s Y}. \tag{64}$$

上の式を円柱の長さ、すなわち最初の未変形部の長さ  $L$  から、ある変形段階における長さ  $x$  まで積分して

$$\ln \left( \frac{x}{L} \right)^2 = \int_{s_1}^s \frac{d[e(s - sY)]}{e s Y} = -\ln \frac{e}{e_1} - \frac{1}{s Y} \int_{s_1}^s \ln e ds + \frac{1}{s Y} [s(1 + \ln e) - s_1(1 + \ln e_1)]. \tag{65}$$

ただし  $s_1$  および  $e_1$  は衝撃端において、衝撃の瞬間に発生した応力とひずみをあらわす。材料の公称応力 ( $s$ ) - ひずみ ( $e$ ) 図が既知であれば、上の式を用いて、 $x$  の関数として  $e$ 、したがって円柱の変形後の形状を求めることができる。前に説明した第 17 図の点線の曲線は、このようにして求められたものである。この例題では、塑性変形が終わるまでの波の反射と干渉の回数が少ないので、剛塑性体近似の精度はそれほどよくない。

さて (60) 式により、

$$\rho u^2 = e(s - sY), \quad u = ce. \tag{66}$$

したがって試料の飛しょう速度を  $V$  として、(65) 式の積分にあらわれる衝撃端の応力  $s_1$  とひずみ  $e_1$  は

$$\rho V^2 = e_1(s_1 - sY), \quad V = ce_1 \tag{67}$$

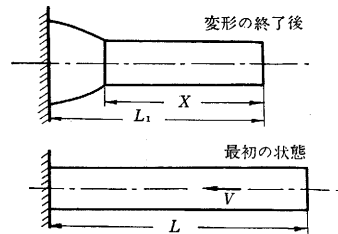
で与えられる。特別な場合として、直線硬化の材料では、 $c$  = 一定であるから、(65) 式は

$$\ln \left( \frac{x}{L} \right)^2 = \rho c^2 \int_{e_1}^e \frac{d(e^2)}{e s Y} = 2 \frac{\rho c^2}{s Y} (e - e_1), \tag{68}$$

あるいは (66) 式を用いて

$$\frac{s Y}{\rho} \ln \left( \frac{x}{L} \right) = c^2 (e - e_1) = c(u - V). \tag{69}$$

試験後の未変形部の長さを、第 24 図のように  $X$  とすれば、上の式に  $x = X, e = 0, u = 0$  とおき



第 24 図 剛塑性体

$$\frac{s Y}{\rho} \ln \left( \frac{X}{L} \right) = -cV = -\frac{V^2}{e_1} = -c^2 e_1, \quad c = \text{一定}. \tag{70}$$

本項の試験において、試料の最初の長さを  $L$ 、飛しょう速度を  $V$  とし、試験後において、未変形部の長さ  $X$  試料の変形後の全長  $L_1$  を測定したものとす。すると  $c$  が一定の直線硬化材料では、試験終了までの時間を  $T$  とし、さらに (69) 式を用いると

$$L-L_1 = \int_0^T u dt = \int_0^T \left[ \frac{s_Y}{\rho c} \ln \left( 1 - \frac{ct}{L} \right) + V \right] dt$$

$$= VT - \frac{s_Y}{\rho c^2} L \left\{ \left( 1 - \frac{cT}{L} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{cT}{L} \right) - 1 \right] + 1 \right\},$$

$$\left( 1 - \frac{L_1}{L} \right) c = V \frac{cT}{L}$$

$$- \frac{s_Y}{\rho c} \left\{ \left( 1 - \frac{cT}{L} \right) \left[ \ln \left( 1 - \frac{cT}{L} \right) - 1 \right] + 1 \right\}. \quad (71)$$

試験終了までの時間  $T$  は、

$$\frac{L-X}{c} = T, \quad \frac{cT}{L} = 1 - \frac{X}{L}. \quad (72)$$

さらに (70) 式により

$$\frac{s_Y}{\rho c} = -V \ln \left( \frac{X}{L} \right). \quad (73)$$

(72), (73) 式を (71) 式に代入すれば

$$\left( 1 - \frac{L_1}{L} \right) c = V \left( 1 - \frac{X}{L} \right)$$

$$+ \frac{V}{\ln(X/L)} \left\{ \frac{X}{L} \left[ \ln \left( \frac{X}{L} \right) - 1 \right] + 1 \right\}, \quad (74)$$

$cT/L = 1 - X/L$  が小さい場合、この式は

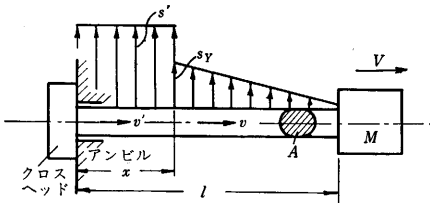
$$\left( 1 - \frac{L_1}{L} \right) c \approx \frac{1}{2} V \left( 1 - \frac{X}{L} \right),$$

または 
$$c \approx \frac{(L-X)V}{2(L-L_1)}. \quad (75)$$

$L, X, L_1$  および  $V$  を計測すれば、(74) 式または (75) 式から  $c$ 、(73) 式から降伏応力  $s_Y$  を求めることができる。

以上の計測値のほか、衝撃端の  $e_1$  を測定し、(70) 式から  $s_Y$  と  $c$  を求めることができるが、上の方法に比較して誤差が大きい。

(b) 落下引張り試験 これは長さ  $l$  の引張り試験片の一端に、第 25 図のように、質量  $M$  のおもりを付け、他端に取り付けたクロスヘッドをアンビルに衝突させて行なう引張り試験<sup>13)</sup>である。



第 25 図

材料を直線硬化の剛塑性体と仮定すると、塑性波頭は平面波のように試験片内を伝ばし、波頭の後方は静止して時間とともに応力が減少する状態にあり、前方は剛体のように運動する。運動の式は、波が  $x=ct$  まで進んだ状態において ( $c$  はラグランジュ座標の速度)

$$[M + \rho A(l-x)] \frac{dv}{dt} = [M + \rho A(l-ct)] \frac{dv}{dt} = -As_Y. \quad (76)$$

これを解けば、衝撃速度を  $V$  として

$$V-v = As_Y \int_0^t \frac{dt}{(M + \rho A l) - \rho A c t},$$

$$v = V - \frac{s_Y}{\rho c} \ln \frac{M + \rho A l}{(M + \rho A l) - \rho A c t}. \quad (77)$$

(77) 式により、おもりは、最初の衝撃速度  $V$  から  $v$  にしだいに減速されることがわかる。塑性波頭においては、運動量変化のウゴニオの式により

$$\rho c v' + s' = \rho c v + s_Y, \quad v' + c e' = v + c e_Y,$$

$v' = 0, e_Y = 0$  であるから、

$$s' = \rho c v + s_Y, \quad v = c e'. \quad (78)$$

$v$  は減少していくので、塑性波頭の応力  $s'$  とひずみ  $e'$  も、波の進行とともに値が小さくなる。

(77) 式と (78) 式から  $s'$  を求めると

$$s' = s_Y + \rho c V - s_Y \ln \frac{M + \rho A l}{(M + \rho A l) - \rho A c x}, \quad x = ct. \quad (79)$$

おもりに比較して棒の質量を無視できるときは

$$s' \approx s_Y + \rho c V - s_Y \frac{\rho A x}{M}, \quad x = ct. \quad (80)$$

衝撃の瞬間 ( $t=0$ )、すなわちクロスヘッド端に最初に生じた応力とひずみを  $s_1, e_1$  とすれば

$$s_1 = s_Y + \rho c V, \quad e_1 = V/c. \quad (81)$$

(77) 式の  $v$  が、 $ct \leq l$  において負値となるような場合、引張りの変形は、塑性波がおもりに到達する前に終わる。正值を続ける場合は、おもり端に達して、波の反射が起こる。おもりに到達したときの応力を  $s_l$ 、おもりの速度を  $v_l$  とすれば (第 26 図参照)、

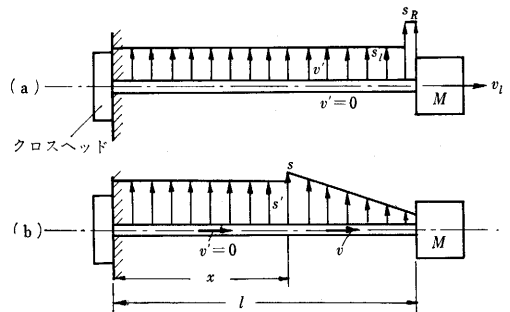
$$v_l = V - \frac{s_Y}{\rho c} \ln \left( 1 + \frac{\rho A l}{M} \right) > 0, \quad (82)$$

$$s_l = s_Y + \rho c v_l = s_Y + \rho c V - s_Y \ln \left( 1 + \frac{\rho A l}{M} \right) > s_Y.$$

おもりに到達して反射される応力を  $s_R$  とおけば、ウゴニオの式から

$$\rho c v' - s_l = \rho c v_l - s_R, \quad s_R = \rho c v_l + s_l. \quad (83)$$

$s_R$  は  $s_l$  よりも大きく、したがって反射波は塑性波である。第 26 図(b)のように、反射波の波頭値を  $s$  とおき、



第 26 図

時間とともに  $s$  は、最初の値  $s_R$  から値を減じつつ試験片内をクロスヘッド側に向かって伝ばするものとすれ

ば、波頭は平面波となり、波頭のおもり側は剛体のように挙動する。クロスヘッド側は静止の状態にあり、ウゴニオの式を用いると

$$\rho c v' - s' = \rho c v - s, \quad s = \rho c v + s'. \quad (84)$$

(84) 式における  $s'$  は、波頭のクロスヘッド側の応力をあらわし、第 1 回の伝ばにおいて、各要素に生じた最大の応力に等しく、(79) 式すなわち

$$s' = s_r + \rho c V - s_r \ln \frac{M + \rho A l}{(M + \rho A l) - \rho A x} \quad (85)$$

で与えられる。(84) 式で  $v=0$ 、すなわち反射波頭の応力  $s$  が  $s'$  に等しくなれば、第 1 回の反射波がクロスヘッド端にもどる前に変形が終る。

波頭のおもり側の運動の式は、時間  $t$  を衝撃の瞬間から測り、 $l/c \leq t \leq 2l/c$  において

$$[M + \rho A(ct - l)] \frac{dv}{dt} = -sA,$$

$$s = \rho c v + s' = \rho c v + s_r + \rho c V$$

$$-s_r \ln \frac{M + \rho A l}{(M + \rho A l) - \rho A x}, \quad (86)$$

$$x = 2l - ct.$$

上の式を、 $t=l/c$  における (82) 式の  $v_l$  を初期条件として解けば

$$v = \frac{M - \rho A(ct - l)}{M + \rho A(ct - l)} V - \frac{s_r}{\rho c} \left[ \ln \frac{M + \rho A(ct - l)}{M + \rho A l} + \frac{2M}{M + \rho A(ct - l)} \ln \left( 1 + \frac{\rho A l}{M} \right) \right]. \quad (87)$$

(86) 式に (87) 式を代入し、第 1 回の反射波における波頭の応力  $s$  を求めると

$$s = s_r + \frac{2M}{M + \rho A(ct - l)} \left[ \rho c V - s_r \ln \left( 1 + \frac{\rho A l}{M} \right) \right]. \quad (88)$$

(88) 式のカッコ内は (82) 式により正值であり、したがって波頭の応力は、時間  $t$  とともに減少する。こうして第 2 回の反射において、波頭のおもり側が剛体的に挙動するという最初の仮定に矛盾のないことが証明された。

次の式で定義される無次元量

$$\xi = \frac{\rho c V}{s_r}, \quad \eta = \frac{\rho l A}{M} \quad (89)$$

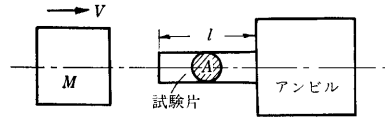
を用いると、波が第 1 回の伝ばで終わるための条件は、(82) 式の  $v_l$  が負値または 0、すなわち

$$\frac{v_l}{V} = 1 - \frac{1}{\xi} \ln(1 + \eta) \leq 0, \quad \xi \leq \ln(1 + \eta), \quad e^\xi - 1 \leq \eta. \quad (90)$$

同様に第 1 回の反射の過程で終わるための条件は、(87) 式に  $ct=2l$  とおき

$$\frac{v}{V} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} - \frac{2}{\xi} \frac{1}{1 + \eta} \ln(1 + \eta) \leq 0, \quad (1 - \eta) \ln(1 + \eta) \leq (1 - \eta) \xi \leq 2 \ln(1 + \eta). \quad (91)$$

(c) 落下ハンマによる圧縮試験<sup>14)</sup> これは、質量  $M$  のハンマを落下させ、アンビル上の試験片に衝撃を与えて行なう圧縮試験である (第 27 図参照)。試験片の密度



第 27 図

を  $\rho$ 、長さを  $l$ 、断面積を  $A$ 、降伏応力を  $s_r$ 、衝撃速度を  $V$ 、材料を直線硬化の剛塑性体とし、前の例題と同様に次のように定義される無次元量  $\xi$ 、 $\eta$  を用いる。

$$\xi = \frac{\rho c V}{s_r}, \quad \eta = \frac{\rho l A}{M}, \quad \text{ただし } c = \sqrt{\frac{\partial s}{\partial e}} / \rho. \quad (92)$$

さらにハンマの持つ運動エネルギーを  $E$  として、次のようなエネルギーの無次元表示  $\Phi$  を用いる。

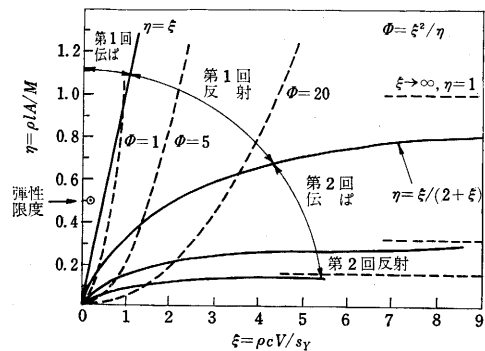
$$E = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} l A e r s_r \Phi, \quad (93)$$

$$\Phi = \xi^2 / \eta, \quad e r = s_r / \rho c^2. \quad (94)$$

本項の例題も、前項 (b) の衝撃引張りと同様に取り扱うことができ、波の第 1 回の伝ば、および第 1 回の反射の間に変形が終るための条件は、それぞれ

$$\xi \leq \eta, \quad \frac{\xi}{2 + \xi} \leq \eta \leq \xi \quad (95)$$

で与えられる。第 28 図の実線は、(95) 式その他、 $\xi$  と  $\eta$  の組合せによって、変形がどのような段階で終るか

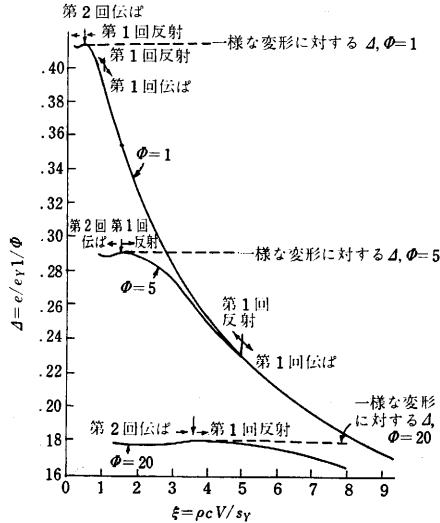


第 28 図

を示す。同じ図の点線は、(93) 式と (94) 式の無次元エネルギー  $\Phi$  が一定値の場合について、 $\eta$  と  $\xi$  の関係を示したものである。定エネルギーの負荷を与えるには、質量  $M$  と衝撃速度  $V$  のいろいろな組合せが可能であるが、図から  $V$  を大きく、 $M$  を小さくすると、試験終了までの波の反復回数が少なくなることがわかる。第 28 図において、第 1 回の反射と第 2 回の伝ばの限界曲線、およびそれ以後の同様の境界線は、いずれも水平線で示される漸近線を持つ。この性質のゆえに、ハンマの質量  $M$  が小さい場合 (すなわち  $\eta$  の大きい場合)、衝撃速度をどれほど大きくしても、ハンマが静止するまでの波の

反復は有限の回数に限られる。

反復する波がちょうどハンマ側の端面にもどったところで変形が終わる場合、試験片の変形は一樣である。第29図は、この条件から外れる場合の誤差を評価した結果で、波が一往復以上をするような条件にあれば、一樣な



第29図

変形からの外れはわずかである。ハンマのエネルギーを  $E$  とすれば、試験片が一樣に変形する場合のひずみ  $e$  は次のように求められる。材料を直線硬化の剛塑性体と仮定しているから、硬化率を  $H$  として

$$s = s_r + He, \quad H = \rho c^2, \quad (96)$$

$$E = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}lA(s_r + s)e = \frac{1}{2}lA(2s_r + \rho c^2e). \quad (97)$$

この式を  $e$  について解けば

$$\frac{e}{\epsilon r} = -1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{lA \epsilon r s_r}}, \quad \epsilon r = \frac{s_r}{\rho c^2}. \quad (98)$$

(93) 式のエネルギーの無次元表示  $\Phi$  を用いると

$$\frac{e}{\epsilon r \Phi} = -\frac{1}{\Phi} + \sqrt{\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2}} = \Delta \quad (\text{とおく}). \quad (99)$$

第29図の水平の点線は、3種のエネルギー  $\Phi$  に対して上の(99)式を示したものである。

第29図の結果を参照し、変形が一樣に近い条件のもとで試験を行なった場合、一般の硬化材料について、衝撃エネルギー  $E$  と変形量の関係は

$$\frac{E}{Al} = \int_0^e s de \quad (100)$$

与えられる。この関係を  $e$  に関して微分すれば、材料の  $s-e$  図を描くことができる。変形が一樣でない場合は

同一の  $e$  に対して  $s$  が過大評価される傾向がある。

本項の問題の弾性解は、ハンマが反発するまでに試料内に生ずる最大応力を  $s_{max}$  として、近似的に

$$s_{max} = \rho c_0 V \left( \sqrt{\frac{M}{\rho l A}} + 1 \right) \quad (101)$$

で与えられる<sup>15)</sup>。ただし  $c_0$  は弾性波の伝ば速度をあらわす。材料力学の教科書の初等解は、(101)式の第2項のないもので、ハンマのエネルギー  $E$  を弾性ひずみエネルギーに等置して

$$E = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}lA \frac{s_{max}^2}{\rho c_0^2}, \quad s_{max} = \rho c_0 V \sqrt{\frac{M}{\rho l A}} \quad (102)$$

である。弾性限度では  $s_{max} = s_r$ 、(92)式の無次元量  $\xi$ 、 $\eta$  を用いると(101)式は

$$\frac{s_r}{\rho c_0 V} = \frac{c}{c_0} \frac{1}{\xi} = \sqrt{\frac{1}{\eta}} + 1. \quad (103)$$

第28図の弾性限度は、(103)式の数値の1例を示したものである。本項の剛塑性体近似の解は、弾性限度を十分に越えたところでのみ、誤差が小さいと考えられる。それで、個々の試験に理論を適用するには、試験の条件を(103)式と比較検証することが望ましい。

### お す び

本稿では、材料試験の分野で、最も普通に行なわれている試験を例題とし、塑性波の伝ばの解析的な取扱いの方法、ひいては塑性力学の手法と、高速試験の領域における成果のあらましを述べた。筆者の研究室において、高速試験と加工に関する今後の研究を進めるため、いちおうの考えをまとめたノートを補足したものすぎないが、同じ問題に関心を持たれる向きに、なんらかのお役にたてば幸いと考えている。筆者の研究室では、高速試験機の開発研究も進めており、その一つをすでに発表した<sup>16)</sup>、最近の成果については稿を改めて述べさせていただきます。 (1965年2月20日受理)

### 文 献

- 9) H. Kolsky & L.S. Douch: *J. Mech. Phys. Solids*, **10**-3 (1962), 195.
- 10) E.H. Lee & S. J. Tupper: *J. Appl. Mech.*, **21** (1954), 63.
- 11) E.D.H. Davies & S.C. Hunter: *J. Mech. Phys. Solids*, **11**-3 (1963), 155.
- 12) H. Kolsky: *Proc. Phys. Soc.*, **62B** (1949), 676.
- 13) F.V. Warnock & J.B. Brennan: *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, **159** (1948), 1.
- 14) E.H. Lee & H. Wolf: *J. Appl. Mech.*, **18** (1951), 379.
- 15) S. Timoshenko: *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill, 1951), 451.
- 16) 山田: マシナリー, **26**-387 (1963), 733.