

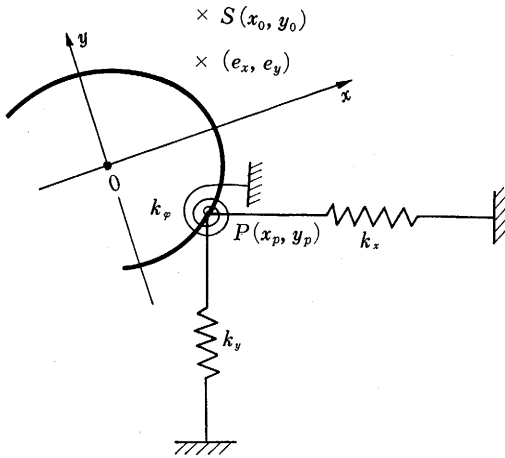
薄肉開断面材の弾性力学 (VII)

川 井 忠 彦

これまで6回にわたって述べてきた解説のしめくりとして、まず弾性的に支持された柱の軸圧縮力による安定と補強板の圧縮強度の問題を論じ、次いで吊り橋の曲げ振り振動の問題や、航空機翼の空気力学的安定の問題について概説する。

25. 軸圧縮力を受ける弾性的に支持された柱の安定

今断面一様な薄肉開断面材が断面上の一点 $P(x_p, y_p)$ を通り、柱の軸 (z 軸) に平行な直線上において連続的に一様な強さの3種のスプリング k_x, k_y, k_ϕ により弾性的に拘束され、柱の両端において偏心 (e_x, e_y) のある軸圧縮力 P を受けて曲げ振り変形を生ずる場合を考える。この場合の柱の基礎平衡方程式は (93) 式よりつぎのように与えられる (第 64 図参照)。



第 64 図 弾性的に支持された梁

$$\left. \begin{aligned}
 EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + k_x \{u + (y_0 - y_p) \varphi\} = & \frac{d^2}{dz^2} [P \{ (e_x - u) + \varphi (e_y - y_0) \}] \\
 EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + k_y \{v - (x_0 - x_p) \varphi\} = & \frac{d^2}{dz^2} [P \{ (e_y - v) - \varphi (e_x - x_0) \}] \\
 EI_\phi \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr^2 - GK) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + & P \left\{ (e_x - x_0) \frac{d^2 v}{dz^2} - (e_y - y_0) \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} + \\
 k_\phi \varphi + k_x \{u + (y_0 - y_p) \varphi\} (y_0 - y_p) - & k_y \{v - (x_0 - x_p) \varphi\} (x_0 - x_p) = 0
 \end{aligned} \right\} (169)$$

煩雑になるのを防ぐため柱の両端は支持されているものとして議論を進めることにする。(169) 式の一般解はつぎの未知係数 a_n, b_n および c_n に関する三元一次連立方程式を解いて求めることができる。

$$\left. \begin{aligned}
 a_n \left\{ \left(n^2 P_x + \frac{k_x L^2}{n^2 \pi^2} \right) - P \right\} + \left\{ P (e_y - y_0) + \right. & \\
 \left. \frac{k_x L^2}{n^2 \pi^2} (y_0 - y_p) \right\} c_n = \frac{\mathfrak{A}_n L^2}{n^2 \pi^2} & \\
 b_n \left\{ \left(n^2 P_y + \frac{k_y L^2}{n^2 \pi^2} \right) - P \right\} - \left\{ P (e_x - x_0) + \right. & \\
 \left. \frac{k_y L^2}{n^2 \pi^2} (x_0 - x_p) \right\} c_n = \frac{\mathfrak{B}_n L^2}{n^2 \pi^2} & \\
 a_n \left\{ P (e_y - y_0) + \frac{k_x L^2}{n^2 \pi^2} (y_0 - y_p) \right\} & \\
 - \left\{ P (e_x - x_0) + \frac{k_y L^2}{n^2 \pi^2} (x_0 - x_p) \right\} b_n & \\
 + c_n \left\{ r^2 (P_T^{(n)} - P) + \frac{k_x L^2 (y_0 - y_p)^2}{n^2 \pi^2} \right. & \\
 \left. + \frac{k_y L^2 (x_0 - x_p)^2}{n^2 \pi^2} + \frac{k_\phi L^2}{n^2 \pi^2} \right\} = 0 &
 \end{aligned} \right\} (170)$$

ここに $(n=1, 2, 3, \dots)$

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{L^2},$$

$$P_T^{(n)} = \frac{1}{r^2} \left(GK + \frac{n^2 \pi^2 EI_\phi}{L^2} \right)$$

$$\mathfrak{A}_n = -P e_x \left(\frac{n\pi}{L} \right) \sqrt{\frac{2}{L}} (1 - \cos n\pi),$$

$$\mathfrak{B}_n = P e_y \left(\frac{n\pi}{L} \right) \sqrt{\frac{2}{L}} (1 - \cos n\pi)$$

(170) 式を解き、 a_n, b_n, c_n が決まれば柱の撓み (u, v) および振り φ は Fourier 級数の形で求めることができる。さてこの柱の座屈荷重を定める特有方程式は容易につぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{n^2\pi^2 EI_{xx}}{L^2} + \frac{k_x L^2}{n^2\pi^2} - P & 0 & P(e_y - y_0) + \frac{k_x L^2 (y_0 - y_p)}{n^2\pi^2} \\
 & 0 & \frac{n^2\pi^2 EI_{yy}}{L^2} + \frac{k_y L^2}{n^2\pi^2} - P & - \left\{ P(e_x - x_0) + \frac{k_y L^2 (x_0 - x_p)}{n^2\pi^2} \right\} \\
 & P(e_y - y_0) + \frac{k_x L^2 (y_0 - y_p)}{n^2\pi^2} & - \left\{ P(e_x - x_0) + \frac{k_y L^2 (x_0 - x_p)}{n^2\pi^2} \right\} & GK + EI_{\omega} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{k_{\phi} L^2}{n^2\pi^2} \\
 & & & + \frac{L^2 \{ k_x (y_0 - y_p)^2 + k_y (x_0 - x_p)^2 \}}{n^2\pi^2} - P r_s^2
 \end{aligned} \right\} = 0 \tag{171}$$

(171) 式で与えられる座屈特有方程式を用いて二三の特別な場合における柱の安定の問題を考えてみよう。

(a) 二軸対称断面材の図心軸に沿ってスプリング
 が取り付けられ、かつ図心軸力の場合

この場合は仮定により

$$x_0 = x_p = y_0 = y_p = 0, \quad e_x = e_y = 0$$

であるから (171) 式はつぎの三つの式と同等になる。

$$\left. \begin{aligned}
 P &= \frac{n^2\pi^2 EI_{xx}}{L^2} + \frac{k_x L^2}{n^2\pi^2}, \quad P = \frac{n^2\pi^2 EI_{yy}}{L^2} + \frac{k_y L^2}{n^2\pi^2} \\
 \text{または} \quad P &= \frac{1}{r_s^2} \left(GK + \frac{n^2\pi^2 EI_{\omega}}{L^2} + \frac{k_{\phi} L^2}{n^2\pi^2} \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{172}$$

すなわちこの場合は柱は純曲げ座屈か、あるいは純振り座屈を起こすことを示している。そして P_{cr} が最小となるように n の値を決めてやらなければならない。(172) のはじめの2式は Timoshenko の座屈理論²⁶⁾、その他多くの本に出てくる弾性床の上に置かれた梁の曲げ座屈荷重の式であることはいうまでもない。

(b) 一軸対称断面材で弾性支持点が対称面内
 あり図心軸力を受ける場合 (第 65 図参照)

仮定により

$$x_0 = x_p = 0, \quad e_x = e_y = 0$$

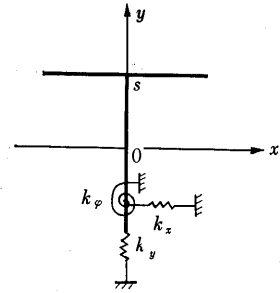
であるから、(171) 式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 P &= \frac{n^2\pi^2 EI_{yy}}{L^2} + \frac{k_y L^2}{n^2\pi^2} \\
 \text{または} & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{n^2\pi^2 EI_{xx}}{L^2} + \frac{k_x L^2}{n^2\pi^2} - P & P(e_y - y_0) + \frac{k_x L^2 (y_0 - y_p)}{n^2\pi^2} \\
 & P(e_y - y_0) + \frac{k_x L^2 (y_0 - y_p)}{n^2\pi^2} & GK + \frac{n^2\pi^2 EI_{\omega}}{L^2} + \frac{k_{\phi} L^2}{n^2\pi^2} \\
 & & + \frac{k_x L^2 (y_0 - y_p)^2}{n^2\pi^2} - P r_s^2
 \end{aligned} \right\} = 0 \tag{173}
 \end{aligned}$$

すなわちこの場合は x 軸まわりの Euler 座屈は独立で他の y 軸まわりの曲げ座屈と純振り座屈とが (173) の第2式で与えられるように連成することを示している。そしてその最小根と独立な曲げ座屈荷重のいずれか小さい方がこの場合の座屈荷重を与えることになるのは他の場合と同様である。

(c) 回転軸を拘束されている柱の安定

第 66 図に示すように柱の回転軸が拘束されている場



第 65 図 弾性支持点が対称面内にある一軸対称断面梁

合の安定について考えてみる。軸力は簡単のために図心 ($e_x = e_y = 0$) であるとする。仮定により

$$u_p = u + \varphi (y_0 - y_p) = 0$$

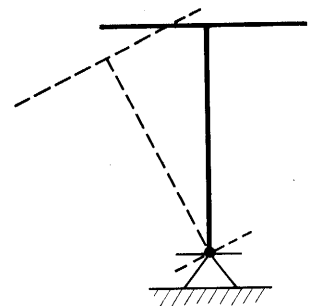
$$v_p = v - \varphi (x_0 - x_p) = 0$$

すなわち

$$u = -\varphi (y_0 - y_p), \quad v = \varphi (x_0 - x_p)$$

で $k_x \rightarrow \infty, k_y \rightarrow \infty$ である。

そこで (169) の3式より $k_x [u + \varphi (y_0 - y_p)]$, $k_y [v - \varphi (x_0 - x_p)]$ を消去すれば次のような φ に関する微分方程式が得られる。



第 66 図 回転軸を拘束されている柱

$$\begin{aligned}
 & E [I_{\omega} + (y_0 - y_p)^2 I_{xx} + (x_0 - x_p)^2 I_{yy}] \frac{d^4 \varphi}{dx^4} + \\
 & \{ P (r^2 - x_0^2 - y_0^2 + x_p^2 + y_p^2) - GK \} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \\
 & + k_{\phi} \varphi = 0 \tag{174}
 \end{aligned}$$

(174) 式は容易に解くことができ、

$$r^2 - x_0^2 - y_0^2 = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{A} = \frac{I_p}{A} \text{ に注意すれば}$$

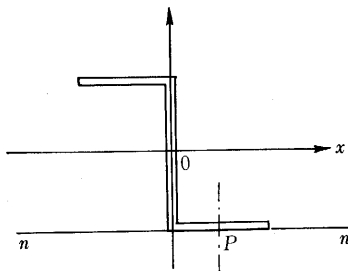
$$P_{cr} = \frac{GK + E \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \{ I_{\omega} + (y_0 - y_p)^2 I_{xx} + (x_0 - x_p)^2 I_{yy} \} + \frac{k_p L^2}{n^2 \pi^2}}{\frac{1}{A} (I_{xx} + I_{yy}) + x_p^2 + y_p^2} \quad (175)$$

が得られる。この結果は Timoshenko⁵⁾ や Bleich⁶⁾ が誘導した結果と一致している。

26. 補強板の座屈問題に対する応用

平板構造物の圧縮による座屈の問題で重要なものの一つに圧縮を受ける補強板の最高荷重の決定がある。補強板が圧縮荷重を受けるとき縦補強材の曲げ剛性がある程度以上大きい場合には補強材間の平板のパネルがまず座屈する。平板は座屈後有効幅の現象を示して補強材の付近のみが補強材とともに圧縮応力が増加して荷重を負担する。このような状態で荷重が増加したとき補強板全体の最高荷重はどのような条件下で到達されるかについて、いろいろの考え方があるが、ここではその最高荷重が補強材とパネルの有効幅の部分で形成される柱の座屈で決定される場合について簡単な考察を加えることにする。

平板の座屈後において補強材は平板の面内方向の変位および平板との接合線まわりの回転が平板のスプリング的作用によってある程度拘束された柱と考えることがで



第 67 図 Z 形材を用いた補強板

きる。たとえば第 67 図のように Z 形補強材が点 P を通り紙面に垂直な線上でリベットなどにより平板 nn に接着されているとする。このような場合には表面 nn に接する補強材の座屈が起こったとすると平板の面内方向にはたわみ得ないが、その平面に直角な方向にはたわむことができると考えられる。前節に述べた一般論をこの問題に応用することは、もちろん可能であるが、一般には座標軸のとり方が断面の主軸になっているので、煩雑になるのをまぬがれない。このような場合には一般論によらず、座標軸を第 67 図に示すように平板面に垂直にとると議論が簡単になる。今 Timoshenko にならって基礎平衡方程式を求めてみよう⁵⁾。通常このように座標軸を定めるとそれらは、もはや断面の主軸ではないので柱の

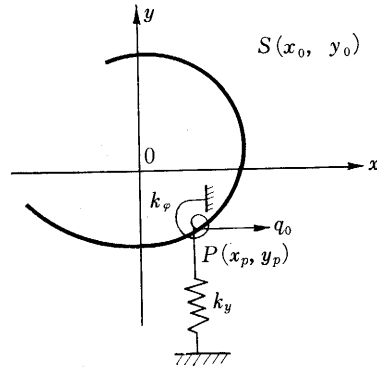
たわみの微分方程式は一般につきのようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EI_{yy} \frac{d^2v}{dz^2} - EI_{xy} \frac{d^2u}{dz^2} \\ M_y &= EI_{xx} \frac{d^2u}{dz^2} + EI_{xy} \frac{d^2v}{dz^2} \end{aligned} \right\} (176)$$

これらの式を 2 回 z で微分すれば

$$\left. \begin{aligned} q_x &= EI_{xx} \frac{d^4u}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4v}{dz^4} \\ q_y &= EI_{yy} \frac{d^4v}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4u}{dz^4} \end{aligned} \right\} (177)$$

が得られる。第 68 図のように任意の形をした断面を考



第 68 図 x 方向の変位を完全に拘束された補強材

え、P 点 (x_p, y_p) の繊維が x 方向にはたわむことができないと仮定する。前と同様断面中心軸 s の x 方向、y 方向のたわみを u, v とすると、P 点の繊維の変位はつきのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u + \varphi(y_0 - y_p) \\ v_p &= v - \varphi(x_0 - x_p) \end{aligned} \right\}$$

P 点における拘束条件: $u_p = 0$ より
 $u + \varphi(y_0 - y_p) = 0$

となる。

この拘束により x 軸に平行な力が点 P を通る軸に沿って連続的に分布することになる。今この力の強さを q_0 とすれば (177) 式の q_x, q_y はつきのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -P \left(\frac{d^2u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + q_0 \\ q_y &= -k_y [v - (x_0 - x_p)\varphi] - P \left(\frac{d^2v}{dz^2} - x_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

これらの式を (177) 式に代入れば

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= P \left(\frac{d^2u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + EI_{xx} \frac{d^4v}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4u}{dz^4} \\ EI_{yy} \frac{d^4u}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4u}{dz^4} + P \left(\frac{d^2v}{dz^2} - x_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + \\ k_y [v - (x_0 - x_p)\varphi] &= 0 \end{aligned} \right\} (178)$$

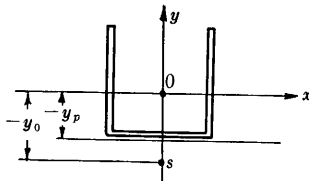
この第2式は $u_p=0$ の条件代入するとつぎのような v と φ のみをふくむ方程式を与える.

$$EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - EI_{xy} (y_0 - y_p) \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - P x_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + k_y [v - (x_0 - x_p) \varphi] = 0 \quad (179)$$

v および φ に関する第2の方程式は柱の振りに対する考察から求められる. すなわち (169) 式の第3式において $q_0 = -k_x [u + (y_0 - y_p) \varphi]$ とすればつぎの式が得られる.

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr^2 - GK) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P \left(y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} - x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} \right) - q_0 (y_0 - y_p) - k_y [v - (x_0 - x_p) \varphi] (x_0 - x_p) + k_{\varphi} \varphi = 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\pi^2 EI_{yy}}{L^2} - P & - \left\{ \frac{\pi^2 EI_{xy}}{L^2} (y_0 - y_p) - P x_0 \right\} \\ - \left\{ \frac{\pi^2 EI_{xy}}{L^2} (y_0 - y_p) - P x_0 \right\} & E \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \{ I_{\omega} + (y_0 - y_p)^2 I_{xx} \} + GK - P (r^2 + y_p^2 - y_0^2) \end{array} \right| = 0 \quad (181)$$



第 69 図 山形材を用いた補強板

もし柱が第69図に示したようなチャンネル材の場合には断面が y 軸に関して対称であるから, x および y 軸は主軸となり $I_{xy}=0$, $x_0=0$ であるから

$$P = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{L^2} \text{ または}$$

$$\frac{1}{r^2 + y_p^2 - y_0^2} \left[GK + E \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \{ I_{\omega} + (y_0 - y_p)^2 I_{xx} \} \right]$$

が得られ, はじめの式より柱の対称面内の Euler 座屈荷重, あとの式からは回転軸が板の平面内にある純振り座屈荷重が求められる.

この純振り座屈荷重は前節 (175) 式において $x_0 = x_p = 0$, $k_{\varphi} = 0$, $n=1$ とおいた場合に一致する. 補強板の座屈の問題は単一材の座屈の問題と異なり, 板の有効幅の問題や板の補強材に対する拘束度を決定する問題が関係するなど, 解析がなかなか面倒である²⁷⁾. そしてこれまでに非常に数多くの研究が世界各国で行なわれてきているが, 現在のところまだ完成された理論はできていないようである. 筆者は以前国産中型輸送機の主翼パネルの圧縮試験結果に対する理論的検討を, ここで述べた理論を応用して行ない, かなり良好な一致を確認することができた²⁸⁾.

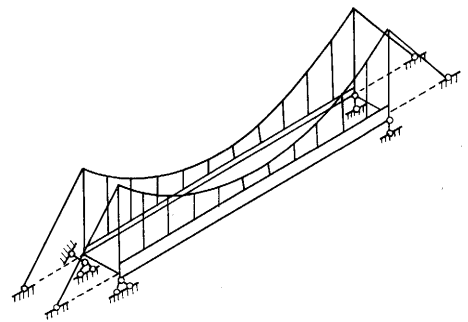
$u_p=0$ の条件および (178) 式より u および q_0 の値を上式の式に代入れば

$$E \{ I_{\omega} + (y_0 - y_p)^2 I_{xx} \} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - EI_{xy} (y_0 - y_p) \frac{d^4 v}{dz^4} + \{ P (r^2 + y_p^2 - y_0^2) - GK \} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - P x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} - k_y [v - (x_0 - x_p) \varphi] (x_0 - x_p) + k_{\varphi} \varphi = 0 \quad (180)$$

となる. したがって (179) および (180) 式の v および φ に関する連立常微分方程式を解けば座屈荷重が定まることになる. 今特に $k_y = k_{\varphi} = 0$, すなわち板のスプリング反力が無視できるとし柱の両端が単純支持されている場合を考えて座屈特有方程式を導出すればつぎのようになる.

27. 吊り橋の曲げ振り振動

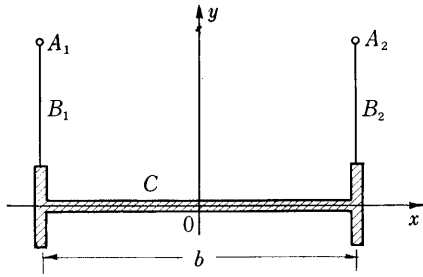
以上に述べてきた薄肉開断面材の弾性理論を吊り橋の安定問題に応用してみよう²⁹⁾. 吊り橋は通常対称断面の薄肉梁と見なされる補剛桁 (stiffening girder) をそのフランジの面内におかれたアーチ状の吊り索 (cable) によって懸垂した構造物であると考えられる. 今桁構造が



第 70 図 吊り橋の構造

第70図に示すような二軸対称断面の I 形梁であると仮定し, 死荷重 q_y , m_z の外に水平方向の風の作用 q_x を受けて変形する場合の基礎平衡方程式はつぎのように与えられる (第71図参照)³⁰⁾.

$$\left. \begin{array}{l} EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} - 2H \frac{d^2 v}{dz^2} = - \frac{d^2}{dz^2} (M_x + M_y \varphi) \\ EI_{\omega} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - H \frac{b^2}{2} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + q_x d_x \varphi \\ = - M_y \frac{d^2 v}{dz^2} + m_z \end{array} \right\} \quad (182)$$

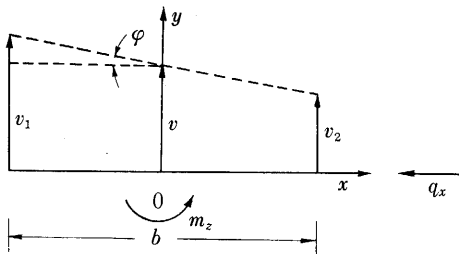


A_1, A_2 : 吊り索(ケーブル)
 B_1, B_2 : 吊り材
 C : 補剛桁

第 71 図 吊り橋の断面図

ここに H は吊り索の張力, b は梁の深さを表わしている。

吊り索の張力 H は吊り橋が外荷重 q_x, q_y を受けて微小曲げ振り変形を起こした場合, つぎのような y 方向の付加荷重と付加振りモーメントを生ずると考える。すなわち第 72 図において I 形梁のフランジの変位 v が生



第 72 図 吊り橋に生ずる曲げ振り変形

ずる場合, 吊り索の張力 H は $H \frac{d^2v}{dz^2}$ に等しい y 方向の分力を梁に伝えることになる。したがって両側のフランジに伝えられ付加荷重を q_y^0 とすれば

$$q_y^0 = H \left(\frac{d^2v_1}{dz^2} + \frac{d^2v_2}{dz^2} \right)$$

ここに v_1 および v_2 は第一, 第二のフランジの垂直変位を表わしている。さてこの二つのフランジの垂直変位の和は梁の断面の図心の変位の二倍に等しいから

$$q_y^0 = 2H \frac{d^2v}{dz^2}$$

となる。吊り索の張力 H の第二の効果は次のような付加振りモーメント m_z^0 を生ずることである。

$$m_z^0 = H \frac{b}{2} \left(\frac{d^2v_1}{dz^2} - \frac{d^2v_2}{dz^2} \right)$$

ところが第 72 図から

$$\frac{v_1 - v_2}{b} = \tan \phi \doteq \phi$$

であるから, けっきよく

$$m_z^0 = H \frac{b^2}{2} \frac{d^2\phi}{dz^2}$$

が得られる。

橋の変形によって生ずる吊り索の張力 H の付加荷重を求める場合, 吊り材の変形を無視し梁は連続的に吊り材に懸垂されていると仮定しているが, これは吊り材の間隔が実際問題として十分密であると考えられるからは正しいものと思われる。

(182) 式は一つの静的組合せ荷重を受ける I 形梁の曲げ振り変形および座屈を支配する基礎方程式であるからこれまでに述べた一般の理論を応用して吊り橋に生ずるいろいろな静的安定問題を研究することができる³⁰⁾。ここではさらに一步前進して吊り橋の動的安定の問題を考えてみよう。吊り橋の曲げ振り振動の基礎方程式は(182) 式に慣性力と空気力の項を加えてつぎのように求められる。

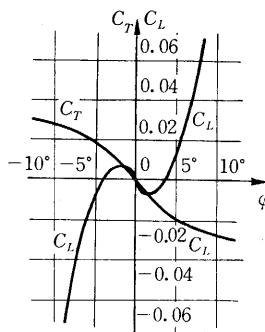
$$\left. \begin{aligned} EI_{yy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - 2H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\gamma I_{yy}}{g} \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \phi) &= q_y \\ EI_{\omega} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - H \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\gamma I_{\omega}}{g} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma I_P}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -M_y \frac{d^2 v}{dz^2} + m_z \end{aligned} \right\} (183)$$

ここに q_y は橋の単位長さ当たりの揚力である

$$q_y = C_L(\phi) \rho S \frac{V^2}{2g} \quad (184)$$

C_L = 振り角 ϕ の関数として与えられる揚力係数
 ρ = 単位体積当たりの空気の重量, S = 橋の単位長さの水平射影面積
 V = 風 velocity, γ = 吊り橋の材料の単位体積当たりの重量

である。 m_z は風によって起こされる橋の単位長さ当たりの振りモーメントでつぎの式から計算される。



第 73 図 水平方向の風を受ける吊り橋の揚力係数 C_L およびモーメント係数 C_T

$$m_z = C_T(\phi) b^2 \rho \frac{V^2}{2g} \quad (185)$$

ここに b = 補剛桁の幅

C_T = 振り角の関数として与えられるモーメント

係数で、 φ が微小な場合には

$$C_T = -k\varphi \quad (k \text{ は常数}) \quad (186)$$

とすることができる (第 73 図参照). 式には梁の断面の曲げに対する回転慣性力 $-\frac{\gamma I_{yy}}{g} \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2}$ だけでなく、振りに対する回転慣性力 $-\frac{\gamma I_o}{g} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2}$ の影響をも考慮してある (第 II 講 (45) 式と比較). さて V. Z. Vlassov に従ってこの問題を研究してみよう. まず最終の結果にほとんど影響のない揚力 q_y を無視し, (185) 式を (183) 式の右辺に代入し, (186) 式を用いればつぎのような吊り橋の動的安定に関する微分方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} EI_{yy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - 2H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\gamma I_{yy}}{g} \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{\gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \varphi) &= 0 \\ EI_o \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - H \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\gamma I_o}{g} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma I_p}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k \rho b^2 \frac{V^2}{2g} \varphi + M_y \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (187)$$

(187) 式中には時間に関する二次の微係数しか含まれないので (187) 式の解をつぎの形におくことができる.

$$\left. \begin{aligned} v(z, t) &= v_0(z) e^{i p t} \\ \varphi(z, t) &= \varphi_0(z) e^{i p t} \end{aligned} \right\} (188)$$

ここに p は振動の角速度を示している.

(188) 式を (187) 式に代入して $e^{i p t}$ の項を両辺から取り去るとつぎのような v_0 と φ_0 に関する連立常微分方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} EI_{yy} \frac{d^4 v_0}{dz^4} - 2H \frac{d^2 v_0}{dz^2} + \frac{\gamma I_{yy}}{g} \frac{d^2 v_0}{dz^2} - \frac{\gamma A}{g} p^2 v_0 + \frac{d^2}{dz^2} (M_y \varphi_0) &= 0 \\ EI_o \frac{d^4 \varphi_0}{dz^4} - \left(GK + H \frac{b^2}{2} \right) \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} + \frac{\gamma I_o}{g} p^2 \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} - \frac{\gamma I_p}{g} p^2 \varphi_0 + k \rho b^2 \frac{V^2}{2g} \varphi_0 + M_y \frac{d^2 v_0}{dz^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (189)$$

今風圧は橋の全長にわたって一様であると仮定すれば

$$M_y = \frac{q}{2} z(L-z)$$

であり, 吊り橋の静的安定問題の場合と同様に³⁰⁾, 一節振動が最も重要であるので

$$v_0(z) = B \sin \frac{2\pi z}{L}, \quad \varphi_0(z) = C \sin \frac{2\pi z}{L}$$

と仮定する. これらの式を (189) 式に代入すると未知係数 B および C に関するつぎのような齊次の連立代数方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \left[EI_{yy} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 + 2H \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 - \frac{\gamma I_{yy}}{g} p^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 - \frac{\gamma A}{g} p^2 \right] \left(\frac{L}{2} \right) B - \frac{\alpha_1 V^2 L}{8} \left(1 + \frac{2^2 \pi^2}{3} \right) C &= 0 \\ - \frac{\alpha_1 V^2 L}{8} \left(1 + \frac{2^2 \pi^2}{3} \right) B + \left[EI_o \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 + \left(GK + H \frac{b^2}{2} \right) \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 - \frac{\gamma I_o}{g} p^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 - \frac{\gamma I_p}{g} p^2 + k \rho b^2 \frac{V^2}{2g} \right] \left(\frac{L}{2} \right) C &= 0 \end{aligned} \right\} (190)$$

(190) 式を誘導する場合風速 V と風圧 q との間につきのような近似式を仮定した.

$$q = \alpha_1 V^2$$

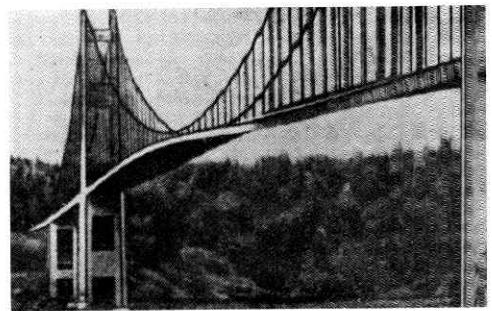
さて B, C を消去して得られる行列式を零とおけば, 風速 V に関する四次方程式:

$$aV^4 - bV^2 - c = 0 \quad (191)$$

が得られる. この方程式の係数は角速度 p^2 を含む種々の物理的, 幾何学のおよび空気力学的な量の関数である. (191) 式と風速 V に関する極値条件:

$$\frac{\partial (V^2)}{\partial (p^2)} = 0$$

とから吊り橋に破壊を起こさせる限界風速を決定することができる. 1940年11月7日に当時世界第三の長さを誇っていたアメリカ合衆国ワシントン州の Tacoma Narrow Bridge が 18.6 m/sec (67 km/hr) の風を受けて, 第 74 図に見るような曲げ振り振動を起こして破壊するというセンセーショナルな事故が起きた. 今以上に述べた解析法をこの橋に適用して限界風速を求めてみよう. 数値計算に必要な諸常数はつぎの通りである.



第 74 図 強風を受けて墜落寸前の Tacoma Narrow Bridge (Wash., USA, Nov. 7, 1940)

$L = 853 \text{ m}$	$H = 5.65 \times 10^4 \text{ kg}$
$b = 11.9 \text{ m}$	$E = 2.1 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2$
$A = 0.654 \text{ m}^2$	$G = 0.8 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2$
$I_p = I_{xx} + I_{yy} = 10.7 \text{ m}^4$	$\gamma = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
$I_{xx} = 0.122 \text{ m}^4$	$\rho = 1.26 \text{ kg/m}^3$
$I_{yy} = 10.6 \text{ m}^4$	$g = 9.81 \text{ m/sec}^2$
$K = 0$	$\alpha_1 = 0.144 \text{ kgsec}^2/\text{m}^3$
$I_o = 4.31 \text{ m}^6$	$k = 0.267$

ここで k は C_T 曲線 (第 73 図) の原点において引いた切線の勾配をとってある。すなわち微小振動を仮定していることになる。この振動が安定でなければ振幅が時間とともに増大して、ついに破壊を起こすことになる。計算の結果限界風速はつぎのように求められた。

$$V_{cr} = 60.9 \text{ km/hr} = 16.9 \text{ m/sec}$$

またこの風速に対する風圧は

$$q = 41.4 \text{ kg/m}$$

と求められる。事故の起きた当日の実際の風速は $V = 67 \text{ km/hr} = 18.6 \text{ m/sec}$ であったから限界風速の計算誤差は 10% 以下である。この誤差は主として橋桁の両端の支持点における境界条件が若干単純支持端とは違っているためと思われる。

この橋が座屈を起こさずに保持し得る静的な水平荷重 q_{st} を事故の起きた風速に対応する風圧 q_{dyn} と比べてみると $q_{st} = 900 \text{ kg/m}$ となるので

$$q_{dyn} \ll q_{st}$$

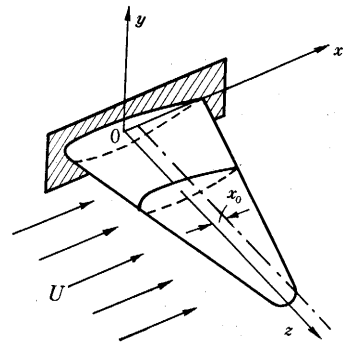
であることがわかる。すなわち静的な水平限界荷重はかなり大きい。振動を伴う場合の動的な水平限界荷重は非常に小さかったことになる。特に強調したいことはここで述べたような曲げ振り振動の結果破壊したということである。垂直な純曲げ振動のみでは事故の当日記録された 36 cycles/min の振動数においても破壊が起らず事故の直前においてその振動数は 14 cycles/min まで落ちていた。

したがってこの橋は曲げ振り振動によって破壊したものであると思われる。このことは事故を起こすまでに完了しなかった実物の縮尺 1/1000 の模型実験において確かめられ、橋が動的不安定現象を起こして墜落したものであることを十分に証明した。結論として吊り橋の動的安定性を増大させるには曲げ振り剛性の高い桁構造を建設すべきであることがわかる。そのためには閉断面の箱形構造にするか、あるいは開断面構造でも有効な補強を十分行なって振り剛性を高めた構造に設計しなければならない。

28. 航空機翼のフラッター

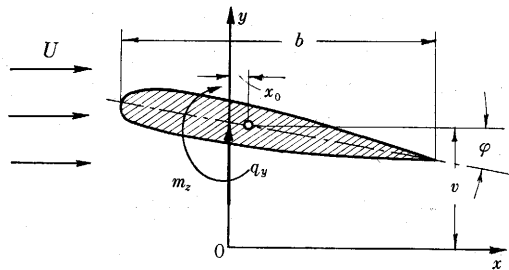
つぎに片持翼の曲げ振りフラッターの簡単な問題について述べてみよう。この問題は最近の超音速航空機やロケット機体の設計において無視することのできない重要な問題の一つであり、活発な研究が欧米諸国において行なわれ、多くの参考書^{15), 31)}も出版されているから、立ち入った議論は行なわずその概要について説明することにする。

第 75 図に示すような空気流に直角な方向に真直な剪断中心軸を有する翼を考える。翼を気流の方向の曲げ剛性、すなわち I_{xx} が他の曲げ剛性 I_{yy} や曲げ振り剛性 EI_z に比べてはるかに大きい弾性の薄肉梁を考える。こ



第 75 図 一様な高速気流の中におかれた航空機翼

のような場合には第 76 図に示したように翼の変形は剪断中心の y 方向の変位 $v(z, t)$ とそのまわりの断面の回転 $\varphi(z, t)$ で表わすことができる。



第 76 図 翼に生ずる曲げ振り変形

したがって翼の微小振動の方程式は第 II 講を参考にして

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= q_y(z, t) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - mA x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \\ mI_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= m_z(z, t) \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

これらの式の左辺は第 II 講 (45) 式において剪断変形や回転慣性を無視して得られたものであり、右辺は翼の単位長さ当たりに働く空気力と空気力学的モーメントをそれぞれ表わしている。これらの振動している翼に働く空気力を正確に求めるのは、なかなか困難であるが、翼が十分長ければ空気の流を二次元的に考えても差し支えない。そうすると線形近似理論から

$$\left. \begin{aligned} q_y(z, t) &= A_{12} \varphi + B_{11} \frac{\partial v}{\partial t} + B_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ m_z(z, t) &= A_{21} v + A_{22} \varphi + B_{21} \frac{\partial v}{\partial t} + B_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

となる。

ここに A_{ik} および B_{ik} は一般に気流速度 U と座標 z の関数として表わされる係数である。またある場合には考えている翼の運動の性質にも関係する。たとえばその運動が一定の振動数 Ω をもった周期的運動であれば (193) 式の諸係数はまた一つの無次元パラメーター、換

算振動数 (reduced frequency) $\Omega b/U$ (ここに b は翼弦長を示す) の関数でもり得る. 係数 A_{ik} や B_{ik} の一般的な表示について述べることは止めて, ここでは非常に簡単な形に表わせる二つの場合についてのみ考察する. すなわち “準定常理論” に従って計算される場合とごく超音速で “ピストン理論” が使用できる場合について考える^{15), 31)}.

まず翼の静的安定の問題を考えてみる. この場合の基礎方程式はつぎのようになる.

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{\omega} \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) - \frac{d}{dz} \left(GK \frac{d\varphi}{dz} \right) - \frac{\partial C_T}{\partial \varphi} \frac{\rho U^2 b}{2} \varphi = 0 \quad (194)$$

ここに (193) 式中の係数 A_{22} は空気力学的モーメント係数 $C_T(\varphi)$ の微係数の実験値で表わされる. ρ は気流の密度である. 片持翼の場合の境界条件は

$$\varphi(0) = \frac{d\varphi(0)}{dz} = \frac{d^2\varphi(L)}{dz^2} = \frac{d^3\varphi(L)}{dz^3} = 0 \quad (195)$$

(194) 式はいわゆる翼のダイバージェンス (divergence) の限界速度を決定する基礎方程式であって, これまで述べてきた一般的な理論を用いて容易に解くことができる. 今翼断面を一定とし曲げ振り剛性を無視できる場合を考えると

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + k^2\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \frac{d\varphi(L)}{dz} = 0$$

ここに

$$k^2 = \frac{\rho U^2 b^2}{2GK} \frac{\partial C_T}{\partial \varphi}$$

したがって $\cos kL = 0$ の最小固有値からダイバージェンスの限界速度はつぎのように求められる.

$$U^* = \frac{\pi}{2Lb} \sqrt{\frac{2GK}{\rho} \frac{\partial C_T}{\partial \varphi}} \quad (195)$$

すなわち, 気流の速度が U^* に到達すると翼の捩れ角が急激に増大して翼は振り変形による破壊を起こすことを示している.

さて (192) 式を再び参考にして翼のフラッター (flutter) の問題を考えてみよう. 翼の変形を

$$v(x, t) = v_0(x)e^{st}, \quad \varphi(x, t) = \varphi_0(x)e^{st}$$

と仮定して (192) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} &\frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{y'} \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + mAs^2 v_0 - mAx_0 s^2 \varphi_0 = \\ &A_{112} \varphi_0 + B_{11s} v_0 + B_{12s} \varphi_0 \\ &\frac{d^2}{dz^2} \left(EI_{\omega} \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} \right) - \frac{d}{dz} \left(GK \frac{d\varphi_0}{dz} \right) - mAx_0 s^2 v_0 \\ &+ mI_{ss} s^2 \varphi_0 = (A_{21} + B_{21s}) v_0 + (A_{22} + B_{22s}) \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

問題は気流の速度 U と指数 s の関係を (196) 式を片持梁の境界条件下において解き研究することである. 一般に s は複素根となるから, すべての根 s が複素数平面上で左側の半平面 (s の実数部が負の領域) 内にあれば気流の中におかれた翼の平衡状態は安定である. したがって求められる指数の根のうち少なくとも一つが右側の半

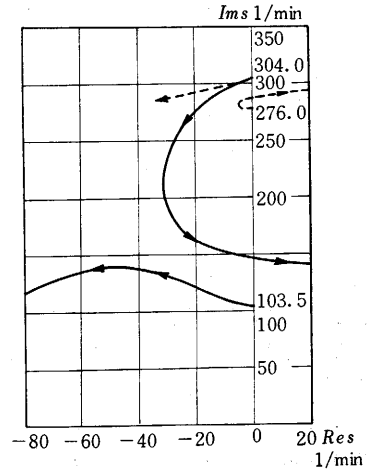
平面内に入るときの速度 U の最小値が限界速度を与えることになる. そしてこの限界速度において振動形の不安定現象, すなわちフラッターが起こる. 点 $s=0$ を通る場合にも平衡状態の遷移がおこるが, これは一つの例外であってこの場合は明らかにダイバージェンスに対応している³²⁾.

さて (192) 式を第II講で述べたように

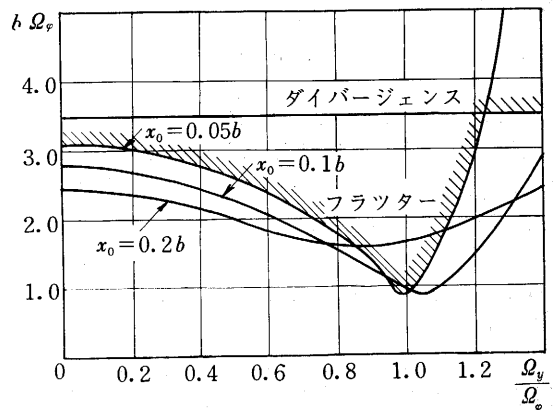
$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) v_n(x), \quad \varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x) \quad (197)$$

のようにおいて, 梁の曲げ振動の規準関数の直交性を利用して解析を進めることもできる ((30)式を参照).

今 (197) 式の級数の第1項のみをそれぞれとって, この曲げ振りフラッターの問題を研究した結果による純曲げ振動の基本固有振動数 Ω_y と純振り振動の基本固有振動数 Ω_{φ} の相関性が当然のことながら限界フラッター速度に著しい影響を及ぼすことがわかる. 第77図はある特定の翼について固有振動数の比を二つの異なった値に



第77図 指数 s の特有根の挙動 ($\Omega_y/\Omega_{\varphi}$ の比を二つの異なった値にとった場合)



第78図 限界速度と比 x_0/b および $\Omega_y/\Omega_{\varphi}$ の関係

とったときの特有指数の挙動を示したものである。 Q_y/Q_p を 0.34 から 0.91 まで増大させると限界速度パラメータは 740 から 250 に減ることがわかった。第 78 図は限界速度が二つの比 x_0/b および Q_y/Q_p とともにどのように変化するかを示した 1 例である。図中にはダイバージェンスの限界速度の大きさも示してある。この図からフラッター限界速度が二つのパラメータの関係によって、ダイバージェンス限界速度よりも小さくなったり、大きくなったりすることがわかる。

結 論

以上 7 回にわたり薄肉開断面材の弾性力学とその工学的应用について概説してきた。そして航空機、船舶、車輛、土木建築などほとんど工学のあらゆる分野における近代構造物において最近とみの需要の増大してきた薄肉開断面材の静的および動的問題に対する解析法について述べ、その応用例をいくつか説明してきた。1929 年 H. Wagner が Danzig 工科大学 25 周年記念論文集に柱の振り座屈理論を発表して以来約 35 年の歳月を経て、薄肉材の曲げ振りに関する近代的工学理論が生長してきたわけであり、各分野においてこの理論に基づいた研究が活発に行なわれ、幾多の成果があげられている。このようにして、いちおう薄肉部材の強度理論は体系づけられた感があるが、問題はすべて解決されたのではなく、これからこの理論を足場にして研究を進めなければならない問題が山積している。その大きな課題を二三ひろってみると、まずこの理論の、あらかじめ三次元的に曲がりかつ振れている薄肉梁の問題への一般化がある。この問題の研究が十分進めばここに述べた基礎理論はその最も簡単な線形理論の特別な場合に帰するものと思われるし、またこれまでほとんど研究されていない梁の有限変形理論（たとえば軸圧縮力を受ける柱の曲げ振り座屈に関する *Elastica* の問題等¹⁹⁾）も、だいぶわかってくるものと確信している。また今まで述べてきた理論では部材の断面は変形しないと仮定しているが、肉厚がしだいに薄くなるとこの仮定は成り立たなくなり、断面の変形をも考慮した理論を立てなければならなくなる。それらと殻構造理論との関連性をつけることも将来の大きな課題であろう。以上に述べてきた事がらはすべて弾性範囲内での問題であった。ところが現在市販されている圧延

形鋼などの曲げ振り座屈の問題では塑性座屈が非常に重要であるが現在のところ純曲げ座屈でもなかなか問題があり、まして曲げ振り塑性座屈の理論的究明となると、ほとんど手がつけられていないといっても過言ではあるまい^{2), 6), 26)}。ともあれ、われわれは現在の時点において過去幾多の先人が築き上げてくれた貴重な知識を活用して現行の各種構造物に使用される薄肉部材の設計資料の集積や設計規準の合理化を行なってゆかねばならない。この解説を書いている途中において、ソビエト連邦の殻構造力学の大家 V. Z. Vlassov 教授の書かれた名著“薄肉弾性梁” (*Thin-Walled Elastic Beams*³⁰⁾) を手に入れることができたが、筆者の知る限りにおいて、この本こそ薄肉梁の弾性力学について最も権威のある参考書であると思う。

不幸にしてこの天才的構造力学者は 1958 年 8 月 7 日この本の第 2 版の出版を前にして 52 才の若さで夭折してしまつたことは構造工学の進歩のために、はなはだ惜しいことである。最後に筆を折るに当たって、1 年間の長きにわたって書いてきたつたない解説が、少しでも各方面の現場で働いておられる構造設計者や技師の方々の参考になれば幸いであると思っている。終わりに臨み、お世話になった出版委員会の諸先生や出版掛の方々ならびに図面や原稿の整理に協力をされた鈴木す江子嬢、椎名章二君に深い感謝を捧げるものである。

(1965 年 3 月 10 日 受理)

文 献 (つづき)

- 26) Timoshenko & Gere "Theory of Elastic Stability" McGraw-Hill Book Co Inc (1961)
- 27) Argyris, J. "Flexure-Torsion Failure of Panels" Aircraft Engineering Vol. XXXVI June & July, (1954)
- 28) 川井 "補強板の圧縮強度に関する一解析" 航空技術研究所報告 TR-32, 1962年11月
- 29) 久保 "構造物の振動" 第 1 回生研講習会テキスト <構造力学の諸問題>昭和38年11月
- 30) Vlassov, V. Z. "Thin-Walled Elastic Beams" Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961)
- 31) Fung, Y. C. "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity" John Wiley, New York (1955)
- 32) Bolotin, V. V., "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability" Pergamon Press (1963)

表 紙 説 明

残留応力が疲れ強さに与える影響を求めめるための中空試験片の破断面。この試験片の長さ 190 mm, 中央平行部の外径が 10 mm で、これに軸方向の孔をあけ内径 8 mm の中空円筒としたものである。残留応力は高周波焼入れで与えた。疲れ強さに対し特に影響の大きいと思われる軸方向残留応力は横断面内で平衡を保っているから、薄肉中空にすれば残留応力はそのかなりの部分が失われる。したがって、この試験片を疲れ試験に供すれば材質変化などの影響から分離して残留応力の影響をかなりの程度まで抽出することができる。