

薄肉開断面材の弾性力学 (VI)

川井 忠彦

前号(第16巻 第8号)に引き続き、本号では梁が軸圧縮力 P および横分布荷重 w_x, w_y を受ける場合の曲げ捩り変形や安定の問題について考察する。そして横荷重と軸力を受ける梁柱の座屈特有方程式を各種境界条件の場合についてまとめ、その相関性を論じ、最後に梁の横荷重による横倒れ座屈に言及する。

19. 軸圧縮力と横荷重を受ける梁柱の座屈平衡方程式とその一般解

軸圧縮力は断面の図心に働くものとすれば、その基礎平衡方程式は本講(Ⅲ)(第16巻 第4号)(93)式より、つぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}
 EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + P \left(\frac{d^2 u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right) &= \frac{d^2}{dz^2} \left(-M_x \varphi + M_y - M_z \frac{dv}{dz} \right) \\
 EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + P \left(\frac{d^2 v}{dz^2} - x_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right) &= -\frac{d^2}{dz^2} \left(M_x + M_y \varphi - M_z \frac{du}{dz} \right) \\
 EI_{\omega} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr_s^2 - GK) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P \left(y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} - x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} \right) &= -M_x \frac{d^2 u}{dz^2} - M_y \frac{d^2 v}{dz^2} + m_z + \{w_x(x_0 - d_x) \\
 &+ w_y(y_0 - d_y)\} \varphi \\
 &+ \beta_x \frac{d}{dz} \left(M_x \frac{d\varphi}{dz} \right) - \beta_y \frac{d}{dz} \left(M_y \frac{d\varphi}{dz} \right)
 \end{aligned}$$

(144)

さて(144)式の一般解は第III講(102), (103)式より直ちにつぎのように求められる。

(a) 非相似境界条件の場合

両端回転端 (P/P)、固定回転端 (C/P) の場合のみを考察の対象にすれば

$$v_n(z) = \varphi_n(z)$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \lambda_n^4 a_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_n A_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_{mn} &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m (-y_0 B_{mn} + F_{mn}) = \mathfrak{A}_n \\
 - \sum_{m=1}^{\infty} a_m N_{mn} + \mu_n^4 b_n - \sum_{m=1}^{\infty} b_m H_{mn} &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{x_0 H_{mn} + M_{mn}\} = -\mathfrak{B}_n \\
 \sum_{m=1}^{\infty} a_m (-y_0 Q_{mn} + F_{nm}) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (x_0 H_{mn} + M_{nm}) &+ \nu_n^4 c_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{-r_s^2 A_{mn} + GK A_{mn} \\
 &- (x_0 - d_x) X_{mn} - (y_0 - d_y) Y_{mn} \\
 &+ \beta_x Z_{mn} - \beta_y Z'_{mn}\} = \mathfrak{C}_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \nu_n^4 c_n + \sum_{m=1}^{\infty} \{-r_s^2 H_{mn} + GK A_{mn} \\
 &- (x_0 - d_x) X_{mn} - (y_0 - d_y) Y_{mn} \\
 &+ \beta_x Z_{mn} - \beta_y Z'_{mn}\} = \mathfrak{C}_n
 \end{aligned}$$

(145)

(b) 相似境界条件の場合

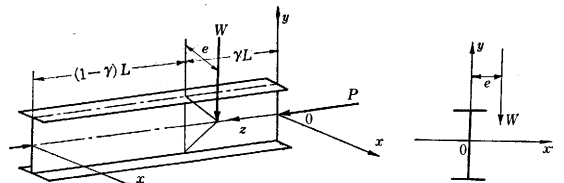
$$\begin{aligned}
 \lambda_n^4 a_n - \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_{mn} &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m (-y_0 A_{mn} + F_{mn}) = \mathfrak{A}_n \\
 \sum_{m=1}^{\infty} a_m G_{mn} + \mu_n^4 b_n - \sum_{m=1}^{\infty} b_m A_{mn} &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m (x_0 A_{mn} + M_{mn}) = -\mathfrak{B}_n \\
 \sum_{m=1}^{\infty} a_m (-y_0 A_{mn} + F_{nm}) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (x_0 A_{mn} + M_{nm}) &+ \nu_n^4 c_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{-r_s^2 A_{mn} + GK A_{mn} \\
 &- (x_0 - d_x) X_{mn} - (y_0 - d_y) Y_{mn} \\
 &+ \beta_x Z_{mn} - \beta_y Z'_{mn}\} = \mathfrak{C}_n
 \end{aligned}$$

(146)

(145)式あるいは(146)式を未知係数 a_n, b_n, c_n に関して逐次近似的に解いて、それらの値を(97)式に代入すれば梁柱の撓み (u, v) および捩り φ が決定されることは前と同様である。

20. 軸力と横荷重を受ける梁柱の曲げ捩りに関する簡単な問題

前節に述べた一般論の応用として、両端が単純支持されたI形梁が一つの偏心集中横荷重を受ける場合の変形について考えてみよう(第57図)。



第57図 I形梁の集中荷重による曲げ捩れ

この場合

$$\left. \begin{aligned} x_0=y_0=\beta_x=\beta_y=0, \quad w_x=0, \quad w_y=W\delta(z-\gamma L) \\ m_x=-eW\delta(z-\gamma L) \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

となるから (146) 式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n^2\pi^2 EI_{xx}}{L^2} - P\right) a_n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_{mn} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m F_{mn} = 0 \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} a_m G_{mn} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n^2\pi^2 EI_{yy}}{L^2} - P\right) b_n \\ & = -W\sqrt{\frac{2}{L}} \sin n\pi\gamma \\ & \sum_{m=1}^{\infty} a_m F_{nm} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n^2\pi^2 EI_{\omega}}{L^2} + GK - r_s^2 P\right) c_n \\ & + Wd_y \sin n\pi\gamma \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin m\pi\gamma \\ & = M_T \sqrt{\frac{2}{L}} \sin n\pi\gamma \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

ここに $M_T = -eW$

$$G_{mn} = \begin{cases} \left(\frac{m\pi}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left[\frac{M_T(1-\gamma)}{(m-n)\pi} (1 - \cos(m-n)\pi) \right. \\ \left. + \frac{M_T\gamma}{(m+n)\pi} (1 - \cos(m+n)\pi) \right] (m \neq n) \\ - \frac{M_T}{2n\pi} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 (1 - \cos 2n\pi\gamma) (m=n) \end{cases}$$

$$F_{mn} = \begin{cases} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{WL}{\pi^2}\right) \left[\frac{\cos(m-n)\pi\gamma}{(m-n)^2} \right. \\ \left. - \frac{\cos(m+n)\pi\gamma}{(m+n)^2} \right] (m \neq n) \\ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{WL}{\pi^2}\right) \left\{ \frac{1}{4n^2\pi^2} (\cos 2n\pi\gamma - 1) \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{2} (1-\gamma) \right\} (m=n) \end{cases}$$

である。

(148) 式は線形の連立一次方程式であるが無限次元であって、その解法は逐次近似によらねばならない。すなわち軸力 P と集中横荷重 W を受ける梁柱の曲げ振り変形を一步有限変位理論に踏み込んだ立場で解析しようとするとならぬことながら曲げ変形と振り変形とは互いに連成していることを示している。今荷重が余り大きくなくその変形も小さい場合を考えてみると微小変位の立場に戻るわけであって、曲げと振りの相関性を無視することができる。すなわち (148) 式において G_{mn} , F_{mn} は他の項に比較して無視できるものとする (148) 式の連立性はとけてその第 2, 第 3 式より

$$b_n = - \frac{\sqrt{\frac{2}{L}} W \sin n\pi\gamma}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n^2\pi^2 EI_{yy}}{L^2} - P\right)} \quad (149)$$

$$c_n = \frac{\sqrt{\frac{2}{L}} M_T \sin n\pi\gamma}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(GK + \frac{n^2\pi^2 EI_{\omega}}{L^2} - r_s^2 P\right)}$$

ただし

$$d_y = 0 \text{ とする.}$$

を得る。

したがって

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2WL \sin n\pi\gamma}{n^2\pi^2 \left(\frac{n^2\pi^2 EI_{yy}}{L^2} - P\right)} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \varphi(x) &= \frac{2M_T L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\gamma}{n^2 \left(GK + \frac{n^2\pi^2 EI_{\omega}}{L^2} - r_s^2 P\right)} \\ & \quad \times \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

となる。(150) 式をつぎの公式を用いて変換すれば最終的に (152) 式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - k^2} &= \frac{1}{2k^2} - \frac{\pi \cos k(x+\pi)}{2k \sin k\pi} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} &= -\frac{1}{4} \left\{ (x+\pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right\} \quad (-2\pi \leq x \leq 0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - k^2} &= \frac{1}{2k^2} - \frac{\pi \cos k(x-\pi)}{2k \sin k\pi} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} &= -\frac{1}{4} \left\{ (x-\pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right\} \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{W}{P} \cdot \frac{\sin k(1-\gamma)L \sin kz}{\sin kL} - \frac{W(1-\gamma)z}{P} \\ (0 \leq z/L \leq \gamma) \\ -\frac{W}{P} \cdot \frac{\sin k\gamma L \sin k(L-z)}{\sin kL} + \frac{\gamma W}{P} (L-z) \\ (\gamma \leq z/L \leq 1) \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda(1-\gamma)L \sinh \lambda z}{\sinh \lambda L} + M_T(1-\gamma)z \\ (0 \leq z/L \leq \gamma) \\ \frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda\gamma L \sinh \lambda(L-z)}{\sinh \lambda L} \\ + \gamma M_T(L-z) \quad (\gamma \leq z/L \leq 1) \end{cases} \quad (153)$$

ここに

$$k^2 = \frac{P}{EI_{yy}}, \quad \lambda^2 = \frac{GK - Pr_s^2}{EI_{\omega}}$$

(153) 式は Timoshenko が求めた解と一致している^{5), 7)}。

21. 軸圧縮力と横荷重を受ける梁柱の安定

本節では軸圧縮力 P と横荷重 w_x, w_y を受ける梁柱の安定問題を各種境界条件の場合について解き、その特有方程式の第一近似式を求める。つぎにその代表的な場合について横荷重と軸力の相関性を検討することにする。

さて軸圧縮力 P と横荷重 w_x, w_y による梁柱の曲げ振り座屈特有方程式の第一近似は (145) 式および (146) 式よりつぎのように求められる。

(c) 非相似境界条件の場合

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^4 + A_{11} & G_{11} & -y_0 B_{11} + F_{11} \\ -N_{11} & \mu_1^4 - H_{11} & x_0 H_{11} + M_{11} \\ -y_0 B_{11} + F_{11} & x_0 H_{11} + M_{11} & \nu_1^4 + GK A_{11} - r_s^2 H_{11} \\ & & -(x_0 - d_x) X_{11} - (y_0 - d_y) Y_{11} + \beta_x Z_{11} - \beta_y Z'_{11} \end{vmatrix} = 0 \quad (154)$$

(d) 相似境界条件の場合

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^4 - A_{11} & G_{11} & -y_0 A_{11} + F_{11} \\ -G_{11} & \mu_1^4 - A_{11} & x_0 A_{11} + M_{11} \\ -y_0 A_{11} + F_{11} & x_0 A_{11} + M_{11} & \nu_1^4 + GK A_{11} - r_s^2 A_{11} \\ & & -(x_0 - d_x) X_{11} - (y_0 - d_y) Y_{11} + \beta_x Z_{11} - \beta_y Z'_{11} \end{vmatrix} = 0 \quad (155)$$

(155) 式を用いて両端支持梁の場合の特有方程式の第一近似式を求めてみるとつぎのようになる。

(i) 集中荷重の場合

$$\begin{vmatrix} P_x - P & -\frac{M_T}{2L}(1 - \cos 2\pi\gamma) & -y_0 P + W_y L \Psi \\ \frac{M_T}{2L}(1 - \cos 2\pi\gamma) & P_y - P & x_0 P - W_x L \Psi \\ -y_0 P + W_y L \Psi & x_0 P - W_x L \Psi & r_s^2 (P_T^{(1)} - P) - \frac{2L}{\pi^2} \sin^2(\pi r) \{W_x(x_0 - d_x) + W_y(y_0 - d_y)\} + (\beta_x W_y + \beta_y W_x) \Psi \end{vmatrix} = 0 \quad (156)$$

(ii) 一様分布荷重の場合

$$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -y_0 P - \frac{w_y L^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2}\right) \\ 0 & P_y - P & x_0 P + \frac{w_x L^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2}\right) \\ -y_0 P - \frac{w_y L^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2}\right) & x_0 P + \frac{w_x L^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2}\right) & r_s^2 (P_T^{(1)} - P) - \frac{L^2}{\pi^2} \{w_x(x_0 - d_x) + w_y(y_0 - d_y)\} + (\beta_x w_y + \beta_y w_x) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (157)$$

ここに

$$\Psi = \frac{1}{4\pi^2} (\cos 2\pi\gamma - 1) - \frac{1}{2} \gamma (1 - \gamma)$$

であり、 (W_x, W_y) および (w_x, w_y) は集中荷重 W および分布荷重 w の x, y 方向の分力をそれぞれ表わしている。いずれの場合も軸力 P に関して三次、横荷重 w に関しては二次の方程式であって P, w_x, w_y を変数とすれば一つの曲面を画くことになるが、これらの曲面の性質は前号において論じた $P-M_x-M_y$ 曲面と同じで

あって、そこで述べたことがらは、そのままここでも成立する。つぎの第 18 表には一様分布荷重 w_x および w_y と軸圧縮力 P を受ける梁柱の座屈特有方程式の第一近似を六種の境界条件の場合について求めてある。以上においては横荷重 w_x および w_y が同時に梁柱に働く場合を考えたが、そのうち一方が零になる場合、たとえば $w_x=0$ の場合の座屈特有方程式はこの表で $w_x=0$ といった方程式と一般にはならない。すなわちこのような場合でも $x_0 \neq 0$ であれば軸力 P の存在する限り、起こり得る座屈は三重連成となるが、 $x_0=0$ の場合には x 軸周りの Euler 座屈と純振り座屈とが連成した横倒れ座屈

と y 軸周りの Euler 座屈との二つに方程式が分離する。そして横倒れ座屈荷重の方が P と w_y の組合せいかんによっては y 軸周りの Euler 座屈荷重よりも低くなることもあり、そのような場合梁に生ずる曲げモーメント M_x は軸力 P の函数であり、また撓み v の境界条件にも関係してくる。したがって w_y が単独で働く場合の静定曲げモーメントをとって座屈特有方程式を作ることができなくなる。これは十分注意すべき問題で次節で横荷重 w_y が単独で働く場合の梁の横倒れ座屈を取り扱

第 18 表 横荷重と軸力を受ける梁の座屈特有方程式 (第一近似)

境界の相似性	境界条件	座 屈 特 有 方 程 式			
相 似 境 界	S/S	$P_x - P$ 0 $-y_0 P - \frac{w_y L}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \right)$	0 $P_y - P$ $x_0 P + \frac{w_x L^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \right)$	$-y_0 P - \frac{w_y L^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \right)$ $x_0 P + \frac{w_x L^2}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \right)$ $r_0^2 (P_T - P) - \frac{L^2}{\pi^2} \{ w_x (x_0 - d_x) + w_y (y_0 - d_y) \} + (\beta_x w_y + \beta_y w_x) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \right) L^2$	= 0
	C/S	$P_x - P$ 0 $-y_0 P - 0.1118 w_y L^2$	0 $P_y - P$ $x_0 P + 0.1118 w_x L^2$	$-y_0 P - 0.1118 w_y L^2$ $x_0 P + 0.1118 w_x L^2$ $r_0^2 (P_T - P) - 0.0869 \{ w_x (x_0 - d_x) + w_y (y_0 - d_y) \} L^2 + 0.683 (\beta_x w_y + \beta_y w_x)$	= 0
	C/C	$P_x - P$ 0 $-y_0 P - 0.1260 w_y L^2$	0 $P_y - P$ $x_0 P + 0.1260 w_x L^2$	$-y_0 P - 0.1260 w_y L^2$ $x_0 P + 0.1260 w_x L^2$ $r_0^2 (P_T - P) - 0.0813 \{ w_x (x_0 - d_x) + w_y (y_0 - d_y) \} L^2 + 0.0853 (\beta_x w_y + \beta_y w_x) L^2$	= 0
	C/F	$P_x - P$ 0 $-y_0 P - 0.0263 w_y L^2$	0 $P_y - P$ $x_0 P + 0.0263 w_x L^2$	$-y_0 P - 0.0263 w_y L^2$ $x_0 P + 0.0263 w_x L^2$ $r_0^2 (P_T - P) - 0.2156 L^2 \{ w_x (x_0 - d_x) + w_y (y_0 - d_y) \} + 0.0813 L^2 (\beta_x w_y + \beta_y w_x) L^2$	= 0
非 相 似 境 界	P/P	$P_x - P$ 0 $-y_0 P - 0.0885 w_y L^2$	0 $P_y - P$ $x_0 P + 0.1260 w_x L^2$	$-y_0 P - 0.1103 w_y L^2$ $x_0 P + 0.1260 w_x L^2$ $r_0^2 (P_T - P) - 0.0813 \{ w_x (x_0 - d_x) + w_y (y_0 - d_y) \} L^2 + 0.0853 (\beta_x w_y + \beta_y w_x) L^2$	= 0
	C/P	$P_x - P$ 0 $-y_0 P - 0.0992 w_y L^2$	0 $P_y - P$ $x_0 P + 0.1260 w_x L^2$	$-y_0 P - 0.1062 w_y L^2$ $x_0 P + 0.1260 w_x L^2$ $r_0^2 (P_T - P) - 0.0813 \{ w_x (x_0 - d_x) + w_y (y_0 - d_y) \} L^2 + 0.0853 (\beta_x w_y + \beta_y w_x) L^2$	= 0

うがこの点を考慮して計算してある。

22. 横荷重のみを受ける梁の横倒れ座屈

梁が横荷重だけを受けて横倒れ座屈を起こす場合について、座屈荷重を求めてその精度について検討してみよう。

問題を簡単にするため断面は二軸対称断面、すなわち $x_0=y_0=\beta_x=\beta_y=0$ であり、荷重は図心軸に沿って働くものとして座屈荷重を求めることにする。座屈方程式の第一近似式は一般につきの二次方程式；

$$\begin{vmatrix} \mu_{11}^4 - H_{11} & x_0 H_{11} + M_{11} \\ x_0 H_{11} + M_{11} & \nu_1^4 + GK A_{11} \end{vmatrix} = 0 \quad (158)$$

で与えられる。両端支持梁の場合について一様分布荷重と梁の中央において作用する集中荷重による横倒れ座屈荷重 w_{cr} を上の方程式を用いて計算してみると、つぎのようになる。

(i) 一様分布荷重の場合

$$w_{cr} L^3 = \left(\frac{\pi}{12 + \frac{1}{4\pi^2}} \right) \sqrt{EI_{yy} \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \right)} \quad (159)$$

() 内の値=28.91 (精密解 28.3)

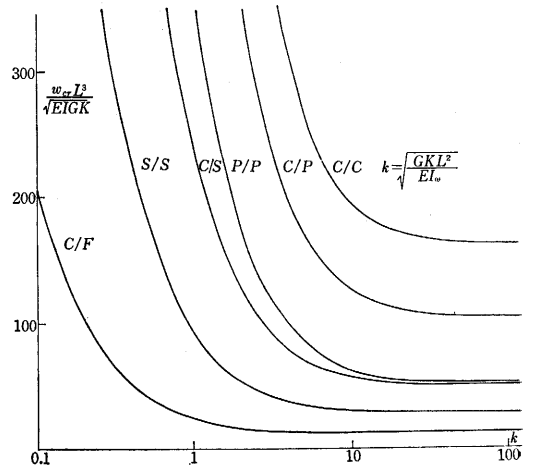
(ii) 中央集中荷重の場合

$$W_{cr} L^2 = \left(\frac{\pi}{8 + \frac{1}{2\pi^2}} \right) \sqrt{EI_{yy} \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \right)} \quad (160)$$

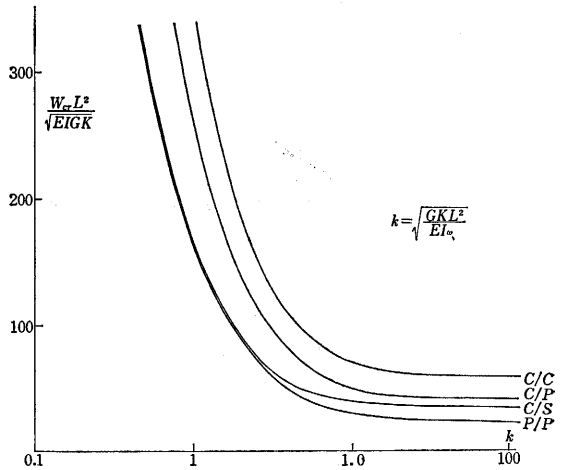
() 内の値=17.88 (精密解 16.93)

これらの例題の場合には第一近似でも誤差数パーセントという精度のよい解が得られたわけであるが、多くの場合第二近似まで進めば実用上差し支えないくらいの精度の解が得られる。一般に解の精度は $k^2 = GK L^2 / EI_o$ によって変化し k の値の小さいところでは第一近似でも十分正確であるが、 k が大きくなるにつれて誤差が、しだいに増大し $k \rightarrow \infty$, すなわち $EI_o = 0$ の場合にはかなりの誤差が生ずる。

片持梁の場合には特にこの誤差の変動が大きく、自由振動の場合は、それほどでもないが、ここで述べた横倒れ座屈等の場合には相当近似を高めなければ精密な座屈荷重が求められないことがある。その原因は $EI_o = 0$ の場合振りに対する基礎方程式が四階から二階の微分方程式にさがるため、このような場合にも一般解を適用すると断面の回転角 $\varphi(x)$ を梁の撓みの正規固有函数系で展開しているの、基礎方程式も境界条件も十分には満足できなくなるからである。幸いにも片持梁や両端支持梁の場合は静定であるから前号で述べたような高精度解法が適用できる。そこで次節にこれらの梁の横荷重による横倒れ座屈について高精度解法を用いて研究した結果について述べることにするが、その前に五種の場合について行なった横倒れ座屈荷重の数値計算の結果を第58, 59 図に示しておく。



第 58 図 一様分布横荷重を受ける梁の横倒れ座屈



第 59 図 中央集中荷重を受ける梁の横倒れ座屈

23. 両端支持梁および片持梁の横倒れ座屈に対する高精度解法

まず梁の平衡方程式を示せばつぎのとおりである。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} &= -M_x \varphi + M_y - M_z \frac{du}{dz} \\ EI_{yy} \frac{d^2 v}{dz^2} &= -M_x - M_y \varphi + M_z \frac{dv}{dz} \\ EI_o \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -M_x \frac{d^2 u}{dz^2} - M_y \frac{d^2 v}{dz^2} + m_z + \\ &\{w_x(x_0 - d_x) + w_y(y_0 - d_y)\} \varphi + \beta_x \frac{d}{dz} \left(M_x \frac{d\varphi}{dz} \right) \\ &- \beta_y \frac{d}{dz} \left(M_y \frac{d\varphi}{dz} \right) \end{aligned} \right\}$$

ここに

$$m_z = - \frac{dM_z}{dz} = w_x(d_y - y_0) - w_y(d_x - x_0)$$

(161)

今 $M_x=0$ したがって $m_x=0$ の場合について考えると (161) 式はつぎの φ に関する一つの微分方程式と同等になる。

$$EI_o \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \left(\frac{M_x^2}{EI_{xx}} + \frac{M_y^2}{EI_{yy}} \right) \varphi + \frac{M_x M_y}{E} \left(\frac{1}{I_{yy}} - \frac{1}{I_{xx}} \right) + \{w_x(x_0 - d_x) + w_y(y_0 - d_y)\} \varphi + \beta_x \frac{d}{dx} \left(M_x \frac{d\varphi}{dx} \right) - \beta_y \frac{d}{dx} \left(M_y \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (162)$$

(162) 式より直ちに $I_{xx} \neq I_{yy}$ ならば w_x, w_y が同時に働く場合には梁は荷重がかかると同時に捩り変形を起こし、座屈現象は見られないが、もし $I_{xx} = I_{yy}$ であるか、 w_x または w_y のいずれかが零であれば梁の横倒れ座屈が起こることがわかる。そこで前号で述べた方法でこの方程式を解けば

$$\nu_n^4 c_n = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left[\frac{II_{mm}}{EI_{xx}} + \frac{Q_{mm}}{EI_{yy}} - (x_0 - d_x) X_{mn} - (y_0 - d_y) Y_{mn} + \beta_x Z'_{mn} - \beta_y Z'_{mn} + GK A_{mn} \right] + \left(\frac{1}{EI_{yy}} - \frac{1}{EI_{xx}} \right) \vartheta_n \quad (163)$$

$$\text{ここに } \vartheta_n = \int_0^L M_x M_y \varphi_n(x) dx$$

が得られ、座屈特有方程式の第一近似式は次式で与えられることになる。

$$\frac{II_{11}}{EI_{xx}} + \frac{Q_{11}}{EI_{yy}} - (x_0 - d_x) X_{11} - (y_0 - d_y) Y_{11} + \beta_x Z_{11} - \beta_y Z'_{11} = GK A_{11} + \left(\frac{\gamma_1}{L} \right)^4 EI_o \quad (164)$$

(164) 式を用いて両端支持梁の場合について、一様分布荷重および集中荷重による横倒れ座屈荷重を計算してみるとつぎのようになる。

(i) 一様分布荷重の場合

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{15} + \frac{3}{\pi^4} \right) \left[\frac{w_y^2 L^4}{EI_{xx}} + \frac{w_x^2 L^4}{EI_{yy}} \right] + w_x(x_0 - d_x) + w_y(y_0 - d_y) + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) (\beta_x w_y + \beta_y w_x) = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \right) \quad (165)$$

(ii) 集中荷重の場合

$$\frac{s W_x^2 L^2}{EI_{yy}} + \frac{t W_y^2 L^2}{EI_{xx}} + \frac{2 W_y}{L} (x_0 - d_x) \sin^2(\pi \gamma) + \frac{2 W_x}{L} (y_0 - d_y) \sin^2(\pi \delta) + p \beta_x \left(\frac{W_y}{L} \right) + q \beta_y \left(\frac{W_x}{L} \right) = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(GK + \frac{\pi EI_o}{L^2} \right) \quad (166)$$

ここに

$$s = \frac{1}{3} \gamma^2 (1 - \gamma)^2 - \frac{\gamma(1 - \gamma)}{2\pi^2} \cos 2\pi \gamma$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} (1 - 2\gamma) \sin 2\pi \gamma$$

$$t = \frac{1}{3} \delta^2 (1 - \delta)^2 - \frac{\delta(1 - \delta)}{2\pi^2} \cos 2\pi \delta$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} (1 - 2\delta) \sin 2\pi \delta$$

$\gamma L, \delta L$ はそれぞれ W_y, W_x の作用点の座標を表わす。

また

$$p = \pi^2 \left[\frac{1}{2} \gamma (1 - \gamma) + \frac{1}{4\pi^2} (\cos 2\pi \gamma - 1) \right]$$

$$q = \pi^2 \left[\frac{1}{2} \delta (1 - \delta) + \frac{1}{4\pi^2} (\cos 2\pi \delta - 1) \right]$$

これらの式を用いて w_x が単独で作用する場合の横倒れ座屈荷重を求めてみるとつぎのようになる。

(i) 一様分布荷重の場合

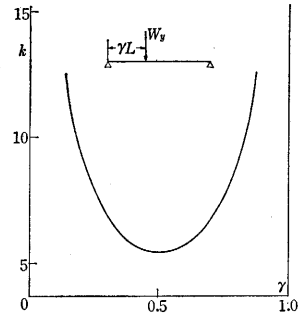
$$w_{cr} L^3 = 28.26 \sqrt{EI_{yy} \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \right)} \quad (\text{精密解 } 28.3) \quad (167)$$

(ii) 中央集中荷重の場合

$$W_{cr} L^2 = 17.16 \sqrt{EI_{yy} \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \right)} \quad (\text{精密解 } 16.93) \quad (168)$$

ただし断面は二軸対称断面で荷重は断面の図心を通って作用するものとする。

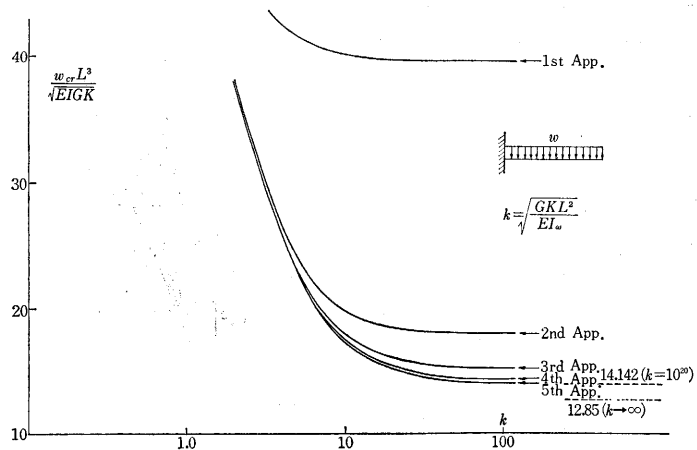
以上のように高精度解法によれば両端支持梁の場合には第一近似で実用上十分であることがわかるであろう。そこでこの集中荷重の場合について座屈荷重の作用点と座屈荷重との関係を調べてみると第 60 図のようなグラフ



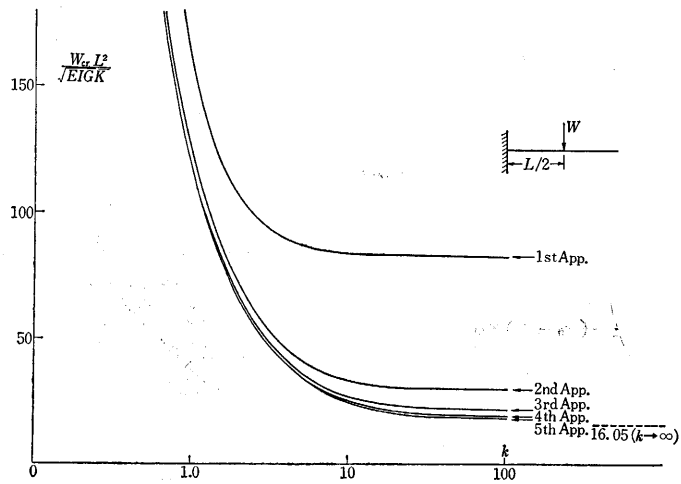
第 60 図 集中荷重を受ける単純支持梁の横倒れ座屈

$$k = \frac{W_y L^2}{\pi \sqrt{EI_{xx} \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \right)}}$$

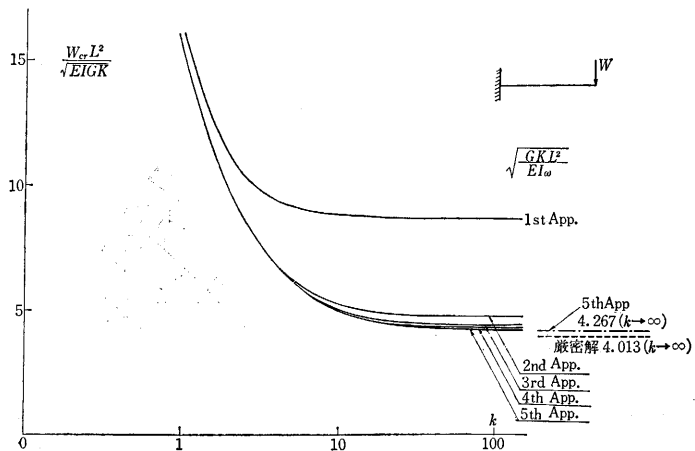
が得られる。ここで注意しておきたいことは、これまで横荷重の作用点が断面の剪断中心に一致している場合のみについて論じてきたことである。荷重の作用点が剪断中心に一致しない場合には (165) 式、(166) 式からわかるように座屈荷重は作用点と剪断中心の相対的距離に



第 61 図 一様分布荷重を受ける片持梁の横倒れ座屈



第 62 図 集中荷重による片持梁の横倒れ座屈 ($\gamma=0.5$)



第 63 図 集中荷重を受ける片持梁の横倒れ座屈 ($\gamma=1.0$)

よって相当大きく変化する。Timoshenko²⁵⁾ や Bleich⁷⁾ の教科書には I 形梁の場合について荷重点が上側フランジ，図心，下側フランジの三つの場合について計算した座屈荷重の数値表が与えられている（これと同じようなことが断面の非対称性，すなわち， β_x, β_y についてもいえる）。さて片持梁の場合も両端支持梁の場合とまったく同様にして w_x と w_y 相関曲線の方程式を求めることができるわけであるが，計算の精度は両端支持梁の場合に比較してよくない。

第 61, 62, 63 図は一様分布荷重，中央集中荷重，先端集中荷重の三種の場合につき，二軸対称断面片持梁の横倒れ座屈荷重を荷重の作用点が図心を通るものとして計算した結果をグラフに示したものである。その結果によると k の十分小さな所では第一近似でも十分正確であるが， k が 10 以上になると精度が著しく悪くなり， $k \rightarrow \infty$ では第五近似くらいまで進んでも，矩形断面梁の場合に L. Prandtl が求めた精密解に収れんしないで，一様分布荷重の場合にはなお約 10% の誤差をもっている。その原因は前節の終わりに述べたのと同じ理由によるものと思われる。すなわち $EI_0=0$ の場合には (162) 式

の左辺の第一項が無くなるので， $\varphi(z)$ をつぎのように展開して解を求めれば精密解が容易に求められるものと思われる。

$$\varphi(z) = \sum_{n=1, 3.5, \dots}^{\infty} c_n \varphi_n(z), \quad \varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi z}{L}$$

24. むすび

以上において軸圧縮力と横荷重を受ける薄肉開断面材の曲げ振り変形および安定の問題について，その基礎方程式と一般解を導き，その相関性について論じ，ついで横荷重のみを受ける場合の横倒れ座屈について言及した。

そして静定梁の場合に対する高精度解法についても触れておいた。次号においてこれまでに述べてきた一般論の工学的応用として，補強板の座屈，吊り橋の曲げ振り振動や翼形構造の空気力学的安定等について概説する予定である。

(1965 年 2 月 16 日受理)

参考文献

25) S. Timoshenko & J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability" McGraw-Hill Book Co. Ltd. (1961)

正 誤 表 (3 月号)

ページ	段	行	種 別	正	誤
表 3	右		筆者紹介	妹尾 学 助手 理博 鈴木 喬 大学院学生	鈴木 喬 助手 理博 妹尾 学 大学院学生

次 号 予 告

(5 月号)

研 究 解 説

材料の表面と疲れ (1) 北 川 英 夫

棒の縦衝撃の塑性波の伝播 (2) 山 田 嘉 昭

薄肉開断面材の弾性力学 (VII) 川 井 忠 彦

研 究 速 報

5 孔ピート管における圧縮性の影響について 北 野 正 夫