

棒の縦衝撃と塑性波の伝ば (1)

山田 嘉 昭

棒に衝撃荷重を与える場合、衝撃速度がある値を越えると、弾性波のほかに塑性波を生ずる。本稿では、棒内を伝ばし、反射と干渉を繰り返す弾塑性波の基本的な取扱いを述べ、さらに実在の弾塑性体を剛塑性体で近似した場合について、波の伝ばと解の適用限界を考察する。日常よく行なわれている衝撃引張りおよび圧縮試験における問題点を指摘し、合理的な試験法のありかたを示すことも一つの目的である。

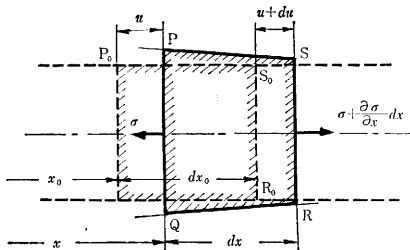
まえがき

最近において、高速試験および高速加工が、各方面から注目を集めている。筆者の研究室でも、数年前から高速試験機の試作に着手し、最初に完成した I 型では、主として深絞り加工における速度効果を研究した¹⁾。次いで高速試験機 II 型を試作し²⁾、現在、各種の試験を計画中である。

本稿は、実験に先だち、棒の縦衝撃における塑性波の伝ばの理論をまとめたものである。既存の理論の体系を述べた程度にすぎないが、Taylor 理論の若干の修正、落下引張試験の解など、新しい結果も含まれている。2 回にわけて記述し、今回はおもに基礎となる理論を取り扱う。

1. 基礎の式

棒の軸を x に選び、第 1 図に示す棒の要素 PQRS を



第 1 図 棒の要素に作用する力

考えると、横方向の変形の影響を無視して、次の運動の式を得る³⁾。

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial(\sigma A)}{\partial x}, \quad (1)$$

ただし ρ と A は変形後の密度と断面積、 u は変位、 t は時間、 σ は真応力、 x は変形後の座標すなわちオイラー一流の座標である。

変形前の諸量に添字 0 をつけ、棒の要素の公称縦ひずみを e 、公称応力を s とすれば、

質量保存則

$$\rho A dx = \rho_0 A_0 dx_0, \quad dx = (1+e) dx_0, \quad (2)$$

真応力と公称応力の定義により

$$\sigma A = s A_0. \quad (3)$$

上の関係を用いると (1) 式は

$$\rho_0 A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial(s A_0)}{\partial x_0}, \quad (4)$$

棒の最初の断面積を一樣とすれば、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial s}{\partial x_0} = \frac{\partial s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial x_0}, \quad e = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad (5)$$

$$\text{または} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\partial s}{\partial e} / \rho_0}. \quad (6)$$

x_0 は変形前すなわちラグランジュ流の座標、 c_0 はこの座標における波の伝ば速度である。弾性論では、 $\partial s / \partial e$ は弾性係数 E をあらわし、

$$c_0 = \sqrt{E / \rho_0}, \quad \frac{\partial s}{\partial e} = E. \quad (7)$$

以下簡単のため、添字 0 を省略し、式を記述する場合のあることを付記する。

2. 基礎式の特性曲線による表示

添字 0 を省略して、公称ひずみ e および物体要素の速度 v (particle velocity) は次の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v \quad (8)$$

で定義される。(8) 式を用いると、元の 2 階偏微分方程式 (双曲線型) の (6) 式は

$$\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

と同等である。いま $x-t$ 面内に曲線 q を考えると、 q に沿って

$$\frac{de}{dq} = \left(\frac{\partial e}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial e}{\partial t} \right) \frac{dt}{dq},$$

$$\frac{dv}{dq} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{dt}{dq},$$

ゆえに

$$\frac{dv}{de} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial e}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial e}{\partial t}} \quad (10)$$

の関係が成立する。ここで

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = c, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 = -c, \quad (11)$$

$$\text{または} \quad \left(\frac{dt}{dx} \right)_1 = \frac{1}{c}, \quad \left(\frac{dt}{dx} \right)_2 = -\frac{1}{c}$$

とおき、(9) 式を用いると、(10) 式は

$$\left(\frac{dv}{de}\right)_1 = c, \quad \left(\frac{dv}{de}\right)_2 = -c. \quad (12)$$

(11) 式は、伝ば速度 c で、それぞれ右および左の方向に伝ばする波を示し、(12) 式は、おのおのの波の上で、要素の速度 v とひずみ e が満足すべき微分関係を与えている。(11) 式を特性曲線、(12) 式を特性方程式といい、元の偏微分方程式は、特性曲線に沿う微分関係に書きかえられたのである。

公称応力 s とひずみ e の間には

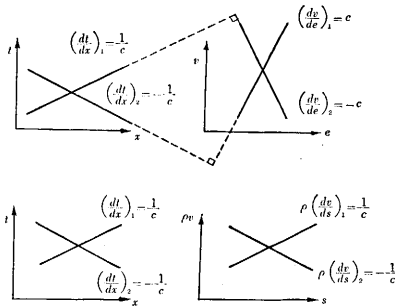
$$c^2 = \frac{\partial s}{\partial e} / \rho, \quad de = \frac{1}{\rho c^2} ds \quad (13)$$

の関係が成立するので、(12) 式は

$$\rho \left(\frac{dv}{ds}\right)_1 = \frac{1}{c}, \quad \rho \left(\frac{dv}{ds}\right)_2 = -\frac{1}{c} \quad (14)$$

と書きあらわすことができる。

第 2 図に示すように、 $x-t$ 面内の特性曲線にひいた接線と、 $e-v$ 面内の解曲線の接線は直交する。特性曲線と

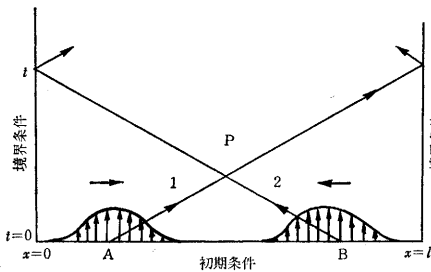


第 2 図 特線曲線と解曲線の直交性または平行性を示す図

$s-\rho v$ 面内の接線は平行である。 c が一定の場合、特性曲線と解の曲線は、いずれも直線で、(12) 式と (14) 式は次のように書きあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} v-ce = \text{一定}, \quad \rho cv - s = \text{一定}, \quad \frac{dx}{dt} = c \text{ 上}, \\ v+ce = \text{一定}, \quad \rho cv + s = \text{一定}, \quad \frac{dx}{dt} = -c \text{ 上}. \end{aligned} \right\} (15)$$

時刻 t における v, e, s (たとえば初期条件として時刻 $t=0$ における状態) を既知とし、 Δt ののちの状態を求めるには、(12) 式を次の差分式に書きかえる。すなわち第 3 図の AB 上で、すでに v, e, s の値が解っているも



第 3 図

のとして

$$v_P - v_A = c_1(e_P - e_A), \quad c_1 = \frac{1}{2}(c_A + c_P),$$

$$v_P - v_B = -c_2(e_P - e_B), \quad c_2 = \frac{1}{2}(c_B + c_P).$$

これを v_P と e_P について解けば

$$\left. \begin{aligned} v_P &= \frac{c_2 v_A + c_1 v_B + c_1 c_2 (e_B - e_A)}{c_1 + c_2}, \\ e_P &= \frac{c_1 e_A + c_2 e_B + (v_B - v_A)}{c_1 + c_2}. \end{aligned} \right\} (16)$$

とくに $c_1 = c_2 = c$, c が一定の場合

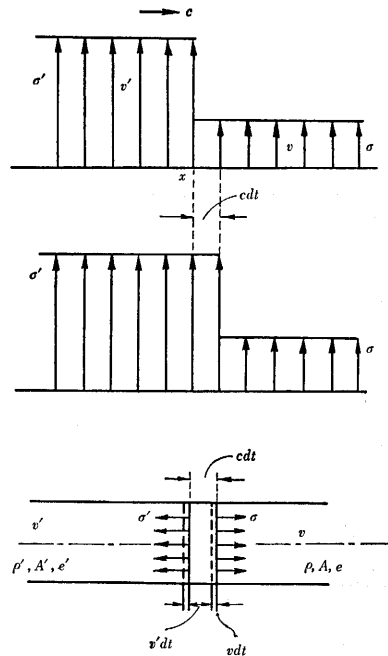
$$v_P = \frac{1}{2}(v_A + v_B) + \frac{c}{2}(e_B - e_A),$$

$$e_P = \frac{1}{2}(e_A + e_B) + \frac{1}{2c}(v_B - v_A). \quad (17)$$

波の伝ば速度が一定でない場合は、差分式の刻みを十分小さく選び、さらに (16) 式において $c_1 = c_A, c_2 = c_B$ として v_P と e_P の第 1 近似を求めてのち、公称応力-ひずみ図から e_P に対応する c_P の値を求め、必要な精度内に v_P と e_P が収束するまで、(16) 式による計算を繰り返さなければならない。以上の手続きで解を求め、波が棒の端面などの境界に達した場合は、境界条件を満足するように、問題を解く。境界では、一般に v, e, s に不連続を生ずるので、次の節で述べるウゴニオの式を基本にして考えると便利である。

3. ウゴニオ (Hugoniot) の式

前節の式は、棒内を伝ばする波の応力、ひずみ、粒子速度が連続な場合に成立する。不連続の存在するところ



第 4 図 不連続波頭における状態

では、運動量保存則から、次のような関係が導かれる。

応力 σ' 、粒子速度 v' の波が、速度 c で左から右に伝ばし、時刻 t にオイラーの座標 x に達したとする (第 4 図)。 x の前方は、 σ, v の状態にあると考え、 x の前後における断面積 A 、密度 ρ 、公称ひずみ e などもダッシュをつけて区別する。

時間 dt ののち、波は cdt の距離を進み、 $\rho A c dt$ で与えられる質量の運動量の変化を力積に等置すれば

$$\rho A c dt (v' - v) = (\sigma A - \sigma' A') dt. \quad (18)$$

棒の最初の断面積と密度を A_0 および ρ_0 、公称応力とひずみを s, e であらわせば

$$\left. \begin{aligned} \sigma' A' &= s' A_0, & \sigma A &= s A_0, \\ \rho A (1+e) &= \rho_0 A_0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

したがって (18) 式は

$$\frac{\rho_0}{1+e} c (v' - v) = s - s',$$

ところで、 c は e' の公称ひずみを持って伝ばする波、すなわち最初の長さの $(1+e')$ 倍の長さを持つ波の伝ば速度である。ゆえにラグランジュ座標における速度を c_0 とすれば

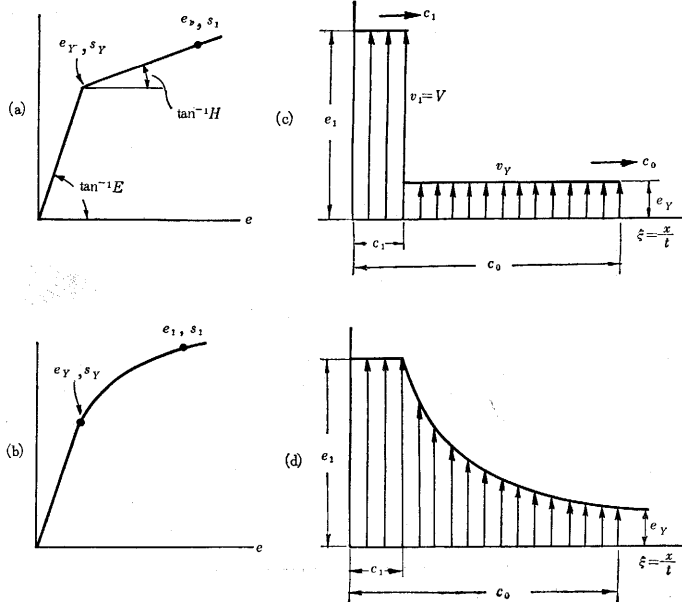
$$\rho_0 c_0 (v' - v) = s - s', \quad c_0 = \frac{c}{1+e}. \quad (20)$$

次に速度の不連続によるひずみの不連続な変化を考えると、 $c_0 dt$ の要素は、速度の変化 $v' - v$ により

$$\frac{(v' - v) dt}{c_0 dt} = -(e' - e), \quad v' - v = -c_0 (e' - e) \quad (21)$$

の公称ひずみの変化を受ける。ただし $v' - v$ が正值のとき、付加されるひずみ $e' - e$ は圧縮 (負値) であることに注意する。この関係を (20) 式と組み合わせると

$$c_0^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{s' - s}{e' - e}. \quad (22)$$



第 5 図 一端に速度 V の衝撃を受ける棒内の塑性波の伝ば

左から右に進む波についても同様の式が成立し、簡単のため、ラグランジュ座標をあらわす添字 0 を省略して書けば

$$\left. \begin{aligned} \rho c v' + s' &= \rho c v + s, & \text{右へ進む波頭上,} \\ \rho c v' - s' &= \rho c v - s, & \text{左へ進む波頭上,} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} v' + ce' &= v + ce, & \text{右へ進む波頭上,} \\ v' - ce' &= v - ce, & \text{左へ進む波頭上.} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(23), (24) 式をウゴニオの式という。

とくに波頭の前方が応力 0 の状態にあり、しかも弾性波のときは

$$\left. \begin{aligned} \rho c v' + s' &= 0, & v' + ce' &= 0, & \text{右へ進む波頭上,} \\ \rho c v' - s' &= 0, & v' - ce' &= 0, & \text{左へ進む波頭上.} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

応力 0 の棒内を伝ばしていく一般の連続な弾性波についても、伝ばする波を軸に沿って小さく分割して考えれば直ちにわかるように、不連続波頭におけると全く同様に、(25) 式を適用することができる。

4. 一端に定速度の衝撃を受ける棒^(1),5)

最初に、第 5 図 (a) に示す直線硬化材料の棒を考え、その一端に、定速度 V の衝撃が持続して加えられるものとする。この棒内では

$$c_0 = \sqrt{E/\rho}, \quad c_1 = \sqrt{H/\rho}, \quad c_0 > c \quad (26)$$

で与えられる二つの伝ば速度があり、ひずみまたは応力分布は、第 5 図の (c) のようである。

いま、二つの不連続波頭についてウゴニオの式を書けば sY と eY を降伏応力とひずみとして

$$\left. \begin{aligned} \rho c_1 V + s_1 &= \rho c_1 v_Y + s_Y, & \rho c_0 v_Y + s_Y &= 0, \\ V + c_1 e_1 &= v_Y + c_1 e_Y, & v_Y + c_0 e_Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(27) 式を解き、衝撃速度 V と塑性波頭の s_1, e_1 の関係を求めると、

$$V = v_T + \frac{s_T - s_1}{\rho c_1} = - \left(\frac{s_T}{\rho c_0} + \frac{s_1 - s_T}{\rho c_1} \right),$$

$$V = -[c_0 e_T + c_1(e_1 - e_T)] = -[(c_0 - c_1)e_T + c_1 e_1]. \quad (28)$$

すなわち第5図(c)のように、 $\xi = x/t$ 軸に対し、ひずみ e の分布を描いた図の面積が衝撃速度 V に等しいという条件から、衝撃端側におけるひずみ e_1 の値が定まる。

第5図(b)のように、硬化率がひずみの増加とともに連続的に減少する材料では、 c_0 の速度で進む弾性波頭に、連続的にひずみまたは応力が増加する塑性域がつづき、さらに衝撃端の近傍に、ひずみが一定値 e_1 の塑性域が存在する。 V と e_1 の関係は、(28) 式との類似から

$$V = - \int_0^{e_1} c de = - \int_0^{c_0} ed\xi, \quad \xi = \frac{x}{t}, \quad c = \sqrt{\frac{\partial s}{\partial e} / \rho}. \quad (29)$$

弾性限度、すなわち棒にちょうど塑性波が生ずるような衝撃速度を V_T とすれば

$$V_T = -c_0 e_T = -\frac{s_T}{\rho c_0}, \quad c_0 = \sqrt{E/\rho}. \quad (30)$$

鋼材では近似的に

$$V_T \left(\frac{m}{s} \right) \approx \frac{s_T}{4}, \quad s_T \left(\frac{kg}{mm^2} \right) \text{は降伏応力}. \quad (31)$$

以上の解の適用範囲は、波が棒の端に達するまでのところに限られ、有限長の棒では、棒端で波が反射し、それ以後に波の干渉が起こる。最初に、棒端が固定、材料が直線硬化の場合について、波の反射と干渉を考える。

第6図を参照し、弾性限度の波が棒の固定端に到達すると、塑性波(添字 T で示す)が反射される。ウゴニオの式を適用すれば、弾性波頭の v_T は

$$v_T = -c_0 e_T = -s_T / \rho c_0. \quad (32)$$

さらに c_1 の速度で反射された波の波頭において

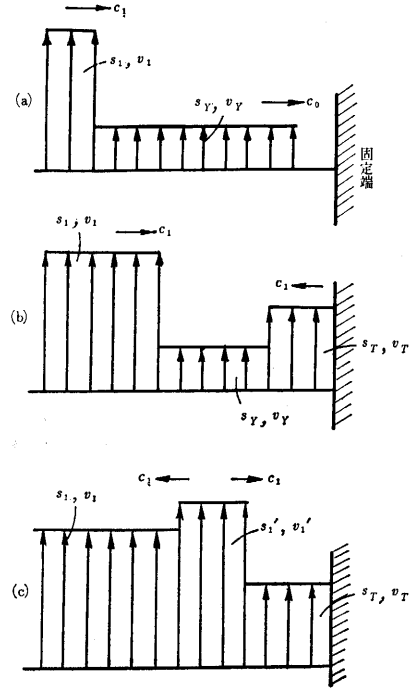
$$\left. \begin{aligned} \rho c_1 (v_T - v_T) &= s_T - s_T, \quad v_T = 0, \\ v_T - v_T &= c_1 (e_T - e_T). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

次に反射された応力 s_T の塑性波は、左から右に伝ばしてくる応力 s_1 の塑性波と干渉して

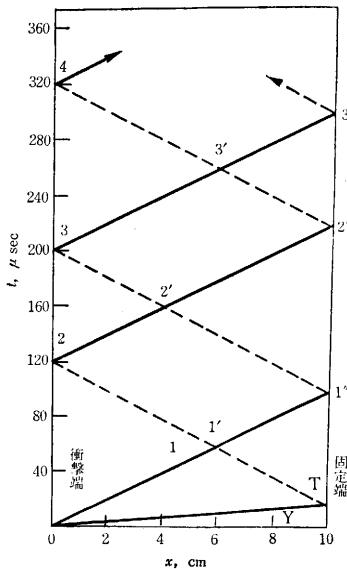
$$\left. \begin{aligned} \rho c_1 (v_1' - v_1) &= s_1' - s_1, \quad v_1' - v_1 = c_1 (e_1' - e_1), \\ \rho c_1 (v_T - v_1') &= -(s_T - s_1'), \quad v_T = 0, \\ v_T - v_1' &= -c_1 (e_T - e_1'), \quad v_1 = V. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ただし上の式の V は (28) 式で与えられる。

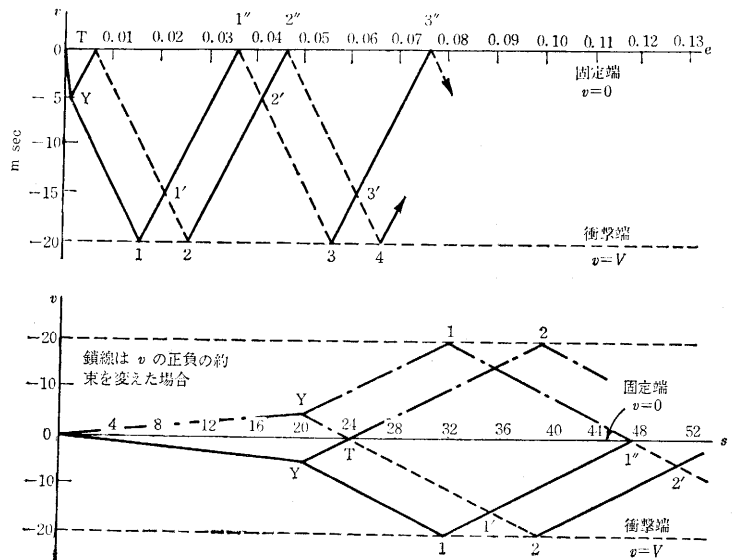
以上の諸式を、その後の波の反射と干渉も含め、 $x-t$ 面に描くと第7図の特性曲線が得られる。さらに e と v または s と v の関係を描くと、第8図のようで、たと



第6図 固定端における波の反射 (直線硬化材料)



第7図 一端固定の棒における波の反射と干渉 (特性曲線)



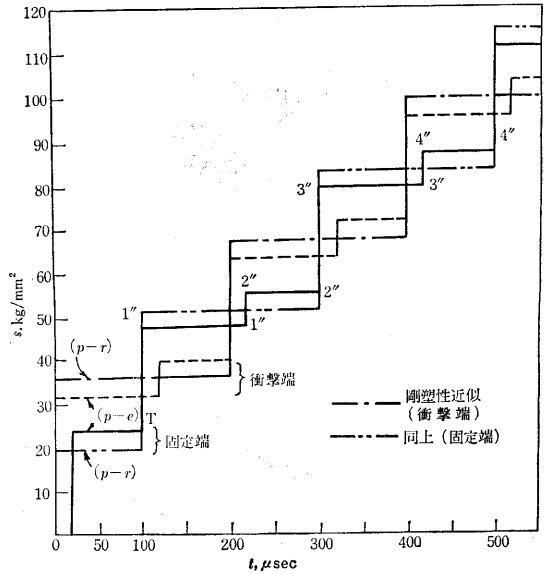
第8図 一端固定の棒における波の反射と干渉

えば (33) 式の関係は直線 TY, (34) 式は直線 11' と T1' で示される。こうしてたとえば (34) 式を解き, 1' における解を求めることは, 第 8 図の中で, 直線 11' と T1' の交点 1' を図式に求めることと同等である。衝撃端または固定端における刻々の状態は, 上で述べた直線と $v=V$ および $v=0$ の水平線の交点として与えられる。第 9 図の実線と点線は, 固定端と衝撃端における応力の時間的変化を上のようにして求め, 図示したものである。計算の基礎とした数値は, 棒の長さ 10 cm, 縦弾性係数 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, 降伏応力 $s_r=20 \text{ kg/mm}^2$ 塑性域における直線硬化の硬化率 $H=E/25$, 弾性波の伝ば速度 $c_0=5000 \text{ m/s}$, 塑性波の伝ば速度 $c=1000 \text{ m/s}$ 負荷は引張りで, $V=-20 \text{ m/s}$ である。同じ第 9 図に鎖線で示した結果は, 材料を剛塑性体, すなわち縦弾性係数 E を無限大とした極限の場合である⁶⁾。

一方において, 第 10 図(a) のようななめらかな加工硬化特性を持つ棒が定速度 V の負荷を受ける場合の特性曲線, および $v-s$ 面に表示した解は, 同じ図の (b), (c) のようである。硬化曲線はなめらかであるから, 最初に, 第 5 図の c_1 から弾性波頭の c_0 にいたる伝ば速度を持つ塑性波が発生する。衝撃速度 V と c_1 の関係は, すでに述べたように (29) 式で与えられる。

弾性波頭が固定端に達すると, この材料では, 同様に c_0 から c_T にいたる速度を持つ塑性波が反射される。証明は省略するが⁷⁾, 反射波の終端のひずみを, 第 11 図のように e_T とすれば

$$2V_T = -2c_0 e_T = -\int_0^{e_T} c de, \quad c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial e}\right)_T} / \rho. \quad (35)$$



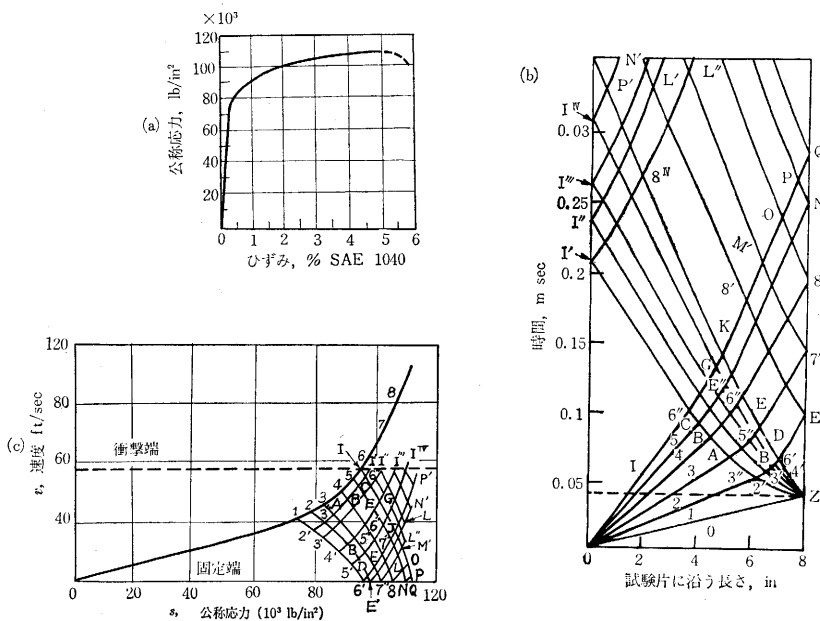
第 9 図 衝撃端および固定端における応力の時間的変化

ただし V_T は, (30) 式に示したように, 棒にちょうど塑性波が生ずるような衝撃の速度をあらわす。(29) 式と比較すればわかるように, $|V| \leq 2|V_T|$ のとき $|e_T| \geq |e|$ で, 固定端で反射される波のほうが絶対値が大きく, $|V| \geq 2|V_T|$ のとき $|e_1| \geq |e_T|$ である。

特別な場合として直線硬化の材料では, (35) 式から

$$e_T = \left(1 + \frac{c_0}{c_1}\right) e. \quad (36)$$

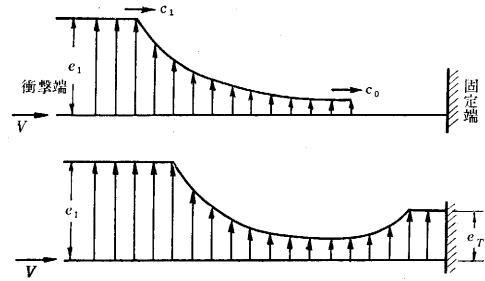
これはまた, (32) 式と (33) 式からも直ちに導かれる



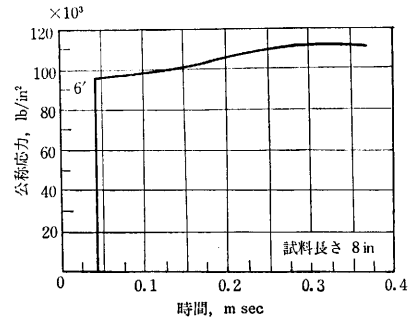
第 10 図 なめらかな加工硬化特性を持つ材料内の塑性波の反射と干渉

関係である。(36)式に示されているように、直線硬化の材料では、 e_r の弾性波頭が、 $(1+c_0/c_1)$ 倍の大きさで反射される。

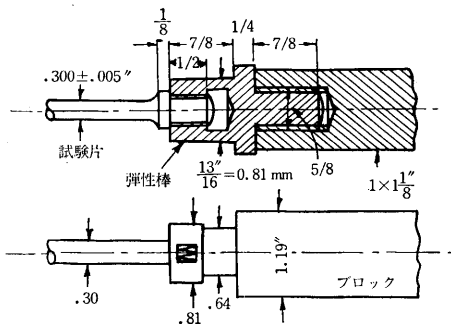
第10図の解において、固定端の応力の時間的変化は第12図のようである⁹⁾。ところが、完全に剛な固定端というものはありません、かりにあったとしても、そこでの応力を測定する手段はない。われわれは、たとえば第13図のように、試験片に弾性棒を結合し、ひずみゲージなどを貼って、応力を計測しているのである。第14図の右は、実在の材料の応力-ひずみ図を、二つの直線部分でおきかえ、第13図の弾性棒で検出されるべき応力をClarkとDuwezが理論解析した結果の例である。第14図の応力-時間図上に点線で示されているのは、一端が完全に剛に固定された場合である。弾性棒を接続したとき、弾性棒のひずみゲージで検出される応力は、棒端に弾性波頭が到達してのち、ゲージが有限の長さを持つので、ABのように上昇する。その後、本体ブロックから反射される波が重なり、検出記録される応力はC点の値まで増加する。さらに、弾性棒の試験片の側で反射された除荷の波によって、記録はD点まで下がり、ついに減衰して、E点に落ち付く。F点は、衝撃によって生じた塑性波頭の第1波が、弾性波のあとで、試験端に達した瞬間に対応している。



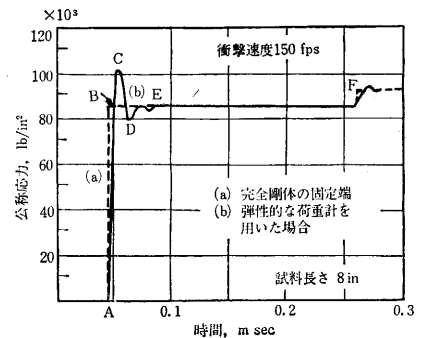
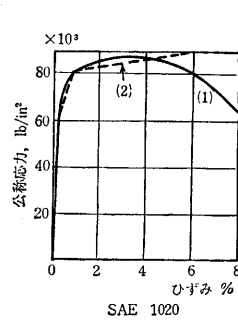
第11図 固定端における波の反射 (なめらかな硬化特性を持つ材料)



第12図 固定端における応力の時間的変化 (なめらかな硬化特性を持つ材料)



第13図 引張り衝撃応力測定方法の一例



第14図 試験端の弾性応力棒によって計測される応力、左の図は材料の加工硬化特性とその直線近似を示す

文 献

上で取り扱った一端固定の棒では、波の反射または干渉によって、つねに応力またはひずみが増加し、いわゆる負荷 (loading) のみを考えるだけでよいから、解析は比較的簡単である。それにもかかわらず、とくに引張試験では、弾性棒で得た記録から、材料の力学的特性について、必要な精度で、なんらかの情報 (たとえば高速下における加工硬化特性) を得ることは非常に困難といわなければならない。極言すれば、計測したデータが、なにをあらわしているか、全くわからないといつてよいのである。

(1965年1月12日受理)

- 1) 山田嘉昭, 輪竹千三郎: 塑性と加工, 4-28 (1963), 341.
- 2) 山田嘉昭, 輪竹千三郎: 第14回塑性加工連合講演会前刷 (1963), 127.
- 3) たとえば山田嘉昭: 塑性力学 (日刊工業新聞社, 1965), 177.
- 4) T. von Kármán & P. E. Duwez: J. Appl. Phys. 21 (1950), 987.
- 5) 作井誠太, 森勉: 機械学会誌, 65-517 (1962), 258.
- 6) K. Kawata: 東大航空研究所報告, 29-11, Report No. 389 (1964), 165.
- 7) 文献3の325ページ参照.
- 8) D. S. Clark & P. E. Duwez: J. Appl. Mech. 15-3 (1948), 243.