

東京大学大学院新領域創成科学研究科人間環境学専攻

博士論文（科学）

非圧縮拘束条件付き大規模有限要素解析
における反復法の前処理に関する研究

指導教員 久田俊明 教授

鈴木健二

Kenji Suzuki

目次

第 1 章 全体緒言	8
1.1 本研究の背景及び目的	8
1.2 既存の研究及びその考察	10
1.3 本論文の構成	14
1.4 本研究の特色	14
第 2 章 Navier-Stokes 方程式の有限要素法による離散化	16
2.1 流体のための連続体力学の基礎	16
2.1.1 物質時間導関数と空間時間導関数	16
2.1.2 Reynolds の輸送方程式	17
2.1.3 質量保存の原理	19
2.1.4 Cauchy の第一法則	20
2.1.5 Cauchy の第二運動法則	21
2.2 流体の支配方程式	23
2.2.1 非圧縮性流体	23
2.2.2 流体の構成式	24
2.2.3 流体の圧力	28
2.2.4 Newton 流体の構成式	29
2.2.5 Navier-Stokes 方程式	31
2.3 流体の有限要素法解析	33
2.3.1 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の弱形式化	33
2.3.2 弱形式 Navier-Stokes 方程式の有限要素法離散化	36
2.3.3 Newmark 法による時間積分法	42
2.4 SUPG, PSPG による安定化有限要素法	45

2.4.1	1次元移流拡散方程式	45
2.4.2	差分法における風上差分	45
2.4.3	風上差分の有限要素法への応用	46
2.4.4	多次元問題への風上差分法の応用	48
2.4.5	S U法とS U P G法	51
2.4.6	P S P G法による圧力安定化	52
2.4.7	S U P G法とP S P G法による Navier-Stokes 方程式の有限要素 法離散化	54
2.4.8	安定化パラメータ	57
第3章	連立一次方程式の解法	60
3.1	GMRES 法	60
3.1.1	GMRES 法概説	60
3.1.2	GMRES(m) 法	60
3.1.3	GMRES 法の収束性	61
3.1.4	Hessenberg 行列と Harmonic Ritz Value	63
3.1.5	GMRES 法の具体的なアルゴリズム	65
3.1.6	最小値問題の解法	66
3.2	前処理	71
3.2.1	前処理	71
3.2.2	ILU 前処理	72
3.2.3	前処理付き GMRES 法の収束性	78
3.2.4	心臓シミュレータ向け前処理付反復解法	81
3.3	Multigrid 法	82
3.3.1	Multigrid 法概説	82
3.3.2	Two grid cycle	82
3.3.3	smoothing	85
3.3.4	FEM における形状関数と Multigrid の補間写像・制限写像の関係	89
3.3.5	Multigrid 法と前処理の関係	91
3.4	Poisson 問題への適用	91
3.4.1	緒言	91

3.4.2	問題設定	92
3.4.3	計算結果	93
3.4.4	結言	95
第 4 章	非圧縮拘束条件付定常 Stokes 問題	97
4.1	緒言	97
4.2	非圧縮拘束条件付定常 Stokes 方程式	97
4.2.1	非圧縮拘束条件付定常 Stokes 方程式の離散化	97
4.2.2	Reynolds 数について	99
4.2.3	心臓問題との比較	100
4.3	安定化手法の説明および本章の目的	101
4.3.1	安定化手法を付加した際の係数行列	101
4.3.2	安定化パラメータについて	102
4.3.3	本章の目的	104
4.4	問題設定	104
4.4.1	計算条件	104
4.4.2	結果の表示法について	104
4.4.3	要素の選定について	107
4.4.4	各パラメータについて	107
4.4.5	計算機性能	108
4.5	計算結果 (既存の代表的なソルバーを用いた場合の収束性の比較)	108
4.5.1	計算結果 ($\varepsilon = 1.0 \times 10^2 h^2$ の場合)	108
4.5.2	計算結果 ($\varepsilon = 2.5 \times 10^{-1} h^2$ の場合)	109
4.5.3	4.5 節結言	109
4.6	Element by Element Multiplicative Multigrid 法	110
4.6.1	EBEMPMG 法概説	110
4.6.2	EBEMP-smoother	112
4.6.3	EBEMPMG 法を用いた場合の誤差の考察	112
4.7	計算結果 (EBEMPMG 法と既存のソルバーを用いた場合の収束性の比較)	114
4.7.1	計算結果 ($\varepsilon = 1.0 \times 10^2 h^2$ の場合)	114

4.7.2	計算結果 ($\varepsilon = 2.5 \times 10^{-1}h^2$ の場合)	115
4.7.3	結言	115
4.8	Element by Element Multiplicative Pressure Stabilized Multigrid 法	116
4.8.1	Element by Element Multiplicative Pressure Stabilized Multigrid 法の概説	116
4.8.2	計算結果	117
4.8.3	考察	117
4.8.4	結言	119
4.9	MG-GMRES 法	119
4.9.1	計算結果	119
4.9.2	考察	122
4.9.3	階層の検討	122
4.10	ε_{MG} の定め方について	123
4.10.1	ε_{MG} の定め方についての検証 (1)	123
4.10.2	ε_{MG} の定め方についての検証 (2)	125
4.10.3	ε_{MG} の定め方についての結言	126
4.11	EBEMPPSMG-GMRES 法における自由度と反復回数の相関関係	127
4.12	本章の結言	127
第 5 章	非圧縮拘束条件付定常 Navier-Stokes 問題	129
5.1	緒言	129
5.2	非圧縮拘束条件付定常 Navier-Stokes 方程式	129
5.2.1	非圧縮拘束条件付定常 Navier-Stokes 方程式の離散化	129
5.3	問題設定	130
5.3.1	計算条件	130
5.3.2	結果の表示法について	131
5.3.3	EBEMPPSMG 法のパラメータについて	134
5.4	計算結果 (各々の Reynolds 数に対する収束性の比較)	135
5.5	計算結果 (高 Reynolds 数に対する収束性の比較)	136
5.5.1	本節の概要	136
5.5.2	計算結果 (Reynolds 数=500)	137

5.5.3	計算結果 (Reynolds 数=1000)	137
5.6	収束性悪化原因の考察	139
5.7	ILU-smoohter の改良	140
5.7.1	Multigrid 法の特性及び ILU-smoohter の特性	140
5.7.2	ILU-smoohter の改良及び計算結果	141
5.8	(ILUPS+EBEMP)PSMG-GMRES 法	142
5.8.1	本節の概要	142
5.8.2	計算結果	143
5.9	計算結果 (アスペクト比の変化による収束性の比較)	144
5.9.1	本節の概要	144
5.9.2	計算結果	144
5.10	問題依存性の検証	147
5.11	本章の結言	149
第 6 章	非圧縮拘束条件付非定常 Navier-Stokes 問題	151
6.1	緒言	151
6.2	非圧縮拘束条件付非定常 Navier-Stokes 方程式	151
6.2.1	非圧縮拘束条件付非定常 Navier-Stokes 方程式の離散化	151
6.3	問題設定	152
6.3.1	計算条件	152
6.3.2	結果の表示法について	152
6.4	移流項の定量的な測定	159
6.5	計算結果 (慣性項の有無による収束性の比較)	160
6.6	計算結果 (自由度の変化による収束性の比較)	161
6.7	計算結果 (Reynolds 数の変化による収束性の比較)	164
6.8	計算結果 (Δt の変化による収束性の比較)	167
6.9	本章の結言	170
第 7 章	全体結言	171
7.1	本研究の成果	171
7.2	今後の課題	172

付録 A	174
A.1 線形代数の基礎	174
A.1.1 係数行列 A と A' の特徴	183
A.2 Richardson 反復法と Krylov 部分空間法	191
A.2.1 緒言	191
A.2.2 連立一次方程式の解法	191
A.2.3 Richardson 反復法	192
A.2.4 Krylov 部分空間法	193
A.2.5 Richardson 反復法の収束性	198
A.2.6 Richardson 反復法の問題点	198
A.2.7 前処理付き Richardson 反復法	199
文献	203

第1章 全体緒言

1.1 本研究の背景及び目的

計算機性能の向上により、科学技術シミュレーションの分野では以前では考えられないような大きな自由度の問題も扱えるようになってきている。だが現実には、やはり数日から数週間単位の時間を要している。更に、マルチスケール計算及び心臓シミュレータなどの現実的問題におけるメッシュの更なる細分化などは自由度を大幅に増やす事になり、将来的には現在の数十～数百倍のスピードでの計算が必要とされる。

非圧縮拘束条件付き Navier-Stokes 方程式に対する有効な反復ソルバーとしては鷺尾らによって開発された混合型 FEM 用 ILU 前処理付き GMRES 法がある^[1]。更に、その並列化手法もすでに開発され^{[2][3]}、大幅なスピードアップに成功し、以前であればメモリや計算時間の観点から不可能と思われた数百万自由度の問題も解くことが可能となった。

図 1.1 は本研究室で現在開発している心臓シミュレータの計算結果である^[4]。解析には ALE 有限要素法離散化・流体構造強連成手法を用いており^{[5][6][7]}、問題サイズは 300 万自由度程度である。本心臓問題 1 回の拍動をシミュレートするためには、現在 90CPU を用いて約 8 時間程度かかっている。連立一次方程式求解部のみの時間はおよそ 4 時間である。現時点では、現実的な時間でシミュレートが可能である。しかしながらマルチスケール計算の導入及びメッシュの細分化などにより、今後も更なる自由度の増加が見込まれ、反復数が自由度に応じて増えてしまう Krylov 部分空間法ではもはや対応できない状況になってきている。これらの理由から、反復数が自由度によらない非圧縮拘束条件付き Navier-Stokes 方程式を有限要素法を用いて離散化した連立一次方程式に対して有効な Multigrid 法の開発が必要となっている。本論文ではその前段階として 2 次元定常 Stokes 方程式及び定常 Navier-Stokes 方程式（キャビティーフロー問題）に対して研究を行った。

これまで Multigrid 法の研究の多くが、Poisson 方程式のような優対角性を有する係



図 1.1: 心臓シミュレータの概観

数行列の連立一次方程式に対して行われてきた^[8]。しかしここでは流体領域並びに超弾性体でモデル化された構造領域の解析に用いる混合型 FEM(Finite Element Method) で生じる連立一次方程式の解法について考えなければならない。即ち、混合型 FEM で生じる後述の特徴をもつ不定値行列に対し有効なソルバーの開発、及びその理論的考察を行うことを本研究の目的とする。

1.2 既存の研究及びその考察

係数行列の特徴

非圧縮拘束条件付き Navier-Stokes 方程式を有限要素法を用いて離散化した連立一次方程式の係数行列の最大の特徴は、その行列が不定値である（固有値に正のものと負のものが入り混じっている）という点である。Poisson 方程式を離散化したような正定値行列に関する Multigrid 法の研究は盛んに行われているものの、不定値行列に対するものはあまり存在しない。これは不定値行列に対する安定な smoother を作成することが困難であることや、不定値行列に対する反復解の誤差評価のためのエネルギーなどが定義しづらく、理論的な考察が難しいためであると考えられる。このような不定値行列は以下のように表現することが可能である。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

詳しくは後述するが、式(4.2.3)から定常 Stokes 問題であれば \mathbf{A} は対称正定値行列であることがわかる。また、 \mathbf{B} は divergence オペレータに対応する項で $\ker(\mathbf{B}^T)=0$ を満たす。 \mathbf{C} は安定化項などが付与されれば対称正定値行列、付与されない場合は零行列とする。また、 \mathbf{A} は Navier-Stokes 方程式の場合質量マトリクスや移流項のマトリクス、粘性項のマトリクスなどから構成されている。そのため移流項の無い超弾性体の構成式や Stokes 方程式においては \mathbf{A} は対称になるが、Navier-Stokes 方程式においては \mathbf{A} は対称にはならない。但し、非定常問題においてタイムステップが十分小さいとき、 \mathbf{A} は質量マトリクスが支配的となり対称行列に近くなる。そのため Navier-Stokes 方程式を扱う場合でも理論的な考察などを行う場合は \mathbf{A} を対称と仮定することもある。また、超弾性体を扱う場合 \mathbf{A} は正定値行列となり、流体に比べて解きやすい性質を有している。従って、本論文は流体問題に限らず離散化した際に流体と同様の係数行列を持つ

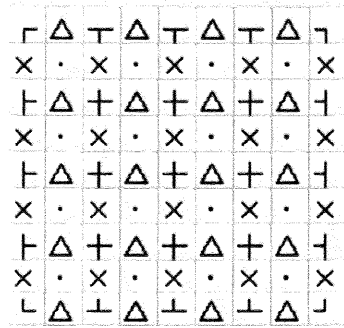


図 1.2: Staggered 格子の例

ような問題（例えば超弾性体）にも適用できる。

Stokes 方程式及び Navier-Stokes 方程式に対する Multigrid 法の研究

まず，Multigrid 法の研究分野の 1 つとして，Poisson 方程式のような優対角性を有する係数行列の連立一次方程式に対するものがある。しかしながら，Stokes 方程式及び Navier-Stokes 方程式を有限要素法によって離散化した連立一次方程式の係数行列は不定値である。従って，Poisson 方程式に対する Multigrid 法の研究を Stokes 方程式及び Navier-Stokes 方程式にそのまま用いることはできない。

非圧縮拘束条件付き Navier-Stokes 方程式の Multigrid 解法として有名なものは有限体積法を用いた方法である。例えば，S. Zeng^{[9][10][11]}，P. Wesseling^[12] 及び C.W. Oosterlee^[13] の研究などが挙げられる。例えば，S. Zeng の研究の中では Smoother として ILU(Incomplete Lower and Upper)-smoother が用いられている^[11]。また，C.W. Oosterlee の研究の中では Smoother として line-smoother 用いて移流項の異方性をうまく取り扱っている^[13]。しかしながらこれらの方法は有限要素法には用いることはできない。

また，差分法・有限体積法を用いた研究としては離散化の際に Staggered 格子と呼ばれる特殊なメッシュを用いる方法もある^{[14][15]}。これは，例えば 2 次元であれば流速の x 方向，流速の y 方向及び圧力それぞれ別の節点とするする方法である。図 1.2 において， Δ は流速の x 方向， \times は流速の y 方向， \cdot は圧力をあらわす。

そのほかの有限要素法に対する Multigrid 法の研究としては流速部及び圧力部を分離し，圧力部の Poisson 方程式に対して Multigrid 法を適用する研究などが行われている

[16]. しかしながらこれは本質的には Poisson 方程式に対する Multigrid 法の研究と等価である.

流速及び圧力を同時に解く Multigrid 法の研究としては D. Braess, R. Sarazin の研究 [17] やの Ales Janka の研究 [18] などが挙げられる. いずれの方法も smoother としては Braess-Sarazin method を用いている.

Braess-Sarazin method

D を D^{-1} 及び $BD^{-1}B^T$ が簡単に計算できるような A の前処理行列とする. このような D としては $D = \text{diag}(A)$ や $D = \text{rowsum}(|A|)$ などが用いられることが多い. そして以下のような近似方程式を解くことを考える.

$$\begin{pmatrix} D & B^T \\ B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

この式を以下のように Block LU 分解を行う. 但し, S は圧力部の Schur Complement であり $S = C + BD^{-1}B^T$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ B & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & B^T \\ 0 & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

ここで

$$\begin{pmatrix} v' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & B^T \\ 0 & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

とおけば

$$Dv' = f \quad (1.2.5)$$

$$\tilde{S}p = Bv' - g \quad (1.2.6)$$

$$Dv = f - B^T p \quad (1.2.7)$$

の三式を上から v' , p , v の順番に計算することにより求解が可能である. 但し,

$$\tilde{S} = BD^{-1}B^T + C$$

とする. \tilde{S} を inexact pressure Schur complement と呼ぶ. ここで, 残差ベクトルを

$$r = \begin{pmatrix} r_v \\ r_p \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{p}_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

で与えられる. この残差を右辺として

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_p \end{pmatrix} \quad (1.2.8)$$

を解き, 求まった修正量を今までの解に足しこんだものが新しい解となる. この一連の流れは以下のようにあらわされる.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{j+1} \\ \mathbf{p}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{p}_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C} \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{p}_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \right]$$

すなわち, Braess-Sarazin method は前処理つき Richardson 反復の一種といえる. これを Multigrid 法の smoother として用いると Stokes 問題においても良い収束性を達成できると指摘されている^{[17][18]}.

Braess-Sarazin smoother の問題点は式 (1.2.6) を解くことを仮定している点である. 実際にこの式を解くのは計算量の観点から非常に厳しく, 論文^{[17][18]}においても ILU(0) 分解を用いて計算を行っている. 従って, 式 (1.2.6) を解くことを前提にしている理論が全て破綻してしまう. この式をきちんと解くことにより, 制約条件は満たされ安定な smoother になるといえるが, 計算量の観点から smoother としては実用的ではない.

他にも以下のような問題点が挙げられる. この方法では \mathbf{A} を \mathbf{D} で置き換えてしまう. しかしながら定常 Stokes 問題において $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$ は解析的には

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T &= \nabla(\Delta)^{-1}\nabla \\ &= I \end{aligned}$$

となり条件数は非常に良い. 一方 \mathbf{A} を \mathbf{D} と置き換えてしまうと

$$\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^T = \frac{1}{d}\nabla\nabla$$

のように, 計算はできるようになるものの条件数はよくない. 従って, できればこのような置き換えは用いずに計算を行いたい.

また, Multigrid 法を行う際に, 例えば Ales Janka の研究^[18] では各レベルにおいて pre,post 共に smoother を 3 回かけている. これは計算量の観点から望ましくない.

更に, この方法は Navier-Stokes 問題に拡張されていないことも問題である.

また, 今後の並列化へ拡張のために, ローカルな smoother の作成が望まれる.

1.3 本論文の構成

本論文では第 2 章においては流体の基礎式である Navier-Stokes 方程式に対する離散化を行い, マトリクス方程式を導出する. この際に, SUPG(Stream Upwind Petrov-Galerkin) 及び PSPG(Pressure-Stabilized Petrov-Galerkin) 安定化手法についても説明する.

続いて第 3 章においては, 連立一次方程式の種々の解法 (Multigrid 法を含む) 及びそれらを理解するうえで欠かせない線形代数についての基礎知識を説明する. また, 第 3 章の最後においては本章で紹介した代表的なソルバーを正定値問題の代表とも言える Poisson 問題に適用した数値例を掲載する. 正定値問題に対する Multigrid 法の威力を実感できる.

第 4 章においては定常 Stokes 問題に対する新たな Multigrid 法 (EBEMPPSMG 法) を提案し, 数値実験を行い, 考察した. また, Multigrid 法を前処理とした GMRES 法を用いることにより, 更に高い収束性を達成した.

第 5 章においては定常 Navier-Stokes 問題に対して同様の数値実験及び考察を行った. Navier-Stokes 問題においては非線形の移流項が存在する. 移流項を離散化すると, その係数行列は一般的には非対称になる. これが収束性を妨げ, 問題をより一層難しくする. 本研究では, 異方性に効果のある ILU-smoother を EBEMP2MG-smoother に組み合わせることにより, 高い収束性を実現した.

第 7 章においては本研究の成果及び今後の課題について紹介する.

1.4 本研究の特色

詳細は後述するが, 本研究の特色としては以下のものが挙げられる.

1. 不定値問題に有効な 2 種類の smoother を新たに提案したことが本論文の最大の

主張である。要素ごとの修正量の更新を行う EBEMPPSMG-smoother 及び ILU-smoother を安定化した ILUPS-smoother を状況に合わせて用いることにより、非常に高い収束性を実現している。

2. 他の論文とは違い Multigrid 法や離散化などを大きく工夫するのではなく, smoother のみに着目しているため, 煩雑な作業などが要らず実装が容易である。smoother のアイデアも単純なものであり, 非常に理解しやすいといえる。
3. 本論文の手法は容易に並列化が可能であり, 従って大規模問題に適用が可能である。本論文で提案する EBEMPPSMG-smoother は要素ごとに修正量の更新を行う smoother であり, 容易に並列化が可能である。また本論文においては移流項によって発生する異方性を取り扱うために ILU-smoother も用いるが, これは圧力節点を考慮した並列オーバーラップ前処理のアルゴリズムを用いることにより並列化が実現可能であると考えられる^{[2][3]}。従って, 本論文で提案するアルゴリズムは容易に並列化が可能である。
4. pre,post-smoother 共に 1 度かければ, 十分な収束性を得られるため, 計算時間や計算量の観点から見ても理想的なソルバーを作成することに成功した。

第2章 Navier-Stokes 方程式の有限要素法による離散化

2.1 流体のための連続体力学の基礎

2.1.1 物質時間導関数と空間時間導関数

スカラー ϕ , ベクトル \mathbf{b} , テンソル \mathbf{A} などの場を表す任意の量を \mathcal{A} とする \mathcal{A} は位置と時刻のみの関数であり, 全微分すると以下のように表される.

$$d\mathcal{A} = \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} dt + \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i} \right|_t dx_i \quad (2.1.1)$$

$$= \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} dt + (\mathcal{A} \otimes \nabla_x) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.1.2)$$

但し,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (2.1.3)$$

は座標 \mathbf{x} 上での \mathcal{A} が時間とともに変化する速度であり, 空間時間導関数 (spatial time derivative) と呼ばれる

ここで, 物質点 \mathbf{X} 上での微小な時間 dt における \mathcal{A} の変化量 $d\mathcal{A}$ を求める.

\mathbf{X} は物質点のラベルであり, 物質点 \mathbf{X} の \mathcal{A} が時間とともに変化する速度を

$$\left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \quad (2.1.4)$$

のように表す. 上式は物質時間導関数 (material time derivative) と呼ばれる.

物質点 \mathbf{X} の座標を \mathbf{x} とする. 物質点の座標 \mathbf{x} は時刻 t のみの関数であるから, 全微分をすると

$$d\mathbf{x} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} dt = \mathbf{v} dt \quad (2.1.5)$$

ここで v は物質点の速度である。これを上式に代入すると、

$$d\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dt = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dt + (\mathcal{A} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.1.6)$$

よって次の物質時間導関数と空間時間導関数との関係が得られる

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathcal{A} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} \quad (2.1.7)$$

2.1.2 Reynolds の輸送方程式

物質中の任意の領域を考える。この領域の中のすべての物質点は時間が経過してもこの領域の中にあるとする。つまり、この領域は時間が経過するとともに物質点の速度にしたがって形を変化させる。このような領域を物質検査体積 (material control volume) と呼ぶ。この領域内でのある物理量 \mathcal{A} の総和の時間とともに変化する速度を記述したものが Reynolds の輸送方程式 (Reynolds transport theorem) である。Reynolds の輸送方程式を用いることによって、連続の式 (continuity equation), 運動方程式 (momentum equation), エネルギー方程式 (energy equation) などを導くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \mathcal{A} dv = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_V \mathcal{A} J dV \quad (2.1.8)$$

$$= \int_V \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} J + \mathcal{A} j dV \quad (2.1.9)$$

$$= \int_V \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} J + \mathcal{A} (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) J dV \quad (2.1.10)$$

$$= \int_v \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} + \mathcal{A} (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dv \quad (2.1.11)$$

$$= \int_v \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \mathcal{A}) + \mathcal{A} (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dv \quad (2.1.12)$$

$$= \int_v \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla_x \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathcal{A}) dv \quad (2.1.13)$$

$$= \int_v \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dv + \int_s n_x \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathcal{A}) ds \quad (2.1.14)$$

V は初期配置における領域である。最初の式では微分オペレータが領域 v にもかかっていたため、領域境界の変形する速度も考慮する必要があったが、それを一度、時刻 t に依存しない初期配置における領域に変換し、もう一度現配置に戻すことによって、領域境界の速度には依存しない式に書き換えている。但し、次の現配置から基準

配置への体積変換変換式，ヤコビアン J の速度に関する式を用いた

$$dv = [dx_1 \ dx_2 \ dx_3] \quad (2.1.15)$$

$$= [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \quad (2.1.16)$$

$$= (\det \mathbf{F}) [d\mathbf{X}_1 \ d\mathbf{X}_2 \ d\mathbf{X}_3] \quad (2.1.17)$$

$$= JdV \quad (2.1.18)$$

$$d\dot{v} = Jd\dot{V} \quad (2.1.19)$$

$$= \left([dx_1 \ dx_2 \ dx_3] \right) \quad (2.1.20)$$

$$= \left([\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \right) \quad (2.1.21)$$

$$= \left[\dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3 \right] \quad (2.1.22)$$

$$+ \left[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3 \right] \quad (2.1.23)$$

$$+ \left[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}_3 \right] \quad (2.1.24)$$

$$= \left[(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3 \right] \quad (2.1.25)$$

$$+ \left[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3 \right] \quad (2.1.26)$$

$$+ \left[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3 \right] \quad (2.1.27)$$

$$= \text{tr}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}) [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \quad (2.1.28)$$

$$= (\text{tr} \mathbf{L})(\det \mathbf{F}) [d\mathbf{X}_1 \ d\mathbf{X}_2 \ d\mathbf{X}_3] \quad (2.1.29)$$

$$= (\nabla_x \cdot \mathbf{v})JdV \quad (2.1.30)$$

よってヤコビアンの速度には次の式が成り立つ

$$\dot{J} = (\nabla_x \cdot \mathbf{v})J \quad (2.1.31)$$

これは Euler の膨張公式と呼ばれる。

この Reynolds の輸送定理を使って積分形式の式を微分形式に変換する時には，物質検査体積を任意にとれることから被積分関数における式が常に成り立つということをよく使う。

2.1.3 質量保存の原理

物体の質量 m は質量密度 ρ , 物体の閉める領域を v として

$$m = \int_v \rho dv \quad (2.1.32)$$

により与えられる. 質量保存の原理 (principle of conservation of mass) とは物質の質量 m が時間に依存せず変形後も一定, すなわち

$$\frac{\partial m}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_X \int_v \rho dv = 0 \quad (2.1.33)$$

が成立することを述べている. この積分形式でかかれた質量保存の原理の微分形式, すなわち連続の式を求める

Reynolds の輸送方程式の \mathcal{A} に ρ を代入すると次の式が得られる

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_X \int_v \rho dv = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_X + \rho(\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dv \quad (2.1.34)$$

よって,

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_X + \rho(\nabla_x \cdot \mathbf{v}) dv = 0 \quad (2.1.35)$$

これが任意の領域 v に対して成り立つので,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_X + \rho(\nabla_x \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1.36)$$

が成り立つ. これは連続の式の Lagrange 表示と呼ばれる.

さらに, Reynolds の輸送方程式の \mathcal{A} に ρ を代入すると次の式が得られる

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_X \int_v \rho dv = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v}) dv \quad (2.1.37)$$

これが任意の領域 v に対して成り立つので,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1.38)$$

が成り立つ. これは連続の式の Euler 表示と呼ばれる.

この連続の式を用いて次のように、上式の輸送される量が密度に比例する場合の輸送に関する式、つまり、輸送される物理量が ρ に比例し $\rho\mathcal{A}$ と表せる場合について以下の式が成り立つ

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \rho \mathcal{A} dv = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_V \rho \mathcal{A} J dV \quad (2.1.39)$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \mathcal{A} J + \rho \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} J + \rho \mathcal{A} J dV \quad (2.1.40)$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \mathcal{A} J + \rho \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} J + \rho \mathcal{A} (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) J dV \quad (2.1.41)$$

$$= \int_v \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} + \rho (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \right)}_{=0} \mathcal{A} + \rho \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dv \quad (2.1.42)$$

Lagrange 型の連続の式より上式右辺第 1 項が 0 であるから最終的に

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \rho \mathcal{A} dv = \int_v \rho \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dv \quad (2.1.43)$$

となり、(物質)時間導関数を積分の中に入れることができる。

ここで、質量保存の原理が基準配置を用いてどのように表せられるかについて調べる。質量保存の原理から基準座標の密度を ρ_0 とすると

$$\rho dv = \rho_0 dV \quad (2.1.44)$$

となる。さらに上式から

$$dv = J dV \quad (2.1.45)$$

であるから、次の関係式が成り立つ。

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J \quad (2.1.46)$$

2.1.4 Cauchy の第一法則

Eular の第 1 法則 (運動量保存の法則) より

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \rho \mathbf{v} dv = \int_v \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{t} ds \quad (2.1.47)$$

輸送される量が密度に比例する場合の輸送に関する式 (2.1.43) つまり上式の $\mathcal{A} = \mathbf{v}$ を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \rho \mathbf{v} dv = \int_v \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dv \quad (2.1.48)$$

が成り立つ. 左辺についても第2項に $\mathbf{t} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ を代入してガウスの発散定理を適応すると

$$\int_v \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{t} ds = \int_v \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} ds = \int_v \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot \mathbf{T} dv \quad (2.1.49)$$

上式を上式に代入すると次の式が得られる.

$$\int_v \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dv = \int_v \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot \mathbf{T} dv \quad (2.1.50)$$

この式が任意の領域 v に対して成立するので

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot \mathbf{T} \quad (2.1.51)$$

が成り立つ, これは Cauchy の第一運動法則と呼ばれる.

左辺第1項の物質時間導関数を空間時間導関数に変えると

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot \mathbf{T} \quad (2.1.52)$$

となり, Euler 座標系で記述された Cauchy の第一運動法則が得られる.

2.1.5 Cauchy の第二運動法則

角運動量 (angular momentum) の保存に関しては次の原理が成立する. すなわち, 座標の原点に関して物体力及び表面力のモーメントと運動量モーメント (moment of momentum) の速度が次のように等値される.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (2.1.53)$$

これは Euler の第 2 運動法則 (Euler's second law of motion) と呼ばれる。左辺で輸送される量が密度に比例する場合の輸送に関する式 (2.1.43)、つまり上式で $\mathcal{A} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$, 及び $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ を考慮すると次式を得る。

$$\int_v \rho \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (2.1.54)$$

$$\int_v \rho \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \right) dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (2.1.55)$$

$$\int_v \mathbf{x} \times \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (2.1.56)$$

右辺第 2 項について式変形すると

$$\int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds = \int_s \mathbf{x} \times (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}) ds = \int_s (x_i \mathbf{e}_i) \times (T_{ij} \mathbf{e}_j n_l) ds \quad (2.1.57)$$

$$= \int_s \epsilon_{ijk} x_i T_{lj} n_l \mathbf{e}_k ds = \epsilon_{ijk} \int_s x_i T_{lj} n_l ds \mathbf{e}_k \quad (2.1.58)$$

$$= \epsilon_{ijk} \int_v \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i T_{lj}) dv \mathbf{e}_k \quad (2.1.59)$$

$$= \epsilon_{ijk} \int_v (\delta_{il} T_{lj} + x_i \frac{\partial T_{lj}}{\partial x_l}) dv \mathbf{e}_k \quad (2.1.60)$$

$$= \int_v \left(\epsilon_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k + (x_i \mathbf{e}_i) \times \left(\frac{\partial T_{lj}}{\partial x_l} \mathbf{e}_j \right) \right) dv \quad (2.1.61)$$

$$= \int_v (\epsilon_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k + \mathbf{x} \times \text{div} \mathbf{T}) dv \quad (2.1.62)$$

これを上式に代入すると

$$\int_v \mathbf{x} \times \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_v (\epsilon_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k + \mathbf{x} \times \text{div} \mathbf{T}) dv \quad (2.1.63)$$

$$\int_v \underbrace{\mathbf{x} \times \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} - \rho \mathbf{g} - \text{div} \mathbf{T} \right)}_{=0} dv = \int_v \epsilon_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k dv \quad (2.1.64)$$

Cauchy の第一運動法則を左辺第 1 項に適応すると左辺は 0 となるので最終的に以下の等式が成り立つ。

$$\int_v \epsilon_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k dv = 0 \quad (2.1.65)$$

つまり,

$$\epsilon_{ijk} T_{ij} = 0 \quad (2.1.66)$$

を得る. 上式が成立するためには

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (2.1.67)$$

すなわち

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad (2.1.68)$$

でなくてはならない. よって Cauchy 応力は対称であり, 独立な成分の数は 6 個となる. 上式は Cauchy の第二運動法則 (Cauchy's second law of motion) と呼ばれる.

2.2 流体の支配方程式

2.2.1 非圧縮性流体

流体に非圧縮性の条件を仮定すれば, 物質点 \mathbf{X} の質量密度は時間に依存せず, 一定であるから以下の条件を満たすことになる.

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = 0 \quad (2.2.1)$$

したがってこれを連続の式に適応すれば, Lagrange 表示, Euler 表示に対してそれぞれ非圧縮性の連続の式は以下ようになる.

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \rho) = 0 \quad (2.2.3)$$

さらに単一流体, もしくは空間的に流体の密度が一定の場合

$$\rho = \text{Const} \quad (2.2.4)$$

であるから, 非圧縮性の条件は常に満たされ, 連続の式は Lagrange 表示形式のみ意味を持つ. すなわち, 連続の式の Euler 表示は常に満たされる. 以上より密度一定流体の非圧縮性の連続の式は以下ようになる.

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.5)$$

2.2.2 流体の構成式

構成式に関する原理（局所作用の原理）より，点 \mathbf{X} における応力は \mathbf{X} の近傍の領域の物質店の集合の過去から現在時刻 t に至るまでの運動の履歴によって決定される．特に，ある物質が変形勾配 \mathbf{F} の履歴のみに依存して応力 \mathbf{T} の定まる単純体 (simple material) とすると次の式が成り立つ．

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s)) \quad (2.2.6)$$

単純物質の構成式においてもし，

$$\mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s)) = \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s) \cdot \mathbf{P}) \quad (2.2.7)$$

とするようななんらかの2階のテンソル \mathbf{P} が存在する場合，この物質は変換 \mathbf{P} に対して対称であると呼ぶ． \mathbf{P} は変形 \mathbf{F} に先立つ物体の変換を表すので，対称変換 (symmetric transformation) と呼ばれる．液晶などのように流体に異方性があるような特別な場合を除いて，一般的に流体は密度が変化しなければ力学特性も同一のはずであるから， \mathbf{P} が

$$\det \mathbf{P} = 1 \quad (2.2.8)$$

を満たす任意の変換であるとき，その物質を（単純）流体と定義することができる．なお上式を満たす変換をユニモジュラー変換 (unimodular transformation) と呼ぶ．任意の回転は上式を満たすから流体は等方であることが分かる．

上式の \mathbf{P} に

$$\mathbf{P} = J \det \mathbf{F}^{-1}(t) \quad (2.2.9)$$

を代入すると流体の構成式は

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s) \cdot J \mathbf{F}^{-1}(t)) \quad (2.2.10)$$

が成り立つことが必要である．同時に上式が成り立っている場合，任意の $\det \mathbf{P} \neq 0$ となる変換 \mathbf{P} に対して $\tilde{\mathbf{F}}(t-s) = \mathbf{F}(t-s) \cdot \mathbf{P}$ を上式に代入すると

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\tilde{\mathbf{F}}(t-s) \cdot J \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t)) \quad (2.2.11)$$

$$= \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s) \cdot \mathbf{P} \cdot J(\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{P})^{-1}) \quad (2.2.12)$$

$$= \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s) \cdot \mathbf{P} \cdot J \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1}(t)) \quad (2.2.13)$$

$$= \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s) \cdot J \mathbf{F}^{-1}(t)) \quad (2.2.14)$$

$$= \mathbf{T} \quad (2.2.15)$$

となり, 変換 P に依存しない形で表せるので, 流体の構成式として十分満足する.
 以上から (単純) 流体の構成式は次のように書くことが必要十分条件となる.

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s) \cdot J\mathbf{F}^{-1}(t)) \quad (2.2.16)$$

次に上式右辺の () 内が

$$\mathbf{F}(t-s) \cdot J\mathbf{F}^{-1}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot J\mathbf{F}^{-1}(t) \quad (2.2.17)$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{F}(t)}{\partial t} \cdot J\mathbf{F}^{-1}(t) ds \quad (2.2.18)$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{F}(t)}{\partial t^2} \cdot J\mathbf{F}^{-1}(t) ds^2 \quad (2.2.19)$$

$$+ \dots \quad (2.2.20)$$

$$= J + J\mathbf{L}ds + J\frac{1}{2!}\mathbf{L}_{(2)}ds^2 + \dots \quad (2.2.21)$$

のように Taylor 展開できるものとする. 但し, \mathbf{L} は速度勾配テンソルであり, $\mathbf{L}_{(n)}$ は n 階の速度勾配テンソルである. もし上式右辺 2 項までとって残余項が十分小さくなるなら, 構成式は次のように書くことができる.

$$\mathbf{T} = f(J, J\mathbf{L}) \quad (2.2.22)$$

$$= f(J, \mathbf{L}) \quad (2.2.23)$$

また基準配置からの体積変化率, つまりヤコビアンと密度は上式によって対応付けられるので上式からヤコビアンを除き, 代わりに現在の時刻での密度の関数とすることができる. つまり,

$$\mathbf{T} = f(\rho, \mathbf{L}) \quad (2.2.24)$$

となる

ここで, 流体の速度が一様, つまり速度勾配が 0 である場合の応力 $\tilde{\mathbf{T}}$ を考える. 速度勾配が 0 である場合は $\mathbf{L} = 0$ であるから, 上式より

$$\tilde{\mathbf{T}} = f(\rho) \quad (2.2.25)$$

となる. また, 物質客観性の原理から \mathbf{Q} を任意の対称テンソルとすると,

$$\tilde{\mathbf{T}}^* = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T = f(\rho^*) = f(\rho) = \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.2.26)$$

任意の対称テンソル Q による回転に対して不変なテンソルは単位テンソル I の定数倍に限られる。よってこの場合の応力 \tilde{T} は

$$\tilde{T} = -p(\rho)I \quad (2.2.27)$$

とかける。このように流体の速度が一様であるときの応力 \tilde{T} を静水圧応力 (hydrostatic stress), p を静水圧 (hydrostatic pressure) と呼ぶ。また上式のように圧力が密度だけから決定されるような流体をバロトロピー流体 (Barotropic fluid) または順圧流体と呼ぶ。また、圧力が密度以外に温度などに依存する流体を斜圧流体 (baroclinic fluid) と呼ぶ。また、非圧縮性流体のように圧力が非圧縮性を満たすための拘束力として働く場合、この圧力を不定静水圧という。

応力を決定する関数 f からこの静水圧応力 \tilde{T} を除いた関数を新たに f と定義すると、

$$T = -p(\rho)I + f(\rho, L) \quad (2.2.28)$$

となる。但し、 f は流体の速度が一様、つまり速度勾配が 0 であるときの応力を応力 T から除いたものなので、速度勾配が 0 である場合に $f = 0$ を満たさなければならない。つまり、

$$f(\rho, 0) = 0 \quad (2.2.29)$$

である。また常に $f = 0$ が成り立つ場合、つまり

$$T = -p(\rho)I \quad (2.2.30)$$

である場合、この構成式は理想流体を表す。流体の基本的物理特性は並行にあるとき剪断応力を保持できないということであるが、このような構成式で表される流体はそれが運動中にこの性質を保てるという意味で理想的なのである。理想流体において剪断応力が存在しないということは、単純剪断運動において隣り合う層が抵抗なくお互いに滑りあうことができることを意味している。粘性流体においてはこの種の相対運動は摩擦抵抗をうけ、剪断力を発生させるので理想流体は非粘性流体 (inviscid fluid) といっても差し支えない。

非理想流体の場合は $f \neq 0$ であり、 f は理想流体からのずれの応力を表すので f は過剰応力と呼ばれる。一般的に過剰応力は粘性による応力を表している。

速度勾配テンソル L の対称成分を D 、反対称成分を W とすると、

$$L = D + W \quad (2.2.31)$$

となる。 D は変形速度テンソル (deformation rate tensor) W はスピテンソル (spin tensor) と呼ばれる。 W は剛体回転を表しており、応力に関係しないつまり、構成式は変形速度テンソル D のみで表すことができると考えられる。実際のところ、物質客観性の原理より、関数 f は任意の直行テンソル Q とその時間微分で任意の反対称テンソルとなる \dot{Q} に対して

$$T^* \equiv QTQ^T \quad (2.2.32)$$

$$= -p(\rho)I + Qf(\rho, L)Q^T \quad (2.2.33)$$

$$= -p(\rho)I + f(\rho, L^*) \quad (2.2.34)$$

$$= -p(\rho)I + f(\rho, QLQ^T + \dot{Q}Q^T) \quad (2.2.35)$$

を満たさなければならない。 Q, \dot{Q} は任意であったことから、ここで $Q = I, \dot{Q}$ を L の反対称成分にマイナスしたもの $\dot{Q} = -(L)_a = -W = -\frac{1}{2}(L - L^T)$ とすると

$$f(\rho, L) = f(\rho, L - (L)_a) = f(\rho, (L)_s) = f(\rho, D) \quad (2.2.36)$$

であるから、

$$T \equiv -p(\rho)I + f(\rho, D) \quad (2.2.37)$$

となり、過剰応力 f は歪速度テンソル D の関数となる

速度勾配テンソル L の反対称成分 W が出てきたが、一般に反対称テンソル B は軸性ベクトル (axial vector)

$$\omega = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B_{ij}e_k \quad (2.2.38)$$

を持ち任意のベクトル a に対して $B \cdot a \equiv \omega \times a$ となる。スピテンソル W に対して軸性ベクトル ω は

$$\omega = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}W_{jk}e_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}e_i = \frac{1}{2}\nabla_x \times v \quad (2.2.39)$$

で表され、流体が剛体回転する角速度ベクトルを表している。上式より角速度ベクトル ω は $\Omega = \nabla_x \times v$ で定義される渦度ベクトル (vorticity) の半分になる。

2.2.3 流体の圧力

非圧縮性流体の圧力

物質の変形に制約条件が存在する場合がある。非圧縮性の条件などに代表されるこのような制約は内部束縛 (internal constraint) と呼ばれる。物体に内部束縛が存在する場合には構成式に関する原理 (応力決定の原理) は次のように変形される必要がある。

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}_{s=0}^{\infty}(\mathbf{F}(t-s)) + \mathcal{T} \quad (2.2.40)$$

この応力 \mathcal{T} は内部仕事に無関係であり、物質点の運動、すなわち \mathbf{F} の履歴からは決定することができない応力なので非決定応力 (interminate stress) と呼ばれる。非決定応力は仕事をしないので

$$\mathcal{T} : \mathbf{D} = \text{tr}(\mathcal{T} \cdot \mathbf{D}) = 0 \quad (2.2.41)$$

が成り立つ。

代表的な内部拘束はスカラー値テンソル関数

$$\gamma(\mathbf{F}) = 0 \quad (2.2.42)$$

のように表される。たとえばその代表例としては非圧縮の拘束条件

$$\gamma(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1 = J - 1 = 0 \quad (2.2.43)$$

があげられる。

内部仕事も物質客観性の原理を満たさなければならないことから、

$$\gamma^*(\mathbf{F}) = \gamma(\mathbf{F}) = \gamma(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) \quad (2.2.44)$$

を満たさなければならない。ここで $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ とおくと

$$\gamma(\mathbf{F}) = \gamma(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \gamma(\mathbf{U}) \quad (2.2.45)$$

となり γ は右ストレッチテンソル \mathbf{U} のみの関数となることが必要である。一方で右ストレッチテンソルは基準枠の回転に対して不変つまり、 $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}$ であるから

$$\gamma^*(\mathbf{U}) = \gamma(\mathbf{U}^*) \quad (2.2.46)$$

となり十分客観性を満たしていることがわかる. よって拘束条件 γ は右ストレッチテンソル \boldsymbol{U} のみの関数でなければならない.

ここで非圧縮性の拘束条件にたいしてどのような非決定応力が発生するかを調べる. λ は 0 で定数であったので λ を時間微分したのも 0 であるはずである. よって

$$\dot{\lambda} = (\det \boldsymbol{F} - 1) = \dot{J} = J \operatorname{tr} \boldsymbol{D} = \operatorname{tr} \boldsymbol{D} = 0 \quad (2.2.47)$$

ここで拘束条件から $J = 1$ であることを用いた. 上式から

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{D} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{D}) = 0 \quad (2.2.48)$$

となる. よって上式から非圧縮性の制約条件が課された場合に単位テンソルの定数倍で表される応力は仕事をしないということがわかる. よって非決定応力 \mathcal{T} は未知数 p を用いて

$$\mathcal{T} = -p\boldsymbol{I} \quad (2.2.49)$$

のように表すことができる. ここで導入した p は明らかに不定静水圧である.

2.2.4 Newton 流体の構成式

過剰応力が密度に依存しないような流体を Stokes 流体 (Stokesian fluid) と呼び, その構成式は

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}) \quad (2.2.50)$$

により与えられる. p は圧力, \boldsymbol{I} は単位テンソルである. テンソル \boldsymbol{D} が客観性のあるテンソルであることから, 物質客観性の原理により関数 \boldsymbol{f} は

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}^T) \quad (2.2.51)$$

を満たさなければならない. つまり \boldsymbol{f} は等方テンソル関数となるから, 表示定理により, ϕ_i を \boldsymbol{D} の主不変量のスカラー関数として

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}) = \phi_0 \boldsymbol{I} + \phi_1 \boldsymbol{D} + \phi_2 \boldsymbol{D}^2 \quad (2.2.52)$$

と表すことができる。上式を過剰応力とする流体は Reiner-Rivlin 流体とも呼ばれる。上式第3項は外力条件が急激に変化する場合に影響を持つことが知られているが、一般的に強い非線形性を示すような流体においてもほぼ無視できるほど小さいことが分かっている。

過剰応力 $f(\mathbf{D})$ が \mathbf{D} に関して線形同次であるような流体を Newton 流体という。上式において $\phi_1 = \lambda(\text{tr } \mathbf{D}), \phi_2 = 2\mu, \phi_3 = 0$ とおくと

$$\mathbf{f}(\mathbf{D}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.2.53)$$

となるので Newton 流体の構成式は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda(\text{tr } \mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.2.54)$$

$$= -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla_x \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.2.55)$$

ここで μ はせん断粘性率 (shear viscosity), λ は第二粘性率 (second viscosity) と呼ばれる。第二粘性率 λ は Lamé の第一定数のアナロジーである。上式を \mathbf{D} の偏差成分 $\tilde{\mathbf{D}}$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{D})\mathbf{I} \quad (2.2.56)$$

$$= \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla_x \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \quad (2.2.57)$$

についてみると

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(\text{tr } \mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\tilde{\mathbf{D}} \quad (2.2.58)$$

となる。ここで現れる $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ を体積粘性率 (bulk viscosity) κ と呼ぶ。体積粘性率は流体の体積変化に伴う粘性応力の目安である。上式は κ を用いて

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \kappa(\nabla_x \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\tilde{\mathbf{D}} \quad (2.2.59)$$

と現わすことができる。多くの流体では κ は非常に小さいことが知られている。そこで、 $\kappa = 0$ とする Stokes の近似を用いると圧縮性流体の構成式は次のようになる

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\tilde{\mathbf{D}} \quad (2.2.60)$$

$$= -p\mathbf{I} + 2\mu\left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla_x \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}\right) \quad (2.2.61)$$

これは体積粘性係数を無視した圧縮性 Newton 流体の構成式である。さらに流体に非圧縮性を仮定すると

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.62)$$

だから、非圧縮性の Newton 流体の構成式は

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.2.63)$$

となる。

2.2.5 Navier-Storks 方程式

Newton 流体の構成式は以下のとおり

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.2.64)$$

μ は粘性係数である。これをオイラー座標系で記述された Cauchy の第一運動法則

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot \mathbf{T} \quad (2.2.65)$$

に代入して

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot (-p\mathbf{I} + \lambda(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \quad (2.2.66)$$

ここで

$$\nabla_x \cdot (-p\mathbf{I}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot (p\delta_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_k} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) \delta_{ji} \mathbf{e}_i \quad (2.2.67)$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_{kj} \delta_{ij} \mathbf{e}_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (2.2.68)$$

$$= -\nabla_x p \quad (2.2.69)$$

を代入すると

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + -\nabla_x p + \nabla \cdot (\lambda(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \quad (2.2.70)$$

これを応力発散形式の Navier-Storks 方程式と呼ぶ。

ここで粘性係数 μ , 第二粘性係数 λ が流体中で一定とした場合について, この応力発散形式の Navier-Storks 方程式を変形する。

$$\nabla_x \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_l} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \quad (2.2.71)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_l} (\delta_{kl}) \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \quad (2.2.72)$$

$$= \nabla_x^2 \mathbf{v} \quad (2.2.73)$$

$$(2.2.74)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla) = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_i} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \right) \quad (2.2.75)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \quad (2.2.76)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v} \right) \quad (2.2.77)$$

$$= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.2.78)$$

よって、 \mathbf{D} の発散は以下のように変形される。

$$\nabla_x \cdot \mathbf{D} = \nabla_x \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \nabla_x + \nabla_x \otimes \mathbf{v}) \quad (2.2.79)$$

$$= \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\nabla_x \cdot \mathbf{v})) \quad (2.2.80)$$

さらに、

$$\nabla_x \cdot (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} = \nabla_x (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \quad (2.2.81)$$

これを粘性係数、第二粘性係数が流体内で一定とした応力発散形式の Navier-Stokes 方程式に代入すると Navier-Stokes 方程式は

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + -\nabla_x p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla_x (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \quad (2.2.82)$$

$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ を代入して

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + -\nabla_x p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\kappa + \frac{1}{3}\mu \right) \nabla_x (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \quad (2.2.83)$$

となる。ここで Stokes の仮定 $\kappa = 0$ が成り立つ場合、Navier-Stokes 方程式は次のようにかける。

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + -\nabla_x p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\mu \nabla_x (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \quad (2.2.84)$$

さらに流体に非圧縮性が成り立つ場合 $\nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0$ が成り立つので

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + -\nabla_x p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.2.85)$$

これはラプラシアン形式の非圧縮性 Navier-Stokes 方程式と呼ばれる。

2.3 流体の有限要素法解析

2.3.1 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の弱形式化

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を解く境界問題を以下のように設定する

オイラー表記された Cauchy の第一運動法則

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \nabla_x \cdot \mathbf{T} \quad (2.3.1)$$

Cauchy の第二運動法則

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad (2.3.2)$$

非圧縮性 Newton 流体の構成式

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.3.3)$$

内部拘束

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3.4)$$

応力境界条件

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \quad (\text{on } S_t) \quad (2.3.5)$$

流速境界条件

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \quad (\text{on } S_u) \quad (2.3.6)$$

解析領域の境界上で応力境界条件か流速境界条件のどちらかがあたえられていなければならない。また、応力境界条件と流速境界条件が与えられる境界は重複してはならない。つまり、

$$S_1 \cup S_2 = S \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset \quad (2.3.7)$$

以下強形式で書かれた Cauchy の第一法則を弱形式に変形する。

$\delta \mathbf{v}$ を流速境界条件が設定されている箇所で 0 となる、つまり、

$$\delta \mathbf{v} = 0 \quad (\text{on } S_u) \quad (2.3.8)$$

を満たす任意の関数とする. 式 (2.3.1) の両辺に $\delta \mathbf{v}$ をかけて, V 上で積分すると

$$\int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{v} \cdot \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} dV = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} + \delta \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \cdot \mathbf{T}) dV \quad (2.3.9)$$

ここで左辺第 2 項について

$$\delta \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \cdot \mathbf{T}) = \delta v_l \mathbf{e}_l \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot (T_{mi} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_i) \right) \quad (2.3.10)$$

$$= \delta v_l \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} \cdot \mathbf{e}_i = \delta v_l \cdot \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} \quad (2.3.11)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta v_l T_{ki}) - \frac{\partial \delta v_l}{\partial x_k} T_{ki} \quad (2.3.12)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot (T_{li} \delta v_l \mathbf{e}_i) - \left(\frac{\partial \delta v_l}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right) : (T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (2.3.13)$$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}) - (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) : \mathbf{T} \quad (2.3.14)$$

が成り立つので

$$\int_V \delta \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \cdot \mathbf{T}) dV = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}) dV - \int_V (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) : \mathbf{T} dV \quad (2.3.15)$$

上式第 1 項についてガウスの発散定理を適応して整理すると

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}) dV = \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}) dS \quad (2.3.16)$$

$$= \int_{S_t} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}) dS_t + \int_{S_u} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}) dS_u \quad (2.3.17)$$

$$= \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}) dS_t \quad (2.3.18)$$

$$= \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \quad (2.3.19)$$

さらに上式第 2 項について

$$(\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) : \mathbf{T} = (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v})^T : \mathbf{T}^T \quad (2.3.20)$$

$$= (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v})^T : \mathbf{T} \quad (2.3.21)$$

$$= (\delta \mathbf{v} \otimes \nabla_x) : \mathbf{T} \quad (2.3.22)$$

ここで Cauchy の第二運動法則 $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$ が成り立つことを用いた.

よって

$$(\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) : \mathbf{T} = \frac{1}{2} (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} \otimes \nabla_x) : \mathbf{T} \quad (2.3.23)$$

$$= \delta \mathbf{D} : \mathbf{T} \quad (2.3.24)$$

とかける。これらを上式に代入すると、最終的に弱形式化された Cauchy の第一運動法則は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{v} \cdot \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} + \delta \mathbf{D} : \mathbf{T} dV \\ = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

上式右辺第3項は応力による単位時間当たりの仮想仕事を表しており、

$$\int_v \delta \mathbf{D} : \mathbf{T} dv = \int_v \delta (\mathbf{D} : \mathbf{T}) dv \quad (2.3.26)$$

のように単位時間あたりの応力による仕事の変分で表される。

物体に内部拘束がない場合は応力決定性の原理より応力は変位もしくは速度から決定されるので、変位（または流速）を未知変数としてその変分問題である上式を解くことで解が得られる。しかし、この問題のように非圧縮の内部拘束が課された場合、非決定応力が存在するのでこの非決定応力も未知変数として解かなければならない。そこで非決定応力に対する変分も合わせて考える。非圧縮の内部拘束に対する非決定応力 $-p\mathbf{I}$ を応力 \mathbf{T} から除いたものを $\bar{\mathbf{T}}$ とする。つまり、

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} - p\mathbf{I} \quad (2.3.27)$$

上式を上式に代入し、流速と圧力に対して変分を実行すると

$$\int_v \delta (\mathbf{D} : \mathbf{T}) dv = \int_v \delta \{ \mathbf{D} : (\bar{\mathbf{T}} - p\mathbf{I}) \} \quad (2.3.28)$$

$$= \int_v \delta \mathbf{D} : \bar{\mathbf{T}} - \delta \mathbf{D} : p\mathbf{I} - \mathbf{D} : \delta p \mathbf{I} \quad (2.3.29)$$

$$= \int_v \delta \mathbf{D} : \bar{\mathbf{T}} - p(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.3.30)$$

これを上式に代入すると非圧縮性の内部拘束を持つ物質の弱形式化された Cauchy の第一運動法則は

$$\begin{aligned} \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{v} \cdot \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} + \delta \mathbf{D} : \bar{\mathbf{T}} \\ - p(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \\ = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

となる。但し δp は拘束条件を持つ物質内で任意の値をとる関数である。上式左辺第5項は任意の関数 δp に対して非圧縮性の拘束条件が成り立つということを表しているの

で、拘束条件を表している項と考えられる。従って、 δp になんらかの制約をつけることによって非圧縮性の拘束条件が満たされなくなってしまう恐れがあるので注意が必要である。

非圧縮性 Newton 流体の構成式と上式とを比べると明らかに $\bar{\mathbf{T}} = 2\mu\mathbf{D}$ である。これを上式に代入すると弱形式化された非圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{v} \cdot \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} \\ + \delta \mathbf{D} : 2\mu\mathbf{D} - \rho(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \\ = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

が得られる。さらに流体の密度 ρ , 粘性係数 μ が流体中で一定である場合、弱形式化された非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は

$$\begin{aligned} \rho \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dV + \rho \int_V \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} dV \\ + 2\mu \int_V \delta \mathbf{D} : \mathbf{D} dV - \int_V \rho(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) dV \\ + \int_V \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \\ = \rho \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

となる。

2.3.2 弱形式 Navier-Stokes 方程式の有限要素法離散化

以下、応力発散形式の弱形式非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を有限要素法離散化する。弱形式非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は積分の形でかかれているので、積分区間を重複がないように分割して、その分割された領域内ごとに積分値を計算した後、その値を足し合わせてもよい。よって V_e を有限要素法分割された一つの要素内の領域とすると、弱形式非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は次のようになる。

$$\sum_e \underbrace{\rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dV_e}_{\text{慣性項}} + \sum_e \underbrace{\rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} dV_e}_{\text{移流項}}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_e 2\mu \underbrace{\int_{V_e} \delta \mathbf{D} : \mathbf{D} dV_e}_{\text{粘性項}} - \sum_e \underbrace{\int_{V_e} \rho(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) dV_e}_{\text{圧力勾配項}} \\
& + \sum_e \underbrace{\int_{V_e} \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV_e}_{\text{非圧縮条件項}} \\
& = \sum_e \underbrace{\rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV_e}_{\text{外力項 (体積力)}} + \sum_e \underbrace{\int_{S_{et}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_{et}}_{\text{外力項 (表面力)}} \quad (2.3.34)
\end{aligned}$$

以下それぞれの項に関して個別に値を計算する。要素内の流速，流速の変分及び流速の空間時間導関数は内挿関数 N を用いて補間されるとし，圧力及び圧力の変分に関しては内挿関数 M を用いて補間されるとする。

弱形式化された慣性項の有限要素法離散化

$$\begin{aligned}
\rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dV_e & = \rho \delta_{ij} \int_{V_e} \delta v_i \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dV_e \\
& = \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m \delta v_i^m N_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n dV_e \\
& = \delta v_i^m \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m N^n dV_e \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n \\
& = \delta v_i^m \bar{M}_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n \quad (2.3.35)
\end{aligned}$$

但し，

$$\bar{M}_j^n = \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m N^n dV_e \quad (2.3.36)$$

とした。

弱形式化された移流項の有限要素法離散化

$$\begin{aligned}
\rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} dV_e & = \rho \int_{V_e} \delta_{ij} \delta v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} v_k dV_e \\
& = \rho \int_{V_e} \delta_{ij} N^m \delta v_i^m \frac{\partial N^n v_j^n}{\partial x_k} N^o v_k^o dV_e \\
& = \delta v_i^m \rho \delta_{ij} \int_{V_e} N^m N^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dV_e v_k^o v_j^n \\
& = \delta v_i^m \bar{\Lambda}_{kj}^{on} v_k^o v_j^n \quad (2.3.37)
\end{aligned}$$

但し,

$${}^m \bar{\Lambda}_{kj}^{on} = \rho \delta_{ij} \int_{v_e} N^m N^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e \quad (2.3.38)$$

とした

弱形式化された粘性項の有限要素法離散化

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{V_e} \delta \mathbf{D} : \mathbf{D} dv_e &= 2\mu \int_{V_e} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \\ &= \mu \int_{V_e} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \\ &= \mu \int_{V_e} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \\ &= \mu \int_{v_e} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \\ &= \mu \int_{v_e} \left(\frac{\partial N^m \delta v_i^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n v_j^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m \delta v_i^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n v_j^n}{\partial x_i} \right) dv_e \\ &= \delta v_i^m \mu \int_{v_e} \left(\frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e v_j^n \\ &= \delta v_i^m \quad {}^m \bar{K}_j^n \quad v_j^n \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

但し,

$${}^m \bar{K}_j^n = \mu \int_{v_e} \left(\frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (2.3.40)$$

とした

弱形式化された圧力勾配項の有限要素法離散化

$$\begin{aligned} \int_{V_e} p(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) dv_e &= \int_{V_e} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dv_e \\ &= \int_{V_e} M^s p^s \frac{\partial N^m \delta v_i^m}{\partial x_i} dv_e \\ &= \delta v_i^m \int_{V_e} M^s \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dv_e p^s \\ &= \delta v_i^m \quad {}^m \bar{B}^s \quad p^s \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

但し,

$${}^m \bar{B}^s = \int_{v_e} M^s \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dv_e \quad (2.3.42)$$

とした。

弱形式化された非圧縮性の拘束条件の有限要素法離散化

$$\begin{aligned}
 \int_{V_e} \delta p (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV_e &= \int_{V_e} \delta p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV_e \\
 &= \int_{V_e} M^r \delta p^r \frac{\partial N^n v_j^n}{\partial x_j} dV_e \\
 &= \delta p^r \int_{V_e} M^r \frac{\partial N^n}{\partial x_j} dV_e v_j^n \\
 &= \delta p^r \quad {}^r \bar{B}^T \quad {}^n_j \quad v_j^n
 \end{aligned} \tag{2.3.43}$$

弱形式化された外力（体積力）項の離散化外力（体積力）項を離散化すると

$$\begin{aligned}
 \rho \int_{V_e} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV_e &= \rho \int_{V_e} \delta v_i g_i dV_e \\
 &= \rho \int_{V_e} N^m \delta v_i^m g_i dV_e \\
 &= \delta v_i^m \rho \int_{V_e} N^m g_i dV_e \\
 &= \delta v_i^m \quad {}^m_i \bar{F}_B
 \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

弱形式化された外力（表面力）項の離散化

$$\begin{aligned}
 \int_{S_{et}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_{et} &= \int_{S_{et}} \delta v_i t_i^* dS_{et} \\
 &= \int_{S_{et}} N^m \delta v_i^m t_i^* dS_{et} \\
 &= \delta v_i^m \int_{S_{et}} N^m t_i^* dS_{et} \\
 &= \delta v_i^m \quad {}^m_i \bar{F}_S
 \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

よって有限要素法離散化された弱形式の方程式は以下の通り

$$\sum_e \{ \delta v_i^m \quad \delta p^r \} \left\{ \begin{array}{c} {}^m_i M_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n + {}^m_i \Lambda_{kj}^{on} v_k^o v_j^n + {}^m_i K_j^n v_j^n - {}^m_i B^o p^s \\ \quad {}^r \bar{B}^T \quad {}^n_j \quad v_j^n \end{array} \right\}$$

$$= \sum_e \{ \delta v_i^m \quad \delta p^f \} \begin{Bmatrix} {}^m F_B + {}^m F_S \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.46)$$

$$\begin{aligned} \{ \delta v_i^a \quad \delta p^f \} \sum_e \left\{ \begin{array}{c} {}^m M_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n + {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o v_j^n + {}^m K_j^n v_j^n - {}^m B^g p^s \\ r \bar{B}^T_j{}^n v_j^n \end{array} \right\} \\ = \{ \delta v_i^a \quad \delta p^f \} \sum_e \begin{Bmatrix} {}^a F_B + {}^a F_S \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

ここで $\delta v_i^a, \delta p^f$ は任意であったから,

$$\sum_e \left\{ \begin{array}{c} {}^m M_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n + {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o v_j^n + {}^m K_j^n v_j^n - {}^m B^g p^s \\ r \bar{B}^T_j{}^n v_j^n \end{array} \right\} = \sum_e \begin{Bmatrix} {}^m F_B + {}^m F_S \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.48)$$

が成り立つ, これは,

$$Q = \sum_e Q_e = \sum_e \left\{ \begin{array}{c} {}^m M_j^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n + {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o v_j^n + {}^m K_j^n v_j^n - {}^m B^s p^s \\ r \bar{B}^T_j{}^n v_j^n \end{array} \right\} \quad (2.3.49)$$

$$F = \sum_e F_e = \begin{Bmatrix} {}^m F_B + {}^m F_S \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.50)$$

とおくと

$$Q = F \quad (2.3.51)$$

と表される. ここで, この方程式は移流項の部分が流速に対して線形ではないのでこのままでは計算機を用いて解析することはできない. そこでこの方程式を線形化して増分法により解析することで解を求める. ベクトル Q の増分は以下のように線形化される.

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \sum_e \Delta Q_e \quad (2.3.52) \\ &= \sum_e \left\{ \begin{array}{c} {}^m M_j^n \Delta \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n + {}^m \Lambda_{kj}^{on} \Delta v_k^o v_j^n + {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o \Delta v_j^n + {}^m K_j^n \Delta v_j^n - {}^m B^s \Delta p^s \\ r \bar{B}^T_j{}^n \Delta v_j^n \end{array} \right\} \\ &= \sum_e \left(\begin{bmatrix} {}^m M_j^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n \\ \Delta \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o + {}^m \Lambda_{jk}^{no} v_k^o + {}^m K_j^n & -{}^m B^s \\ r \bar{B}^T_j{}^n & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_j^n \\ \Delta p^s \end{Bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_e \begin{bmatrix} {}^m M_j^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \Delta \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^b \\ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^g \end{array} \right\} \\
&\quad + \left(\sum_e \begin{bmatrix} {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o + {}^m \Lambda_{jk}^{no} v_k^o + {}^m K_j^n & -{}^m B^s \\ r B_j^n & 0 \end{bmatrix} \right) \Delta \left\{ \begin{array}{l} v_j^b \\ p^g \end{array} \right\} \\
&= M \Delta \mathbf{a} + C \Delta \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{2.3.53}$$

ここで,

$$M = \sum_e \begin{bmatrix} {}^m M_j^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \sum_e \begin{bmatrix} {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o + {}^m \Lambda_{jk}^{no} v_k^o + {}^m K_j^n & -{}^m B^s \\ r B_j^n & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.54}$$

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^b \\ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^g \end{array} \right\} \quad \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{l} v_j^b \\ p^g \end{array} \right\} \tag{2.3.55}$$

とした。この増分の線形化はベクトル Q に対して

$$M = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{a}} \quad C = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}} \tag{2.3.56}$$

となっており、 M, C は接線を与える行列となっており、内力の増分に対して Newton-Raphson 法を適応しているといえる。

また、内力の増分を以下のように計算する場合もある。

$$\Delta Q = M \Delta \mathbf{a} + \tilde{C} \Delta \mathbf{u} \tag{2.3.57}$$

ここで \tilde{C} は

$$\tilde{C} = \sum_e \begin{bmatrix} {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o + {}^m K_j^n & -{}^m B^s \\ r B_j^n & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.58}$$

で表される行列である。上式の線形化は、移流項の移流速度の増分を無視していることから、移流速度をを一定として接線をとっていることに相当する。この線形化は

$$Q = M \mathbf{a} + \tilde{C} \mathbf{u} \tag{2.3.59}$$

を満たすことから、内力の増分について割線法を適応しているといえる。内力の増分に対してこの移流速度を一定とする線形化を用いた割線法を適応しても、Newton-Raphson 法を適応した場合と比べて増分計算の反復回数がそれほど増加しないことが

知られている。また、非線形性の強い問題に対しては割線法の方が安定に計算が進むことから、流体の問題に対してはこの割線法を使うことが多い。

2.3.3 Newmark 法による時間積分法

Newmark 法とは陰的な時間積分スキームの一つである。

陰的な時間積分を行う場合、時間 t 、時間ステップ n の v_n と加速度 a_n から時刻 $t + \Delta t$ 、時間ステップ $n + 1$ での速度 v_{n+1} と加速度 a_{n+1} を求める際には以下の時刻 $n + 1$ における平衡方程式と時間積分関係式の 2 つの式を連立させて解く

1. 時刻 $t + \Delta t$ 、時間ステップ n における平衡方程式

$$M a_{n+1} + C(v_{n+1})v_{n+1} = F \quad (2.3.60)$$

2. 時間積分関係式

$$v_{n+1} = v_n + \int_t^{t+\Delta t} a dt \quad (2.3.61)$$

Newmark 法では時間積分関係式を次のように時間方向に離散化する

$$v_{n+1} = v_n + \{(1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}\} \Delta t \quad (2.3.62)$$

ここで γ は 0.5 から 1 の値をとるパラメータで、時間積分の精度、数値粘性などを無段階に調整することができる。例えば γ が 0.5 の場合、時間積分の精度は 2 次の中央差分となる。このため数値粘性は入らない。しかし、 γ が 0.5 よりも大きい場合は数値粘性が生じる。また、 γ が 1.0 の場合は 1 次精度である、後退オイラーによる時間積分と同じである。

非線形の方程式を解く場合には増分解析を行い解を更新しながら反復計算により解析を行う必要がある。Newmark 法の時間積分関係式の増分をとることにより、速度の増分 Δv と加速度の増分 Δa に次のような関係式が成り立つことがわかる。

$$\Delta v = \gamma \Delta t a \quad (2.3.63)$$

Newmark 法による非線形方程式の増分解析について手順を説明する。Newmark 法の時間積分関係式を満たす初期値を速度、加速度に与える。その後に残差と増分量に対する方程式を作り、解くことで速度、加速度の増分量を求め、速度、加速度を更新する。速度の増分量と加速度の増分量は上式によって関係づけられているので、通常、未知数として連立一次方程式を解く増分量を加速度の増分量か速度の増分量かにまとめて解く。このように連立一次方程式を解くためにまとめられた変数をプライマリ変数と呼ぶ。プライマリ変数について増分量を解くことで、上式の関係式を用いて残りの変数についても増分量を求める。

方程式の非線形性が大きい場合は 1 回目の反復での係数行列を求める際に予測値を用いると計算が不安定になり収束しない場合があるが、1 回目の反復のみ、前時間ステップの解から作られた係数行列を用いて増分量を計算すると改善することが知られている。そこで、1 回目の反復における係数行列の計算、予測値を基にした残差の計算を前ステップの解を用いて行い、解の更新の段階で予測値への更新と増分に対する更新を行う。

以上をまとめると Newmark 法による時間積分法を非線形の増分解析法とあわせて解く手法は次のようになる。ここでは例として加速度をプライマリ変数としている。また、速度、加速度の予測値 $\tilde{v}_{n+1}, \tilde{a}_{n+1}$ は

$$\begin{cases} \tilde{a}_{n+1} = a_n \\ \tilde{v}_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \end{cases} \quad (2.3.64)$$

であるとする。

1. 速度、加速度の初期化

速度、加速度の初期値に前のステップの解を代入

$$\begin{cases} a_{n+1}^1 = a_n \\ v_{n+1}^1 = v_n \end{cases} \quad (2.3.65)$$

2. i を 1 にセット

3. 増分量の計算

次の線形 1 次方程式をとくことで $\Delta \mathbf{a}^i$ を計算する。

$$M^* \Delta \mathbf{a}^i = \mathbf{R}^i \quad (2.3.66)$$

但し、修正質量行列 M^* 、右辺ベクトル \mathbf{R}^i については反復数によって次のように計算する。

$i = 1$ のとき

$$\begin{cases} M^* = M + \gamma \Delta t C(\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{R}^i = \mathbf{F} - M \mathbf{a}_n - C(\mathbf{v}_n) \mathbf{v}_n - \Delta t C(\mathbf{v}_n) \mathbf{a}_n \end{cases} \quad (2.3.67)$$

$i > 1$ のとき

$$\begin{cases} M^* = M + \gamma \Delta t C(\mathbf{v}_{n+1}^i) \\ \mathbf{R}^i = \mathbf{F} - M \mathbf{a}_{n+1}^i - C(\mathbf{v}_{n+1}^i) \mathbf{v}_{n+1}^i \end{cases} \quad (2.3.68)$$

4. 解の更新

$i = 1$ のとき

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{v}_{n+1}^i + \Delta t \mathbf{a}_n + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{a}^i \\ \mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{a}^i \end{cases} \quad (2.3.69)$$

$i > 1$ のとき

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{v}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{a}^i \\ \mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{a}^i \end{cases} \quad (2.3.70)$$

5. さらに反復が必要なら i を 1 進めて 3 番に進む 反復が必要ないなら時間を Δt だけすすめて Step1 に進む

2.4 SUPG,PSPGによる安定化有限要素法

2.4.1 1次元移流拡散方程式

移流項の安定化を考えるために Navier-Stokes 方程式から重要な部分を抜き出して、単純化した問題を用いて考察する。Navier-Stokes 方程式は運動量の輸送と拡散を表す方程式である。そこであるスカラー量 ϕ が輸送され、拡散される1次元問題つまり、1次元移流拡散問題について安定化を考察する。

2.4.2 差分法における風上差分

移流項の部分で風上差分を用いた離散化がよく使われる。一次の風上差分

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{cases} u \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} & (u > 0) \\ u \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} & (u < 0) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

は勾配を計算したい点 x_i に対して $\frac{1}{2}h$ だけ上流にある点における勾配を点 x_i での勾配とすることを意味している。

上式は中央差分を用いて

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = u \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} - \frac{|u|h}{2} \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \quad (2.4.2)$$

と変形できる。上式右辺第2項は風上差分を用いることによって人工的に導入された拡散項であるので人工拡散と呼ぶ。また、人工拡散の係数を人工拡散係数または数値粘性と呼ぶ。上式のように風上差分法による人工拡散係数 ν^∞ は

$$\nu^\infty = \frac{|u|h}{2} \quad (2.4.3)$$

であたえられる。これらを用いると人工粘性を導入した移流拡散方程式は中央差分を用いることによって次のように書ける。

$$u \frac{\phi^{i+1} - \phi^{i-1}}{2h} - \frac{|u|h}{2} \frac{\phi^{i-1} - 2\phi^i + \phi^{i+1}}{h^2} = \nu \frac{\phi^{i-1} - 2\phi^i + \phi^{i+1}}{h^2} \quad (2.4.4)$$

$$u \frac{\phi^{i+1} - \phi^{i-1}}{2h} = (\nu + \nu^\infty) \frac{\phi^{i-1} - 2\phi^i + \phi^{i+1}}{h^2} \quad (2.4.5)$$

このとき風上差分はもともとの移流拡散方程式を

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = (\nu + \nu^\infty) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.4.6)$$

と書き換え中央差分したものと等しい。移流項の影響が大きい場合は上式は精度よく厳密解と一致することが知られているが移流の影響が小さい場合に、実際の解と比べて数値解がなまされることが知られている。そこで移流の影響に応じて人工粘性の影響を変化させることで、数値解を厳密解と一致させることができる。

具体的には人工粘性 ν_{opt} を以下のように定めればよい

$$\nu_{opt} = \nu_{\infty} L(\lambda), \quad \lambda = \frac{\nu_{\infty}}{\nu_{opt}} = \frac{1}{2} \frac{|u|h}{\nu} = \frac{1}{2} Re_c \quad (2.4.7)$$

ここで Re_c はセルレイノルズ数であり、

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (2.4.8)$$

はランジュバン関数である。

$\lambda \rightarrow \infty$ で $L(\lambda) = 1$ であるから、このとき $\nu_{opt} = \nu_{\infty}$ となる。すなわち、移流項の大きな問題に対して1次風上差分法の解は厳密解に一致する。また、 $\lambda = 0$ で $L(0) = 0$ であるから移流項の影響が小さい場合は人工粘性の値も小さくなることが分かる。しかし、たとえ移流項の影響が小さくても人工粘性を加えた解のほうが厳密解に近くなることは注意が必要である。

以上のことから、

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = (\nu + \nu_{opt}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.4.9)$$

を中央差分で離散化すると厳密解を得ることができる。

2.4.3 風上差分の有限要素法への応用

1次元移流拡散問題にたいして、Bubnov-Galerkin法による有限要素法と中央差分による差分法が等しいことを示す。Bubnov-Galerkin法とは補間関数の形状関数と重み関数が等しいことをいう。微分方程式

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.4.10)$$

$$\int_0^1 \delta \phi u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int_0^1 \delta \phi \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx \quad (2.4.11)$$

$$\int_0^1 u \delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = - \int_0^1 \nu \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \quad (2.4.12)$$

Bubnov-Galerkin 法により形状関数と重み関数が互いに等しい関数 N であらわされているとする。つまり、

$$\phi = N^i \phi^i \quad (2.4.13)$$

$$\delta\phi = N^j \delta\phi^j \quad (2.4.14)$$

のように補間されているとする。上式を上式に代入すると

$$\int_0^1 u N^i \delta\phi^i \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx = - \int_0^1 \nu \frac{\partial N^i \delta\phi^i}{\partial x} \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx \quad (2.4.15)$$

両辺から節点 i での重みの値 ϕ_i を削除すると

$$\int_0^1 u N^i \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx = - \int_0^1 \nu \frac{\partial N^i}{\partial x} \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx \quad (2.4.16)$$

重み関数 N^i が 0 でない値を持つのは $x = [x_i - h, x_i + h]$ の範囲である。この範囲で形状関数 N^j が 0 でない値を持つのは $j = i - 1, i, i + 1$ の時のみである。よって重み関数 N^i についての以下の式が成り立つ。

$$u \int_{x_i-h}^{x_i+h} N^i \frac{\partial N^{i-1} \phi^{i-1}}{\partial x} + N^i \frac{\partial N^i \phi^i}{\partial x} + N^i \frac{\partial N^{i+1} \phi^{i+1}}{\partial x} dx \quad (2.4.17)$$

$$= -\nu \int_{x_i-h}^{x_i+h} \frac{\partial N^i}{\partial x} \frac{\partial N^{i-1} \phi^{i-1}}{\partial x} + \frac{\partial N^i}{\partial x} \frac{\partial N^i \phi^i}{\partial x} dx + \frac{\partial N^i}{\partial x} \frac{\partial N^{i+1} \phi^{i+1}}{\partial x} dx \quad (2.4.18)$$

この積分を実行すると以下の式が得られる。

$$u \frac{\phi^{i+1} - \phi^{i-1}}{2h} = \nu \frac{\phi^{i-1} - 2\phi^i + \phi^{i+1}}{h^2} \quad (2.4.19)$$

これは中央差分法を用いてこの問題を離散化した式と同一である。よって Bubnov-Galerkin 法と中央差分法は 1 次元の定常移流拡散問題では同一になることが分かる。

中央差分の場合は適切な人工粘性 ν_{opt} を導入することで数値解を厳密解にすることができることがわかった。そこで有限要素法の場合でも人工粘性 ν_{opt} を付加することによって数値解を厳密解にできると考えられる。

人工粘性を付加した弱形式は次のとおり

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = (\nu + \nu_{opt}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.4.20)$$

上式を参考にしてこの方程式の有限要素法による離散化は

$$\int_0^1 N^i u \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx = - \int_0^1 (\nu + \nu_{opt}) \frac{\partial N^i}{\partial x} \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx \quad (2.4.21)$$

となる。この式を変形して人工粘性の項を左辺の移流項に移動させると

$$\int_0^1 (N^i + \frac{\nu_{opt}}{u} \frac{\partial N^i}{\partial x}) u \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx = \int_0^1 \nu \frac{\partial N^i}{\partial x} \frac{\partial N^j \phi^j}{\partial x} dx \quad (2.4.22)$$

となる。この式の意味することは、上式の左辺つまり弱形式の移流項に対して重み関数を

$$N^i \rightarrow \tilde{N}^i \equiv N^i + \frac{\nu_{opt}}{u} \frac{\partial N^i}{\partial x} \quad (2.4.23)$$

のように変形させたことに等しい。この形状関数 \tilde{N}^i はもともとの形状関数 N^i に比べて風上側の重みが大きく、風下側の重みが小さくなっており、風上差分と同じ効果をもっていることが分かる。

2.4.4 多次元問題への風上差分法の応用

多次元における定常移流拡散方程式は次のようにかける。

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla_x \phi) = \nabla_x \cdot (\nu \nabla_x \phi) \quad (2.4.24)$$

定常1次元移流拡散方程式の場合は粘性項に数値粘性係数を付加し、Bubnov-Galerkin法による離散化を行うことで解を精度よく求めることができた。しかし上式の粘性項に数値粘性係数をそのまま付加した式

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla_x \phi) = \nabla_x \cdot \{(\nu + \nu_{opt}) \nabla_x \phi\} \quad (2.4.25)$$

をBubnov-Galerkin法によって離散化するとなまった非現実的な解を与えることが知られている。風上差分のもともとの考えは風上方向に移流項の計算点を移動させることで流線方向に数値拡散を加えるというものだった。しかし、上式は粘性をただ大きくしただけで、流線方向に数値拡散を加えるだけではなく、流線方向に垂直な方向に対しても数値拡散を加えているので実際よりも粘性が大きくなってしまいうので問題である。

そこで流線方向にのみ数値拡散項を付加することを考える。そのための準備として次のような流線方向 e_s の空間微分オペレータを考える。

$$\frac{\partial}{\partial x_s} = e_s \cdot \nabla_x \otimes = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla_x \otimes = \frac{v_i}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.4.26)$$

このオペレータを用いると例えば,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_s} \quad (2.4.27)$$

は流線方向 e_s に沿った物理量 \mathcal{A} の単位長さあたりの変化量であり, 流線方向の勾配 (gradient) である.

上式であらわされる多次元の定常移流拡散方程式に流線方向の人工粘性係数を付け加えた式は次のように書ける

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla_x \phi) = \nu \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\nu_{opt} \frac{\partial \phi}{\partial x_s} \right) \quad (2.4.28)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla_x \phi) = \nu \nabla^2 \phi + \mathbf{e}_s \cdot \left[\nabla_x \{ \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} \right] \quad (2.4.29)$$

上式を弱形式化すると

$$\int_v \delta \phi \mathbf{u} \cdot (\nabla_x \phi) dv = - \int_v \nu \nabla_x \delta \phi \cdot \nabla_x \phi \quad (2.4.30)$$

$$+ \delta \phi \mathbf{e}_s \cdot \left[\nabla_x \{ \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} \right] dv \quad (2.4.31)$$

右辺第3項について変形を行う.

$$\int_v \delta \phi \mathbf{e}_s \cdot \left[\nabla_x \{ \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} \right] dv \quad (2.4.32)$$

$$= \int_v \mathbf{e}_s \cdot \left[\nabla_x \{ \nu_{opt} \delta \phi \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} \right] \quad (2.4.33)$$

$$- \{ \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \delta \phi) \} \{ \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} dv \quad (2.4.34)$$

$$= \int_v \nabla_x \cdot \left[\{ \delta \phi \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} \mathbf{e}_s \right] \quad (2.4.35)$$

$$- \underbrace{\{ \nabla_x \cdot \mathbf{e}_s \}}_{=0} \{ \delta \phi \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} \quad (2.4.36)$$

$$- \{ \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \delta \phi) \} \{ \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} dv \quad (2.4.37)$$

第1項についてガウスの発散定理を適応する. また, 流線方向 e_s は一定とすると, 第2項は0となる. よって上式は

$$\int_s \mathbf{n} \cdot \underbrace{\left[\{ \delta \phi \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} \mathbf{e}_s \right]}_{=0} ds \quad (2.4.38)$$

$$- \int_v \{ \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \delta \phi) \} \{ \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} dv \quad (2.4.39)$$

$$= - \int_v \{ \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \delta \phi) \} \{ \nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot (\nabla_x \phi) \} dv \quad (2.4.40)$$

$$= - \int_v \left\{ \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot (\nabla_x \delta \phi) \right\} \left\{ \nu_{opt} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot (\nabla_x \phi) \right\} dv \quad (2.4.41)$$

$$= - \int_v \left\{ \frac{\nu_{opt}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \delta \phi) \right\} \left\{ \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \phi) \right\} dv \quad (2.4.42)$$

と式変形される。これを上式に代入すると

$$\int_v \left\{ \delta \phi + \frac{\nu_{opt}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \delta \phi) \right\} \left\{ \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \phi) \right\} dv = - \int_v \nu \nabla \delta \phi \cdot \nabla \phi \quad (2.4.43)$$

これは移流項の重み関数 $\delta \phi$ を $\hat{\delta} \phi$ と変化させることに等しい。

$$\delta \phi \rightarrow \hat{\delta} \phi = \delta \phi + \tau \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \delta \phi) \quad (2.4.44)$$

但し、 τ は以下で定義される安定化パラメータである。

$$\tau = \frac{\nu_{opt}}{|\mathbf{v}|^2} \quad (2.4.45)$$

ここで付加した数値拡散について詳しく調べる。数値拡散の項を変形すると、

$$\mathbf{e}_s \cdot \{ \nabla (\nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot \nabla \phi) \} = \nabla \cdot \{ \mathbf{e}_s (\nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot \nabla \phi) \} \quad (2.4.46)$$

$$= \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{e}_s)}_{=0} (\nu_{opt} \mathbf{e}_s \cdot \nabla \phi) \quad (2.4.47)$$

$$= \nabla \cdot \underbrace{\{ (\nu_{opt} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_s) \cdot \nabla \phi \}}_{\text{テンソル粘性}} \quad (2.4.48)$$

流線の方向の変化は無視できるとした。ここで

$$\nu_{opt} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_s = \nu_{opt} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \otimes \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (2.4.49)$$

$$= \frac{\nu_{opt}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (2.4.50)$$

$$= \tau \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (2.4.51)$$

はテンソル粘性という。流線の方向にのみ粘性となる値が存在するような異方性を有していることがわかる。

2.4.5 SU法とSUPG法

ここで前節まで考察した安定化の手法を実際の Navier-Stokes 方程式に応用することを考える。スカラー値の移流拡散方程式に対する安定化は

$$\int_v \{\delta\phi + \tau \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \delta\phi)\} \{\mathbf{v} \cdot (\nabla_x \phi)\} dv = - \int_v \nu \nabla \delta\phi \cdot \nabla \phi dv \quad (2.4.52)$$

のように表せた。これを拡張してベクトル \mathbf{b} に対する定常移流拡散方程式の安定化は

$$\int_v \{\delta\mathbf{b} + \tau \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{b})\} \cdot \{\mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{b})\} dv \quad (2.4.53)$$

$$= - \int_v \nu (\nabla \otimes \delta\mathbf{b}) : (\nabla \otimes \mathbf{b}) dv \quad (2.4.54)$$

となり、移流項の重み関数を以下のように \mathbf{b} から $\delta\mathbf{b}$ に変化させたものに等しい

$$\delta\mathbf{b} \rightarrow \tilde{\delta\mathbf{b}} = \delta\mathbf{b} + \tau \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{b}) \quad (2.4.55)$$

移流項の重み関数を上式のように変化させた Navier-Stokes 方程式は以下の通り

$$\begin{aligned} \rho \int_V \delta\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dV &+ \rho \int_v \{\delta\mathbf{v} + \tau \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{v})\} \cdot \{(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v}\} dV \\ &+ 2\mu \int_V \delta\mathbf{D} : \mathbf{D} dV - \int_V p(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) dV \\ &+ \int_V \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \\ &= \rho \int_V \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV + \int_{S_i} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_i \end{aligned} \quad (2.4.56)$$

これは Navier-Stokes 方程式に対して風上差分 (Strem Upwind) 法を適応した方法なので SU法と呼ばれる。SU法はソース項 (体積力項) が存在すると解が精度の悪いものとなることが知られている。その原因はSU法では移流項のみに異なる重み関数を用いた為であり、もともとの式の性質を変えてしまっているからである。

そこでSU法の拡張として移流項以外のすべての項にも移流項を安定化するための重み関数を用いる手法を適応すると、もともとの式の弱形式として正しいと考えられる。つまり、すべての項に対して重み関数を以下のように $\delta\mathbf{v}$ から $\tilde{\delta\mathbf{v}}$ へ変更する

$$\delta\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\delta\mathbf{v}} = \delta\mathbf{v} + \tau \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{v}) \quad (2.4.57)$$

上式で表せられる重み関数を離散化すると離散化された重み関数は次のように安定化を施すことによって変化されていると考えられる。

$$N^m \delta v_i^m \rightarrow \left\{ N^n + \tau N^o v_k^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \right\} \delta v_i^n \quad (2.4.58)$$

重み関数の内挿関数が形状関数と同じ関数で表されているような弱形式離散化のことを Bubnov-Galerkin 法と呼んだ。これと対応して、上式の場合のように重み関数の内挿関数が形状関数と異なる関数を用いている場合を一般的に Petrov-Galerkin 法と呼ぶ。上式の場合は、風上差分 (Stream Upwind) の効果を持った重み関数で Petrov-Galerkin 法による弱形式離散化を行っているので、このような移流項の安定化手法を SUPG 法と呼ぶ。

$\delta\omega = \tau\mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{v})$ とおき、オイラー表記された Cauchy の第一運動法則の弱形式化に適応すると

$$\int_V (\delta\mathbf{v} + \delta\omega) \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} - \rho\mathbf{g} - (\nabla_x \cdot \mathbf{T}) \right\} dV = 0 \quad (2.4.59)$$

非圧縮性 Newton 流体の構成式 $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ を代入する。また、重み関数が $\delta\mathbf{v}$ である分は上式を使って展開すると

$$\begin{aligned} & \int_V \delta\mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{v} \cdot \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} + \delta\mathbf{D} : 2\mu\mathbf{D} - p(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) + \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \delta\omega \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} - \rho\mathbf{g} - \nabla_x \cdot (2\mu\mathbf{D}) + \nabla_x p \right\} dV \\ & = \int_V \delta\mathbf{v} \cdot \rho\mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.4.60)$$

となる。最終的に SUPG 法は $\delta\omega = \tau\mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{v})$ を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_V \delta\mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{v} \cdot \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} + \delta\mathbf{D} : 2\mu\mathbf{D} - p(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) + \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \tau\mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{v}) \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} - \rho\mathbf{g} - \nabla_x \cdot (2\mu\mathbf{D}) + \nabla_x p \right\} dV \\ & = \int_V \delta\mathbf{v} \cdot \rho\mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

SUPG 法の場合は上式のように $\delta\omega = \tau\mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta\mathbf{v})$ であったが、 $\delta\omega$ は方程式の残差に掛けられているので任意の関数を選んでも良い。このように $\delta\omega$ に様々な種類の重み関数を入れることで安定化を図る手法を一般的に残差型の安定化という。

2.4.6 P SP G 法による圧力安定化

非圧縮性の拘束条件を持つ問題に対して変位 (流速) と不定静水圧を未知変数とする混合型の有限要素法により離散化を行った場合、変位 (流速) の補間関数と非決定応

力の補間関数が inf-sup 条件を満足していないとチェッカーフラッグ状の圧力振動を生じ、精度が悪くなることが知られている。このような問題に対する離散化として、変位（流速）と圧力の補間関数の次数を変えることや選択的低次積分などの手法を用いることがあるが、前節で紹介した残差型の安定化をもちいて安定化を行うこともできる。

チェッカーフラッグのような圧力の空間的な振動は圧力に粘性を加えることで取り除くことができることが知られている。ここで圧力に粘性を加えるということは、つまり

$$\nabla \cdot (\nu_p \nabla p) \quad (2.4.62)$$

を非圧縮性条件の方程式右辺に追加するということである。この項がチェッカーフラッグの発生を抑止するのは、この項が空間的な勾配の変化に対してそれを打ち消すような力を発生させるからである。しかしこの圧力に粘性を加えるこの方法は支配方程式である非圧縮性の条件を変化させているため解が非圧縮性を満足しなくなることが知られている。そこで残差型の安定化を用いることで支配方程式を変化させずにこの項と同じ安定化項を発生させることを考える。

上式を弱形式化すると

$$\int_V \delta p \nabla_x \cdot (\nu_p \nabla_x p) dV = - \int_V \nu_p (\nabla_x \delta p) \cdot (\nabla_x p) dV + \int_S \nu_p \delta p \mathbf{n} \cdot \nabla_x p dS \quad (2.4.63)$$

上式右辺第2項は境界条件を与える項であり、安定化に本質的に寄与しているのは上式右辺第1項だと考えられる。そこで残差型の安定化を利用して上式右辺第1項を作る。残差型の安定化の式に $\delta \omega = \nu_p \nabla_x \delta p$ を代入すると

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{v} \cdot \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} + \delta \mathbf{D} : 2\mu \mathbf{D} - p(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \nu_p (\nabla_x \delta p) \cdot \left\{ \rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{g} - \nabla_x \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \nabla_x p \right\} dV \\ & = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.4.64)$$

となり支配方程式を変化させることなく弱形式の重みを変化させることで圧力に対する安定化の項を付け加えることができる。この手法は圧力の安定化のために Petrov-Galerkin 法を使っているので P S P G (Pressure-Stabilized/Petrov-Galerkin) 法と呼ば

れる。ここで

$$\nu_p = \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \quad (2.4.65)$$

とおき，SUPG法とPSPG法をともに適応した Navier-Stokes 方程式は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{v} \cdot \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} + \delta \mathbf{D} : 2\mu \mathbf{D} - p(\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) + \delta p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \tau_{supg} \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{g} - \nabla_x \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \nabla p \right\} \\ & + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla_x \delta p) \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho (\mathbf{v} \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{g} - \nabla_x \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \nabla_x p \right\} dV \\ & = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t \end{aligned} \quad (2.4.66)$$

2.4.7 SUPG法とPSPG法による Navier-Stokes 方程式の有限要素法離散化

ここでは，移流速度を定数として割り線増分を求める。

慣性項に対する SUPG 安定化項を有限要素法離散化

$$\begin{aligned} & \int_v \tau_{supg} \mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} dv_e \quad (2.4.67) \\ & = \int_v \tau_{supg} v_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \rho \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \delta_{ij} dv_e \\ & = \tau_{supg} \rho \delta_{ij} \int_v N^o v_k^o \frac{\partial N^m \delta v_i^m}{\partial x_k} N^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n dv_e \\ & = \delta v_i^m \tau_{supg} \rho \delta_{ij} \int_v N^o N^n \frac{\partial N^m}{\partial x_k} dv_e v_k^o \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}^n \\ & = \delta v_i^m \quad {}^m M_{supg} \quad {}^n \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.4.68)$$

但し，

$${}^m_i \tilde{M}_{supg} \quad {}^n_j = \tau_{supg} \rho \delta_{ij} \int_v N^o N^n \frac{\partial N^m}{\partial x_k} dv_e v_k^o \quad (2.4.69)$$

移流項に対する SUPG 安定化項を有限要素法離散化

$$\begin{aligned}
 & \int_v \tau_{supg} \mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) dv_e \\
 &= \rho \tau_{supg} \int_v v_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} v_l \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \delta_{ij} dv_e \\
 &= \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_v N^o v_k^o \frac{\partial N^m \delta v_i^m}{\partial x_k} N^p v_l^p \frac{\partial N^n v_j^n}{\partial x_l} dv_e \\
 &= \delta v_i^m \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_v N^o N^p \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} dv_e v_k^o v_l^p v_j^n \\
 &= \delta v_i^m \Lambda_{supg j}^n v_j^n
 \end{aligned}$$

但し,

$$\Lambda_{supg j}^n = \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_v N^o N^p \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} dv_e v_k^o v_l^p \quad (2.4.70)$$

圧力勾配項に対する SUPG 安定化項を有限要素法離散化

$$\begin{aligned}
 & \int_v \tau_{supg} \mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \nabla p dv_e \\
 &= \tau_{supg} \int_{v_e} v_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial x_i} dv_e \\
 &= \tau_{supg} \int_{v_e} N^o v_k^o \frac{\partial N^m \delta v_i^m}{\partial x_k} \frac{\partial M^r p^r}{\partial x_i} dv_e \\
 &= \delta v_i^m \tau_{supg} \int_{v_e} N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial M^r}{\partial x_i} dv_e v_k^o p^r \\
 &= \delta v_i^m G_{supg}^r p^r \quad (2.4.71)
 \end{aligned}$$

但し,

$$G_{supg}^r = \tau_{supg} \int_{v_e} N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial M^r}{\partial x_i} dv_e v_k^o \quad (2.4.72)$$

慣性項に対する PSPG 安定化項に対する有限要素法離散化

$$\begin{aligned}
 & \int_{v_e} \tau_{pspg} (\nabla \delta p) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dv_e \\
 &= \tau_{pspg} \int_{v_e} \frac{\partial \delta p}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (2.4.73)
 \end{aligned}$$

$$= \tau_{pspg} \int_{v_e} \frac{\partial M^r \delta p^r}{\partial x_j} N^m \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n dv_e \quad (2.4.74)$$

$$= \delta p^r \tau_{pspg} \int_{v_e} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} N^n dv_e \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n \quad (2.4.75)$$

$$= \delta p^r \quad {}^r M_{pspgj}^n \quad \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x^n \quad (2.4.76)$$

但し,

$${}^r M_{pspgj}^n = \tau_{pspg} \int_{v_e} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} N^n dv_e \quad (2.4.77)$$

とした

移流項に対するP S P G安定化項を有限要素法離散化

$$\int_{v_e} \tau_{pspg} (\nabla p) \cdot \{ \mathbf{v} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) \} dv_e \quad (2.4.78)$$

$$= \tau_{pspg} \int_{v_e} \frac{\partial \delta p}{\partial x_j} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dv_e \quad (2.4.79)$$

$$= \tau_{pspg} \int_{v_e} \frac{\partial M^r \delta p^r}{\partial x_j} N^o v_k^o \frac{\partial N^n v_j^n}{\partial x_k} dv_e \quad (2.4.80)$$

$$= \delta p^r \tau_{pspg} \int_{v_e} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} N^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e v_k^o v_j^n \quad (2.4.81)$$

$$= \delta p^r \quad {}^r \bar{\Lambda}_{pspgj}^n \quad v_j^n \quad (2.4.82)$$

但し,

$${}^r \bar{\Lambda}_{pspgj}^n = \tau_{pspg} \int_{v_e} N^o \frac{\partial M^r}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e v_k^o \quad (2.4.83)$$

である。

圧力勾配項に対するP S P G安定化項の有限要素法離散化

$$\begin{aligned} & \int_{v_e} \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla_x \delta p) \cdot (\nabla_x p) dv_e \\ &= \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \int_{v_e} \frac{\partial \delta p}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial x_k} dv_e \\ &= \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \int_{v_e} \frac{\partial M^r \delta p^r}{\partial x_k} \frac{\partial M^s p^s}{\partial x_k} dv_e \\ &= \delta p^r \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \int_{v_e} \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \frac{\partial M^s}{\partial x_k} dv_e p^s \\ &= \delta p^r \quad {}^r \bar{B}_{pspg}^s \quad p^s \end{aligned} \quad (2.4.84)$$

但し,

$${}^r \bar{B}_{pspg}{}^s = \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \int_{v_e} \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \frac{\partial M^s}{\partial x_k} dv_e \quad (2.4.85)$$

となる.

これらを用いると SUPG法, PSPG法を適応した Navier-Stokes 方程式の有限要素法離散化は次のようにかける.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{F} \quad (2.4.86)$$

但し, \mathbf{M}, \mathbf{C} は以下のように表される.

$$\mathbf{M} = \sum_e \begin{bmatrix} {}^m M_j^n + {}^m M_{supg}{}^n & 0 \\ {}^r M_{pspg}{}^n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.87)$$

$$\mathbf{C} = \sum_e \begin{bmatrix} {}^m \Lambda_{kj}^{on} v_k^o + {}^m \Lambda_{supg}{}^n + {}^m K_j^n + {}^m K_{supg}{}^n & -{}^m B^s - {}^m B_{supg}{}^s \\ {}^r B_j^n + {}^r \Lambda_{pspg}{}^n + {}^r K_{pspg}{}^n & {}^r B_{pspg}{}^s \end{bmatrix} \quad (2.4.88)$$

また, この内力 \mathbf{Q} は \mathbf{a} や \mathbf{v} に対して非線形なので, 線形化して増分法により反復計算して解を求める. 内力の増分を計算する際に, 移流速度を定数として扱うことで, 移流速度の変化による内力の増分を無視するような線形化を考えた割線法を適応した場合, 内力の増分は次の通り

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{a} + \mathbf{C} \Delta \mathbf{u} \quad (2.4.89)$$

2.4.8 安定化パラメータ

次に, 安定化パラメータ τ_{SUPG} , τ_{PSPG} 並びに τ_{LSIC} の定義となるが, それには様々な研究が報告されている. 以下に代表的な定義式を示す.

1. 文献 (A.N.Brooks and T.J.R.Hughes, 1982^[19]) における τ_{SUPG} の定義

文献 (A.N.Brooks and T.J.R.Hughes, 1982^[19]) では τ_{SUPG} を以下のように定義する.

$$\tau_{SUPG} = \frac{\tilde{k}}{\|\mathbf{c}\|^2} \quad (2.4.90)$$

ここで人工拡散係数 \tilde{k} は, 要素ごとに求める.

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{\xi} u_\xi h_\xi + \tilde{\eta} u_\eta h_\eta + \tilde{\zeta} u_\zeta h_\zeta}{\sqrt{15}} \quad (2.4.91)$$

ただし, e_ξ, e_η, e_ζ はそれぞれ埋め込み座標 (ξ, η, ζ) の各方向の単位ベクトルである (すなわち, 形状関数を定義する自然座標を埋め込んだ共変基底ベクトルの単位ベクトル). さらに, h_ξ, h_η, h_ζ はそれぞれ ξ, η, ζ 方向の要素の代表長さである. また, \mathbf{u} と \mathbf{k} は要素の中心値で評価する.

$$\tilde{\xi} = (\coth\alpha_\xi) - \frac{1}{\alpha_\xi}, \quad \tilde{\eta} = (\coth\alpha_\eta) - \frac{1}{\alpha_\eta}, \quad \tilde{\zeta} = (\coth\alpha_\zeta) - \frac{1}{\alpha_\zeta} \quad (2.4.92)$$

$$\alpha_\xi = \frac{u_\xi h_\xi}{2\nu}, \quad \alpha_\eta = \frac{u_\eta h_\eta}{2\nu}, \quad \alpha_\zeta = \frac{u_\zeta h_\zeta}{2\nu} \quad (2.4.93)$$

$$u_\xi = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{u}, \quad u_\eta = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{u}, \quad u_\zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{u} \quad (2.4.94)$$

2. 文献 (T.E.Tezduyar, 1991^[20]) における τ_{SUPG} , τ_{PSPG} の定義

文献 (T.E.Tezduyar, 1991^[20]) では τ_{SUPG} と τ_{PSPG} を以下のように定義する.

$$\tau_{SUPG} = \frac{h}{2\|c\|} z(Re_c) \quad (2.4.95)$$

$$\tau_{PSPG} = \frac{h^\sharp}{2\|C\|} z(Re_C^\sharp) \quad (2.4.96)$$

ここで, Re_c は局所移流速度 c に基づく要素ごとの Reynolds 数で, Re_C^\sharp は全体平均化した移流速度 C に基づく要素ごとの Reynolds 数である. 具体的には, 以下のように計算される.

$$Re_c = \frac{\|c\|h}{2\nu} \quad (2.4.97)$$

$$Re_C^\sharp = \frac{\|C\|h^\sharp}{2\nu} \quad (2.4.98)$$

ただし, ν は流体の動粘性係数とし, Re_c における要素の代表長さ h は次式で計算する.

$$h = 2 \left(\sum_{a=1}^{NEVN} |\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} N_a| \right)^{-1} \quad (2.4.99)$$

ここで, N_a は a 節点の形状関数で, $NEVN$ は要素の速度節点数, \mathbf{s} は局所移流速度 c の規準化ベクトルとする. また, Re_C^\sharp における要素の代表長さ h^\sharp は, 2次元の場合はこの要素と同じ面積を持つ円の直径, 3次元の場合はこの要素と同じ体積を持つ球の直径とする. さらに, 関数 $z(Re)$ は以下のように定義する.

$$z(Re) = \begin{cases} Re/3 & (0 \leq Re \leq 3) \\ 1 & (3 < Re) \end{cases} \quad (2.4.100)$$

3. 文献 (T.E.Tezduyar, S.Mittal, S.E.Ray and R.Shih, 1992 ^[31]) における τ_{SUPG} , τ_{PSPG} , τ_{LSIC} の定義

文献 (T.E.Tezduyar, S.Mittal, S.E.Ray and R.Shih, 1992 ^[31]) では τ_{SUPG} , τ_{PSPG} 並びに τ_{LSIC} を以下のように定義する.

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|c\|}{h^\#} \right)^2 + \left\{ \frac{4\nu}{(h^\#)^2} \right\}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.4.101)$$

$$\tau_{LSIC} = \frac{\|c\|h^\#}{2} z(Re_c^\#) \quad (2.4.102)$$

ただし, 要素ごとの Reynolds 数 $Re_c^\#$ などは前述の定義に従う.