

## 薄肉開断面材の弾性力学 (V)

川 井 忠 彦

前号に引き続き、本号では両端において軸圧縮力  $P$  およびモーメント  $M_x, M_y, M_z$  を受ける薄肉開断面材の安定の問題を取り扱う。そして両端単純支持の柱についてその一般解を求め、偏心圧縮荷重を受ける I 形梁の曲げ振り座屈 (Horne の問題)、振りモーメントと軸力を受ける柱の安定 (Greenhill および Grammel の問題)、等について簡単に論じ、最後に、曲げモーメントと軸力を受ける柱の座屈特有方程式を、各種境界条件の場合についてもとめる。

### 14. 軸圧縮力と端部モーメントを受ける両端

#### 単純支持の柱の平衡方程式とその一般解

まずその基礎平衡方程式は前々号 (第 16 卷 第 4 号)

(93) 式より、つぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} &= -P(u + y_0 \varphi) - M_x \varphi + M_y - M_z \frac{dv}{dz} \\ EI_{yy} \frac{d^2 v}{dz^2} &= -P(v - x_0 \varphi) - M_x \varphi - M_y + M_z \frac{du}{dz} \\ EI_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr_s^2 - GK) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P \left( y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} - x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \\ &= -M_x \frac{d^2 u}{dz^2} - M_y \frac{d^2 v}{dz^2} + \beta_x \frac{d}{dz} \left( M_x \frac{d\varphi}{dz} \right) \\ &\quad - \beta_y \frac{d}{dz} \left( M_y \frac{d\varphi}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

いま柱の両端は単純支持の状態にあり、つぎのような端部モーメントが作用しているものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_X \left\{ 1 - \frac{(1-\alpha)z}{L} \right\} \\ M_y &= M_Y \left\{ 1 - \frac{(1-\beta)z}{L} \right\} \\ M_z &= \text{const} \end{aligned} \right\}$$

ここに  $\alpha, \beta$  は曲げモーメントの勾配を決める常数である。

さて (122) 式の一般解は前々号 (103) 式より直ちにつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} a_n \left( \lambda_n^4 - P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_{mn} - y_0 P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 c_n \\ + \sum_{m=1}^{\infty} c_m F_{mn} &= M_Y \sqrt{\frac{2}{L}} \left( \frac{n\pi}{L} \right) (\beta \cos n\pi - 1) \\ - \sum_{m=1}^{\infty} a_m N_{mn} + b_n \left( \mu_n^4 - P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + x_0 P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 c_n \\ + \sum_{m=1}^{\infty} c_m M_{mn} &= -M_X \sqrt{\frac{2}{L}} \left( \frac{n\pi}{L} \right) (\alpha \cos n\pi - 1) \\ - y_0 P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_n F_{nm} + x_0 P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 b_n \\ + \sum_{m=1}^{\infty} b_m M_{nm} + \left( y_n^4 + GK \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 - Pr_s^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) c_n \\ + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (-\beta_x Z_{mn} + \beta_y Z'_{mn}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

(123) 式中に現われる諸係数はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} A_{mn} &= -P \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \delta_{mn}, & B_{mn} &= -P \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \delta_{mn} \\ F_{mn} &= \begin{cases} -\frac{n^2 M_X (\alpha - 1)}{L^2} \left[ \frac{\cos(m-n)\pi - 1}{(m-n)^2} \right. \\ \quad \left. - \frac{\cos(m+n)\pi - 1}{(m+n)^2} \right] & (m \neq n) \\ -\frac{M_X (\alpha + 1)}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 & (m = n) \end{cases} \\ G_{mn} &= \begin{cases} -\frac{mn^2 \pi^2 M_z}{L^2} \left[ \frac{\cos(m-n)\pi - 1}{m-n} - \frac{\cos(m+n)\pi - 1}{m+n} \right] \\ & (m \neq n) \\ 0 & (m = n) \end{cases} \\ M_{mn} &= \begin{cases} -\frac{n^2 M_Y (\beta - 1)}{L^2} \left[ \frac{\cos(m-n)\pi - 1}{(m-n)^2} \right. \\ \quad \left. - \frac{\cos(m+n)\pi - 1}{(m+n)^2} \right] & (m \neq n) \\ -\frac{M_Y (\beta + 1)}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 & (m = n) \end{cases} \\ N_{mn} &= \begin{cases} -\frac{m^2 n \pi^2 M_z}{L^2} \left[ \frac{\cos(n-m)\pi - 1}{n-m} \right. \\ \quad \left. - \frac{\cos(m+n)\pi - 1}{m+n} \right] & (m \neq n) \\ 0 & (m = n) \end{cases} \\ Z_{mn} &= \begin{cases} \frac{mn M_X (1 - \alpha)}{L^2} \left\{ \frac{\cos(m-n)\pi - 1}{(m-n)^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{\cos(m+n)\pi - 1}{(m+n)^2} \right\} & (m \neq n) \\ -\frac{(1 + \alpha) M_X}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 & (m = n) \end{cases} \\ Z'_{mn} &= \begin{cases} \frac{mn M_Y (1 - \beta)}{L^2} \left\{ \frac{\cos(m-n)\pi - 1}{(m-n)^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{\cos(m+n)\pi - 1}{(m+n)^2} \right\} & (m \neq n) \\ -\frac{(1 + \beta) M_Y}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 & (m = n) \end{cases} \end{aligned}$$

(123) 式を  $a_n, b_n, c_n$  に関して解き、それらの値を (97) 式に代入すれば、柱の撓み ( $u, v$ ) および振り  $\varphi$  が決めることは前と同様である。また座屈荷重  $P_{cr}$  を決める特有方程式の第 1 近似式は、つぎのように求められる。

$$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -y_0 P - \frac{(1+\alpha)M_X}{2} \\ 0 & P_y - P & x_0 P - \frac{(1+\beta)M_Y}{2} \\ -y_0 P - \frac{(1+\alpha)M_X}{2} & x_0 P - \frac{(1+\beta)M_Y}{2} & r_s^2(P_T - P) + \frac{\beta_x}{2}(1+\alpha)M_X - \frac{\beta_y}{2}(1+\beta)M_Y \end{vmatrix} = 0 \quad (124)$$

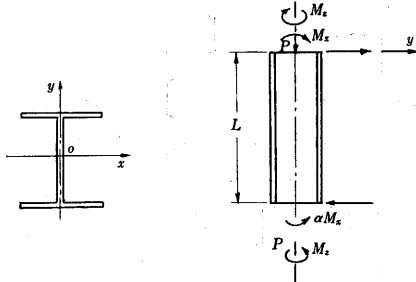
(124) 式は  $M_X$  および  $M_Y$  と  $P$  との相関曲面を表わし、常数の値のいかんによって、その画く曲面は複雑に変化する。いま特に  $x_0=y_0=0$  とすれば  $\beta_x=\beta_y=0$  となりさらに  $M_Y=0$  とすると (124) 式は次の二つの式に分かれる。

$$P_x = P_y \text{ または } \left\{ \frac{(1+\beta)}{2} M_Y \right\}^2 = r_s^2 (P_y - P) (P_T - P) \quad (125)$$

すなわち柱は  $y$  軸周りの純曲げ座屈かあるいは  $x$  軸周りの横倒れ座屈を起こすことを示している。これらの式の定量的な議論は改めて 16 節で行なうことにする。

15. 偏心軸圧縮力と振りモーメントを受ける両端支持 I 形断面柱の安定

M. R. Horne<sup>(21), (1)</sup> は  $x$  軸方向にのみ偏心(上下端で異なる)を有する軸圧縮力  $P$  と一定の振りモーメント  $M_z$  が作用する場合の両端支持 I 形断面柱の安定について研究している(第 46 図)。



第 46 図 I 形断面柱の偏心圧縮 (Horne の問題)

この場合の基礎方程式は (122) 式で  $x_0=y_0=\beta_x=\beta_y=0$ ,  $M_Y=0$  として次式のように得られる。

$$\begin{cases} EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} = -Pu - M_x \varphi - M_z \frac{dv}{dz} \\ EI_{yy} \frac{d^2 v}{dz^2} = -Pv - M_x + M_z \frac{du}{dz} \\ EI_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr_s^2 - GK) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -M_x \frac{d^2 u}{dz^2} \end{cases} \quad (126)$$

彼の研究においては柱の曲げに関する初めの 2 式の右辺第 3 項を考慮していない。したがって (126) 式の第 2 式は独立となり、第 1 式と第 3 式の組合せから起こる曲げ振り座屈の問題を解いているに過ぎない。もし柱の両端において振りモーメント  $M_z$  を加えるならば当然  $M_z$  の曲げの式への寄与があるわけであるが、彼の研究においてすでに出発点においてこの点の見落としがあるように思われる。

さて (126) 式の一般解は (123) 式において  $x_0=y_0$

$=\beta_x=\beta_y=0$ ,  $M_Y=0$  の外に  $M_{mn}=0$  として得られるが; その方程式から  $b_n, c_n$  を消去して未知係数  $a_n$  のみを含む連立方程式が、つぎのように得られる。

$$\begin{aligned} a_n \left( \lambda_n^4 - P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left( \frac{G_{mn} G_{im}}{\mu_m^4 - P \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{F_{mn} F_{mi}}{\nu_m^4 + GK \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - Pr_0^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2} \right) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_X \sqrt{\frac{2}{L}} \left( \frac{m\pi}{L} \right) (\alpha \cos n\pi - 1) G_{mn}}{\mu_m^4 - P \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2} \end{aligned} \quad (127)$$

Greenhill<sup>(22)</sup>, Grammel<sup>(23)</sup> らはシャフトの安定問題に関連して共心軸力  $P$  と端部振りモーメント  $M_z$  による柱の安定の問題を研究しているが (127) 式はこれらの問題の解をも含んでいる。

すなわち Grammel の問題は上記の Horne の問題において  $M_x=0$  とした場合に相等する。したがってその基礎方程式はつぎようになる。

$$\begin{cases} EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} + Pu + M_z \frac{dv}{dz} = 0 \\ EI_{yy} \frac{d^2 v}{dz^2} + Pv - M_z \frac{du}{dz} = 0 \\ EI_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} + (Pr_0^2 - GK) \frac{d\varphi}{dz} = M_z \end{cases} \quad (128)$$

(128) 式を見ればわかるように、二つの曲げに関する方程式が連成し、振りの方程式は独立となっている。したがって Grammel の問題においては、その直接変形様式は (128) 式の第 3 式で与えられる振り変形であり、座屈変形様式は初めの 2 式で与えられる曲げ座屈である。さて座屈荷重を決める特有方程式は (127) 式において  $M_x=0$ ,  $F_{mn}=0$  として

$$a_n \left( \lambda_n^4 - P \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i G_{mn} G_{iw}}{\mu_m^4 - P \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2} = 0 \quad (129)$$

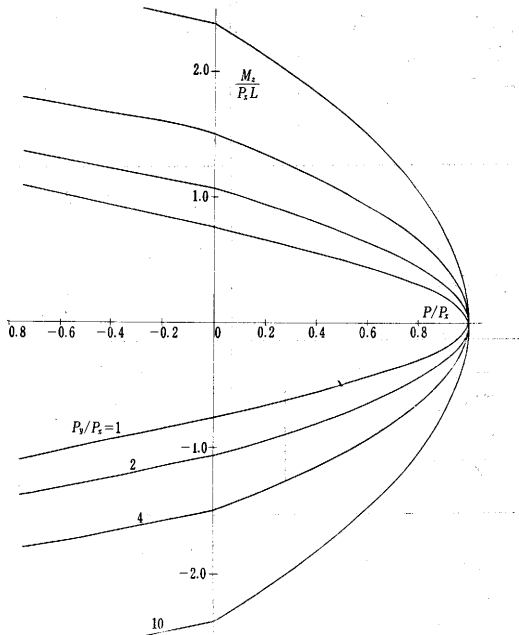
(129) 式はこの場合  $n=1, 3, 5, \dots$  と  $n=2, 4, 6, \dots$  の二つの方程式群に分かれてくる。いま、その第 1 近似式を書いてみると、つぎようになる。

$$\begin{cases} P_x - P = \frac{4M_z^2}{EI_{yy}} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{m}{\left( m^2 - \frac{P}{P_y} \right) (m^2 - 1)} \\ 4P_x - P = \frac{4M_z^2}{EI_{xx}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m}{\left( m^2 - \frac{P}{P_y} \right) (m^2 - 1)} \end{cases} \quad (130)$$

$m$  に関して初項のみを取ると

$$\left. \begin{aligned} (P - P_x)(P - 4P_y) &= \left(\frac{8M_x}{3L}\right)^2 \\ (P - 4P_x)(P - P_y) &= \left(\frac{8M_x}{3L}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

(131) 式は  $P$  と  $M$  との間に双曲線で表わされるような関係が存在することを示している。  $P_y/P_x$  をパラメータにして  $P$  と  $M_x$  の関係をグラフに画いてみると第 47 図のようになる(第 47 図)。



第 47 図 振れモーメント  $M_x$  と軸力  $P$  を受ける柱の安定 (Grammel の問題)

この図からわかるように  $P_x < P_y$  の場合、  $P > 0$ 、すなわち柱が圧縮力を受けるときには (131) 式の第 1 式、  $P < 0$ 、すなわち柱が引張り力を受けるときには第 2 式によってその相関性が決まることになる。柱が引張り力を受ける場合でも  $M_x$  の値のいかんによっては座屈が起こり得ることは注意すべきである。

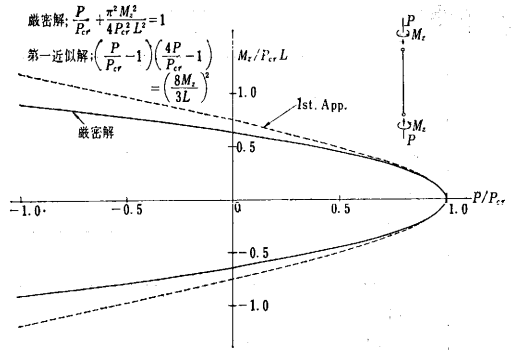
Greenhill は円形断面柱が、共心軸圧縮力と一様な振りモーメントを受ける場合の座屈を研究し、厳密な  $P-M_x$  相関式を求めた。この問題を (131) 式を用いて考えてみると、この場合  $P_x = P_y = P_{cr}$  とおくと

$$(P - P_{cr})(P - 4P_{cr}) = \left(\frac{8M_x}{3L}\right)^2$$

となる。これは第 47 図において  $P_y/P_x = 1$  の場合に相当するが、この第 1 近似解と厳密解の比較を行なったのが第 48 図である

すなわち柱が軸圧縮力を受ける場合、第 1 近似式の誤差は最悪の場合 ( $P=0$ ) で約 18% となる。

16. 端部に曲げモーメント  $M_x, M_y$  および軸圧縮力  $P$  を受ける柱の安定



第 48 図 振れモーメント  $M_x$  と軸力  $P$  を受ける軸対称断面材の安定 (Greenhill の問題)

本節では端部に曲げモーメント  $M_x, M_y$  および共心軸圧縮力  $P$  を受ける柱の安定の問題を各種の境界条件の場合について解き、その特有方程式の第 1 近似解を求めてみる。つぎにその代表的な場合について曲げモーメントと軸力の相関性について論ずる。

境界条件としては前号(第 16 卷 第 6 号)同様 7 種の場合について考えるが両端固定の場合は端部に曲げモーメントを加えることは実際問題として不可能であるから除外し、残りの 6 種の場合について取り扱うことにする。ところで (102) 式あるいは (103) 式の一般解に現われる  $F_{mn}$  および  $M_{mn}$  の計算に対してとるべき柱の静定曲げモーメントは前号と同様にして、つぎの第 13 表で与えられる。

第 13 表

境界条件の相似性	境界条件	$M_x$	$M_y$
相似境界	$s/s$ 	$M_x \left\{ 1 - \frac{(1-\alpha)Z}{L} \right\}$	$M_y \left\{ 1 - \frac{(1-\beta)Z}{L} \right\}$
	$c/s$ 	$M_x \left( \frac{Z}{L} \right)$	$M_y \left( \frac{Z}{L} \right)$
	$c/F$ 	$M_x$	$M_y$
非相似境界	$P/P$ 	0	$M_y \left\{ 1 - \frac{(1-\beta)Z}{L} \right\}$
	$c/P$ 	0	$M_y \left( \frac{Z}{L} \right)$
	$P/s$ 	$M_x \left( \frac{Z}{L} \right)$	$M_y \left\{ 1 - \frac{(1-\beta)Z}{L} \right\}$

この表を使用して  $F_{mn}, M_{mn}$  を計算し、座屈荷重を決定する特有方程式の第 1 近似解を求めれば、つぎの第 14 表のようになる。

前号で論じた偏心軸圧縮力を受ける柱の安定の特有方程式(第 9 表)は上の表で  $M_x = -Pe_y, M_y = Pe_x, \alpha = \beta = 1$  とした場合に外ならない。したがって第 14 表は柱に加えられた軸力  $P$  と端部曲げモーメント  $M_x, M_y$  の座屈平衡状態における相関性を表わす最も一般的な方程式を表わしている。これらの式の中に現われる  $P_x, P_y$  および  $P_T$  はいずれも対応する境界条件下にお

第 14 表 端部に曲げモーメント  $M_X, M_Y$  および軸力  $P$  を受ける柱の座屈特有方程式 (第一近似)

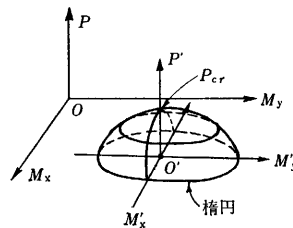
境界条件の相似性	境界条件	特 有 方 程 式	$P_x, P_y$ および $P_T$
相 似 境 界	S/S	$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -y_0 P - \frac{(1+\alpha)M_X}{2} \\ 0 & P_y - P & x_0 P - \frac{(1+\beta)M_Y}{2} \\ -y_0 P - \frac{(1+\alpha)M_X}{2} & x_0 P - \frac{(1+\beta)M_Y}{2} & r_s^2(P_T - P) + \frac{\beta_x}{2}(1+\alpha)M_X - \frac{\beta_y}{2}(1+\beta)M_Y \end{vmatrix} = 0$	$\begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2} \\ P_y &= \frac{\pi^2 EI_{yy}}{L^2} \\ r_s^2 P_T &= GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \end{aligned}$
	C/S	$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -y_0 P - 0.6327 M_x \\ 0 & P_y - P & x_0 P - 0.6327 M_y \\ -y_0 P - 0.6327 M_x & x_0 P - 0.6327 M_y & r_s^2(P_T - P) + 0.6327(\beta_x M_x - \beta_y M_y) \end{vmatrix} = 0$	$\begin{aligned} P_x &= 20.695 \frac{EI_{xx}}{L^2} \\ P_y &= 20.695 \frac{EI_{yy}}{L^2} \\ r_s^2 P_T &= GK + 20.695 \frac{EI_o}{L^2} \end{aligned}$
	C/F	$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -y_0 P - M_x \\ 0 & P_y - P & x_0 P - M_y \\ -y_0 P - M_x & x_0 P - M_y & r_s^2(P_T - P) + \beta_x M_x - \beta_y M_y \end{vmatrix} = 0$	$\begin{aligned} P_x &= 2.660 \frac{EI_{xx}}{L^2} \\ P_y &= 2.660 \frac{EI_{yy}}{L^2} \\ r_s^2 P_T &= GK + 2.660 \frac{EI_o}{L^2} \end{aligned}$
非 相 似 境 界	P/P	$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -0.9860 y_0 P \\ 0 & P_y - P & x_0 P - M_y(0.4929 + 0.5071\beta) \\ -0.7910 y_0 P & x_0 P - M_y(0.4929 + 0.5071\beta) & r_s^2(P_T - P) - \beta_y M_y(0.4929 + 0.5071\beta) \end{vmatrix} = 0$	$\begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2} \\ P_y &= 40.688 \frac{EI_{yy}}{L^2} \\ r_s^2 P_T &= GK + 40.688 \frac{EI_o}{L^2} \end{aligned}$
	C/P	$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -0.9040 y_0 P \\ 0 & P_y - P & x_0 P - 0.5071 M_y \\ -0.8444 y_0 P & x_0 P - 0.5071 M_y & r_s^2(P_T - P) - 0.507062 \beta_y M_y \end{vmatrix} = 0$	$\begin{aligned} P_x &= 20.695 \frac{EI_{xx}}{L^2} \\ P_y &= 40.688 \frac{EI_{yy}}{L^2} \\ r_s^2 P_T &= GK + 40.688 \frac{EI_o}{L^2} \end{aligned}$
	P/S	$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -0.4450 y_0 P - 0.5260 M_x \\ 0 & P_y - P & x_0 P - M_y(0.3680 + 0.6320\beta) \\ -0.3822 y_0 P & x_0 P - M_y(0.3680 + 0.6320\beta) & r_s^2(P_T - P) + 0.6320 \beta_x M_x - \beta_y M_y(0.3680 + 0.6320\beta) \end{vmatrix} = 0$	$\begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2} \\ P_y &= 20.695 \frac{EI_{yy}}{L^2} \\ r_s^2 P_T &= GK + 20.695 \frac{EI_o}{L^2} \end{aligned}$

ける純曲げあるいは純振り座屈の第一近似値をとっているの、それらの値に厳密値を代入すれば、さらに式の精度は向上するものと思われる。

形式的にはいずれの場合も同じように取り扱えるからその代表的なケースである両端単純支持の場合について少し論ずることとする。その特有方程式は  $P$  に関して三次、 $M_X, M_Y$  に関しては二次の相関曲面の式であって  $P_x, P_y$  および  $P_T; r_s, \alpha, \beta$  の値によって複雑に変化するが定性的には、つぎのようなことがいえる。いま  $M_X, M_Y$  および  $P$  の作る三次元空間を考えると

(a)  $P = \text{一定}$  の平面で相関曲面を切るとその切口に現われる曲線は一般に楕円であり、かつ座標軸をその平面内で単に平行移動するだけで楕円の標準形に直すことができる。

(b)  $P > 0$ , すなわち  $P$  が軸圧縮力である場合にはその考慮すべき値の範囲は  $P < P_{er}$  で十分である。ここに  $P_{er}$  は  $M_X = M_Y = 0$  すなわち軸圧縮力のみ



第 49 図 座屈平衡状態における  $P-M_X-M_Y$  相関曲面

る相関曲面を平行移動によって標準化した場合、

による座屈荷重を示している。そのわけは  $M_X, M_Y$  のいずれかが零でない場合には、その三次方程式の最小根は軸圧縮座屈荷重  $P_{er}$  より大きくはなり得ないからである

(物理的にもそれは明らかである)。換言すると特有方程式の表わしてい

$P$  = 一定の平面での切口には標準楕円が得られ、その楕円は  $P$  をパラメータにして変化し、 $P$  が零から  $P_{cr}$  まで変化すると同心楕円群を画きつつ、しだいに収斂し、 $P = P_{cr}$  では点になる曲面であることがわかる(第 49 図)。

(c) いま簡単のために、柱は二軸対称断面、すなわち  $x_0 = y_0 = 0$  とすれば(この仮定は議論の一般性を傷つけない)、 $\beta_x = \beta_y = 0$  となり、特有方程式は、つぎのようになる。

$$r_0^2(P_x - P)(P_y - P)(P_T - P) - (P_x - P)\left(\frac{(1 + \beta)M_y}{2}\right)^2 - (P_y - P)\left(\frac{(1 + \alpha)M_x}{2}\right)^2 = 0 \quad (132-a)$$

あるいは

$$\frac{\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)^2 M_x^2}{r_0^2(P_x - P)(P_T - P)} + \frac{\left(\frac{1 + \beta}{2}\right)^2 M_y^2}{r_0^2(P_y - P)(P_T - P)} = 1 \quad (132-b)$$

また  $M_{xcr}^2 = r_0^2 P_x P_T$ ,  $M_{ycr}^2 = r_0^2 P_y P_T$  とおくと

$$\frac{\left(\frac{M_x}{M_{xcr}}\right)^2}{\left(\frac{2}{1 + \alpha}\right)^2 \left(1 - \frac{P}{P_x}\right)\left(1 - \frac{P}{P_T}\right)} + \frac{\left(\frac{M_y}{M_{ycr}}\right)^2}{\left(\frac{2}{1 + \beta}\right)^2 \left(1 - \frac{P}{P_y}\right)\left(1 - \frac{P}{P_T}\right)} = 1 \quad (132-c)$$

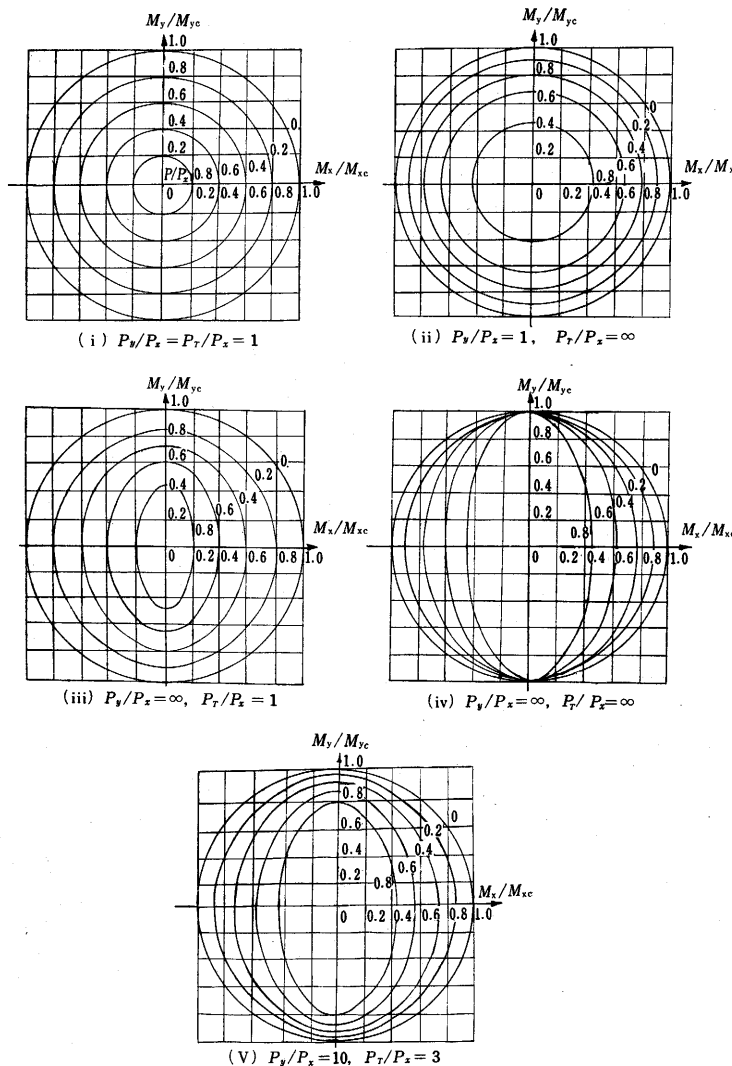
(132-b) 式あるいは (132-c) 式は軸力  $P$  をパラメータとする曲げモーメント  $M_x$ ,  $M_y$  の座屈相関曲線を示す。すなわち一定の  $P$  に対する相関曲面の切口に現われる楕円の方程式である。これらの式を見れば判るように  $\alpha = \beta = -1$  の場合には適用できない。

それは (132) 式が特有方程式の第一近似解であることを考えれば、やむを得ぬことである。この点については、また後で触れることにする。いま  $\alpha = \beta = 1$  すなわち一樣なモーメントを受ける場合について  $P_x < P_y < P_T$  と仮定し、 $P_y/P_x$ ,  $P_T/P_x$  の値を与え、 $P/P_x$  をパラメータとし、 $M_x$ ,  $M_y$  の相関曲線を書いてみると左の第 50 図のようになる。(図中  $M_{yc}$  は、 $M_{ycr}$  の誤り)

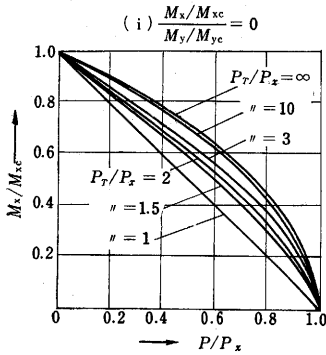
またこれとは別にモーメント比  $M_y/M_x$  を一定にし  $M_x$  と  $P/P_x$  の相関曲線を二三の場合について画いたのが第 51 図である(図中  $M_{xc}$  は  $M_{xcr}$  の、 $M_{yc}$  は  $M_{ycr}$  の誤り)。これは相関曲面の  $P$  軸を含む平面による切口に現われる曲線を示している。

すなわち  $P_y/P_x$ ,  $P_T/P_x$  の種々の組合せの値について、 $M_x$ ,  $M_y$  の相関曲線を  $P/P_x$  をパラメータにして作っておくと、ある荷重  $P$  の場合における座屈モーメントの相関曲線となり、また逆にモーメントの値が与えられている場合には座屈荷重  $P_{cr}$  が試索的ではあるが計算できることになる。したがって前号で取り扱った偏心軸圧縮力  $P$  の限界値も図式に求めることができる。

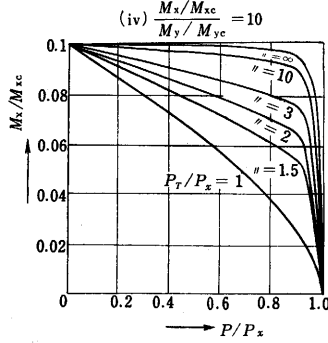
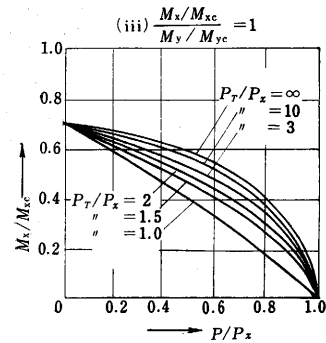
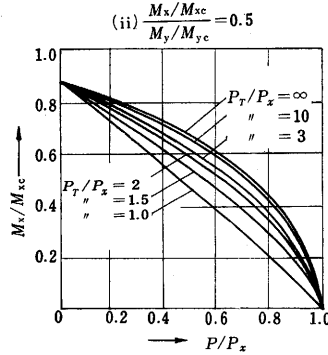
このようにして長い柱に対する設計の合理化が可能になり、実際各方面において使われる長柱の設計資料が集積できるものと思われる。なおこれらの点に関連して仲教授と加藤助教授は、著書「単一材の座屈」<sup>24)</sup>の中で詳論しておられるので、これ以上立ち入った議論は行わないことにする。



第 50 図 軸力  $P$  および端部モーメント  $M_x$  および  $M_y$  を受ける柱の安定(両端支持)



この場合  $P_y$  は独立である。  
したがってグラフは  $P_y/P_x$  に無関係となる。



(v)  $\frac{M_x/M_{xcr}}{M_y/M_{ycr}} = \infty$  この場合は  $P/P_y, P_T/P_y$  をパラメータにとれば (i) の場合に帰する ( $P_x$  は独立)。  
第 51 図 軸力  $P$  および端部モーメント  $M_x, M_y$  を受ける柱の安定 (両端支持)

最後に第 14 表より柱が両端において曲げモーメント  $M_y$  と軸力  $P$  を受ける場合の座屈特有方程式を求めると、第 15 表 (次ページ) のようになる。ただし議論を簡単にするため  $y_0=0$  とする。

ここで注意しなければならないことは、第 15 表で与えられる座屈特有方程式は必ずしも第 14 表において  $M_x=0, y_0=0$  として得られる式と一致していない点である。

たとえば相似境界条件の固定一支持 (C/S) の場合を例にとって考えると、この場合  $x$  方向の撓み  $u(z)$  は独立となり、横倒れ座屈の特有方程式はこの独立になった方向の梁柱の正しい曲げモーメントの式を使って求めなければならない。すなわち

$$M_y = M_y \left( -\frac{1}{2} + \frac{3z}{2L} \right)$$

ここに  $M_x$  は梁柱の右端における曲げモーメントの値を示す。この式を使って求めた横倒れ座屈の特有方程式が第 15 表には与えられている。

ふたたび前と同様両端支持の場合について考えるならば、その特有方程式は  $M_y$  と  $P$  に関する二次曲線の方程式であり、 $x_0$  が零でなければ、その相乗積  $PM_y$  の項が存在するので一般に平行移動と回転を行なって、その標準形に直すことができる。そして  $M_y^2$  と  $P^2$  の符号が相反することから双曲線の方程式であることは直ぐわかる。

断面を二軸対称としても議論の一般性を傷けないから  $x_0=0$  とすると

$$\left( \frac{1+\beta}{2} \right)^2 M_y^2 = r_0^2 (P_y - P) (P_T - P)$$

これはすでに導出した (125) 式である。  
 $\beta$  をパラメータとして  $M_y$  と  $P$  の相関性を求めてみるとつぎの第 52 図が得られる (次ページ)。

さて一様な曲げモーメントの場合は  $\beta=1$  として容易に

$$\left( \frac{M_y}{M_{ycr}} \right)^2 = \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) \left( 1 - \frac{P}{P_T} \right) \quad (133)$$

ここに  $M_{ycr}^2 = r_s^2 P_y P_T$

これは (132-c) 式において  $M_x=0$  として直接求めることもできる。

いま  $P_T > P_y$  と仮定し、 $\lambda = P_T/P_y$  とすると  $\lambda > 1$  であり

$$\left( \frac{M_y}{M_{ycr}} \right)^2 = \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) \left( 1 - \frac{P}{\lambda P_y} \right) \quad (134)$$

となる。ここで二つの特別な場合を考える。

第一の場合  $\lambda \rightarrow \infty$ 、すなわち  $P_T \gg P_y$  とすると (134) 式は

$$\left( \frac{M_y}{M_{ycr}} \right)^2 = 1 - \frac{P}{P_y}$$

また  $\lambda = P_T/P_y = 1$  とすれば

$$\left( \frac{M_y}{M_{ycr}} \right)^2 = \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right)^2$$

したがって  $P > 0$  とすれば一般に  $P/P_y \leq 1$  であるから

$$\frac{M_y}{M_{ycr}} + \frac{P}{P_y} = 1 \quad (135)$$

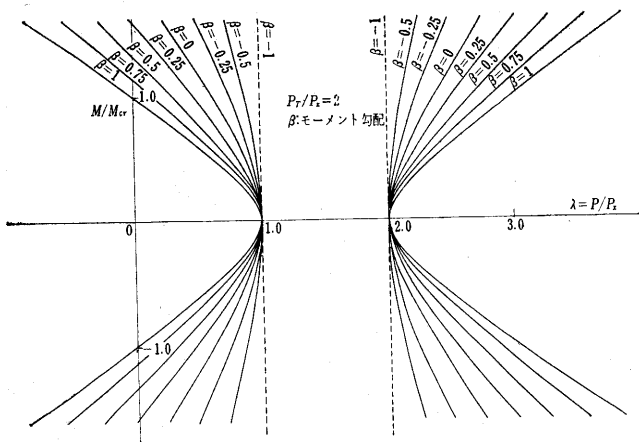
が得られる。一軸方向にのみ偏心した軸圧縮力  $P$  を受ける柱においては、全応力の大部分は荷重の偏心による曲げモーメントによって生ずるものであるが、曲げの最大許容応力  $F_b$  は通常柱としての部材に対する平均の許容軸圧縮力  $F_c$  よりも大きい。したがってある特定の柱の場合曲げモーメントと軸圧縮力の大きさの相対的關係

第 15 表 座屈平衡状態における  $P-M_Y$  相関曲線 (第一近似)

境界条件の相似性	境界条件	特 有 方 程 式	$P_Y, P_T$
相 似 境 界	S/S	$\left\{ \frac{(1+\beta)}{2} M_Y - x_0 P \right\}^2 + \frac{\beta_y}{2} (1+\beta) M_Y (P_Y - P) = r_s^2 (P_Y - P) (P_T - P)$	$P_Y = \frac{\pi^2 E I_{yy}}{L^2}$ $r_s^2 P_T = GK + \frac{\pi^2 E I_o}{L^2}$
	C/S	$\{0.4491 M_Y - x_0 P\}^2 + 0.4491 \beta_y M_Y (P_Y - P) = r_s^2 (P_Y - P) (P_T - P)$	$P_Y = 20.695 \frac{E I_{yy}}{L^2}$ $r_s^2 P_T = GK + 20.695 \frac{E I_o}{L^2}$
	C/F	$(M_Y - x_0 P)^2 + \beta_s M_Y (P_Y - P) = r_s^2 (P_Y - P) (P_T - P)$	$P_Y = 2.660 \frac{E I_{ys}}{L^2}$ $r_s^2 P_T = GK + 2.660 \frac{E I_o}{L^2}$
非 相 似 境 界	P/P	$\{M_Y (0.4929 + 0.5071\beta) - x_0 P\}^2 + \beta_y M_Y (0.4929 + 0.5071\beta) (P_Y - P) = r_s^2 (P_Y - P) (P_T - P)$	$P_Y = 40.688 \frac{E I_{yy}}{L^2}$ $r_s^2 P_T = GK + 40.688 \frac{E I_o}{L^2}$
	C/P	$\{0.2606 M_Y - x_0 P\}^2 + 0.2606 \beta_y M_Y (P_Y - P) = r_s^2 (P_Y - P) (P_T - P)$	$P_Y = 40.688 \frac{E I_{yy}}{L^2}$ $r_s^2 P_T = GK + 40.688 \frac{E I_o}{L^2}$
	P/S	$\{M_Y (0.3680 + 0.6320\beta) - x_0 P\}^2 + \beta_y M_Y (0.3680 + 0.6320\beta) \times P_Y - P = r_s^2 (P_Y - P) (P_T - P)$	$P_Y = 20.695 \frac{E I_{yy}}{L^2}$ $r_s^2 P_T = GK + 20.695 \frac{E I_o}{L^2}$

第 16 表 端部曲げモーメントによる梁の横倒れ座屈 (第一近似)

境界条件の相似性	境界条件	特 有 方 程 式	$P_y, P_T$
相 似 境 界	S/S	$\left( \frac{1+\beta}{2} \right)^2 M_Y^2 + \frac{\beta_y}{2} (1+\beta) M_Y P_Y - r_s^2 P_y P_T = 0$	第 15 表に準ずる
	C/S	$0.4491^2 M_Y^2 + 0.4491 \beta_y M_Y P_Y - r_s^2 P_y P_T = 0$	"
	C/F	$M_Y^2 + \beta_y P_y M_Y - r_s^2 P_y P_T = 0$	"
非 相 似 境 界	P/P	$M_Y^2 (0.4929 + 0.5071\beta)^2 + \beta_y M_Y (0.4929 + 0.5071\beta) P_Y - r_s^2 P_y P_T = 0$	"
	C/P	$0.26059^2 M_Y^2 + 0.26059 \beta_y M_Y P_Y - r_s^2 P_y P_T = 0$	"
	P/S	$(0.3680 + 0.6320\beta)^2 M_Y^2 + \beta_y M_Y (0.3680 + 0.6320\beta) - r_s^2 P_y P_T = 0$	"

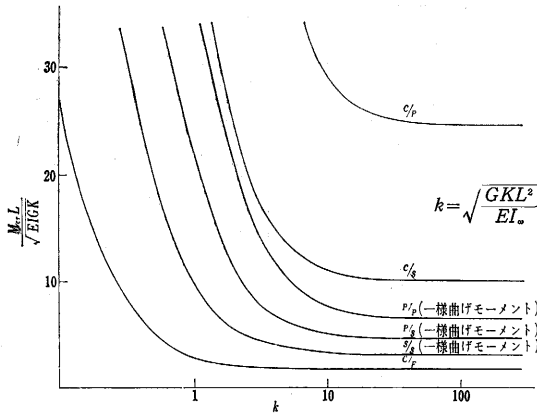


第 52 図 軸力と曲げモーメントによる柱の横倒れ座屈 (単純支持, 第一近似)

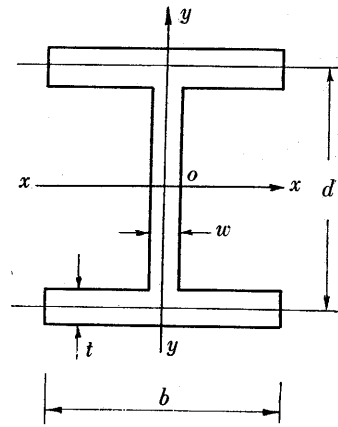
によって、この二つの応力の間にあるバランスのとれた関係が必要になってくる。(135)式はそのような関係を与える一つの式であって  $f_c$  を軸圧縮力  $P$  によって生ずる軸方向の応力、 $f_b$  を曲げモーメント  $M_Y$  によって生ずる最大曲げ応力とすれば容易に次式のように書き換えることができる。

$$\frac{f_c}{F_c} + \frac{f_b}{F_b} = 1.0 \quad (136)$$

この式はもし柱が軸力のみを受け、曲げモーメントの作用を受けなければ、柱は応力  $F_c$  によって設計し、また柱が圧縮力を受けない場合には、その許容応力は曲げの最大許容応力  $F_b$  になることを示している。そして、この二つの特別な場合の中間においては (136)式は二種類の応力の相対



第 53 図 端部曲げモーメントを受ける二軸対称断面梁の横倒れ座屈 (第一近似)



第 54 図 I 形梁の等価断面

の重要性に基づいて“重み”をつけるべきであることを提案している。(136) 式は AISC Manual において規格化されているもので、しばしば Interaction Formula と呼ばれ、Manual の中では二つの比の和が 1 を越えてはならないと規定している。この式は構造用鋼材のみならず他の金属材料にも有効であり、Aluminium Company of America は 1945 年に同じような関係式を提案し、また Forest Products Laboratory は同じ目的に使用する一連の公式を作っている。

また特に軸圧縮力  $P$  が零になった場合を考えると、梁の曲げモーメント  $M_T$  による横倒れ座屈の特有方程式となる(第 16 表 前ページ)。一般に  $\beta_y$  が零でない場合には  $M_T$  は相異なる正負の二実根を有し、いずれも物理的には可能な座屈モーメントを表わしている。いま正の曲げモーメントについてのみ考えると  $\beta_y > 0$  ならば、その値は  $\beta_y = 0$  の場合に比して座屈モーメントは低くなり、 $\beta_y < 0$  ならば高くなる。

この逆が負の曲げモーメントの場合には成り立つ。したがって断面の非対称性は座屈モーメントをある場合には高め、ある場合には低くする傾向があることを示している。特に  $\beta_y = 0$  の場合を例にとって  $M_{ycr}$  と  $k^2 = GKL^2/EI_\omega$  との関係を図に画いたのが、上の第 53 図である。

さて (133) 式より

$$M_{ycr} = \sqrt{r_s^2 P_y P_T}$$

であるが、これに

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2}, \quad P_T = \frac{1}{r_s^2} \left( GK + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right)$$

を代入すれば

$$M_{ycr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_{xx} \left( GK + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right)} \quad (137)$$

(137) 式は Timoshenko や Bleich の得た結果と一致している。I 形梁の断面を第 54 図のように表わし、ウェブの板厚  $w = 0$  と仮定して、断面の諸常数をつぎのよう

にとると

$$I_{xx} = \frac{tb^3}{6}$$

$$EI_\omega = \frac{EI_{xx} d^4}{4}$$

$$GK = \frac{2}{3} Gbt^3 \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0.384E$$

$$I_{yy} = 2bt \left( \frac{d}{2} \right)^2 = \frac{btd^2}{2}$$

$$S = \frac{I_{yy}}{d/2} = btd$$

$$\sigma_{cr} = \frac{M_{cr} \left( \frac{d}{2} \right)}{I_{yy}}$$

$$= \frac{\pi}{L} \cdot \frac{1}{btd} \sqrt{\frac{Etb^3}{6} \left( 0.256Ebt^3 + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{Etb^3 d^2}{24} \right)}$$

この式の根号内の第 2 項は第 1 項に比して小さいから無視すると

$$\sigma_{cr} \approx \frac{\pi}{L} \cdot \frac{1}{btd} \cdot 0.206Et^2 b^2 = \frac{19.5 \times 10^6}{Ld/bt}$$

安全率を  $33/20 = 1.65$  とすれば

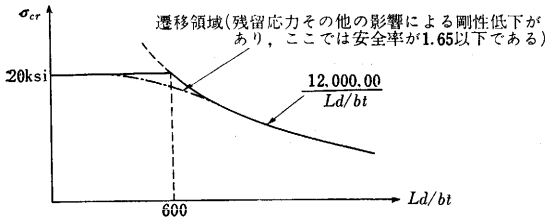
$$\sigma_{cr} = \sigma_{all} = \frac{12,000,000}{Ld/bt} \text{ psi} \quad (138)$$

これは AISC の横倒れ座屈に関する公式 (1948 年) である。

この AISC の規格によると I 形あるいは広幅形鋼の梁の圧縮側のフランジが横方向に支持されていない場合には、その梁は上の (138) 式で与えられる応力を梁の中立軸から最も遠い繊維の換算応力 (reduced stress) として、ふつうの曲げの公式を用いて設計しなければならない。 $L$  は横方向に支持されていない部分の梁の長さで、片持梁の場合には  $L$  は実際の長さの 2 倍にとる。

この公式は  $Ld/bt \geq 600$  の場合のみ適用され、 $Ld/bt \leq 600$  の場合には一様に曲げ許容応力 20,000 psi を使用する (第 55 図) (138) 式は合理的な解析結果を近似的に簡単な式で表現しようと試みている点で AISC の柱の曲げ座屈に関する放物線公式とやや似ている。ま





第 55 図 AISC の梁柱の横倒れ座屈公式 (Ld/bt 公式)

た同じような公式が他の材料に対しても提案され、使われている。

17. 曲げモーメントを受ける静定梁の横倒れ座屈に関する高精度解析法

梁が端部曲げモーメントによって横倒れ座屈を起こす場合の特有方程式は一般に以上に述べた解析法により求めることができるが、その第一近似式はモーメント勾配がある場合その適用範囲に限界があった。梁が静定、すなわち両端支持あるいは片持梁の場合にはこれよりも精度のよい解析法が考えられる。本節はこれについて説明しよう。まずこの場合の座屈平衡状態に関する基礎方程式は、つぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} &= -M_x \varphi + M_y \\ EI_{yy} \frac{d^2 v}{dz^2} &= -M_x - M_y \varphi \\ EI_{xx} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -M_x \frac{d^2 u}{dz^2} - M_y \frac{d^2 v}{dz^2} \\ &+ \beta_x \frac{d}{dz} \left( M_x \frac{d\varphi}{dz} \right) - \beta_y \frac{d}{dz} \left( M_y \frac{d\varphi}{dz} \right) \end{aligned} \right\} (139)$$

これらの三つの式から  $u, v$  を消去すれば振り  $\varphi$  のみに関する微分方程式が、つぎのように得られる。

$$\begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= \left( \frac{M_x^2}{EI_{xx}} + \frac{M_y^2}{EI_{yy}} \right) \varphi \\ &+ \frac{M_x M_y}{E} \left( \frac{1}{I_{yy}} - \frac{1}{I_{xx}} \right) + \beta_x \frac{d}{dz} \left( M_x \frac{d\varphi}{dz} \right) \\ &- \beta_y \frac{d}{dz} \left( M_y \frac{d\varphi}{dz} \right) \end{aligned} \quad (140)$$

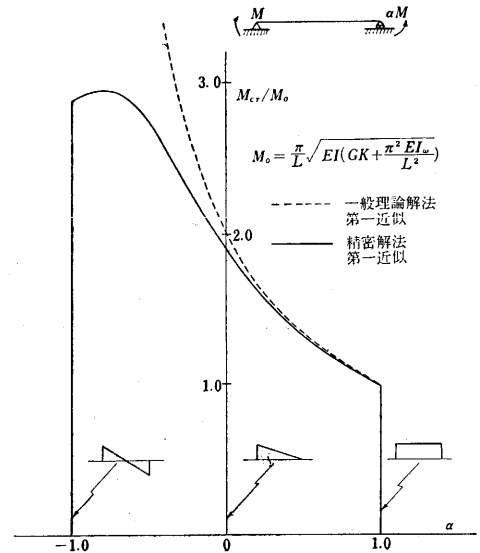
(140) 式は前々号で述べた一般的解析法と同じように解くことができる。すなわち

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z)$$

としてその直交性を利用すれば、つぎのような未知係数  $c_n$  に関する方程式が容易に求められる。

$$\begin{aligned} \nu_n^4 C_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left( GK A_{mn} - \frac{\Pi_{mn}}{EI_{xx}} - \frac{\Omega_{mn}}{EI_{yy}} - \beta_x Z_{mn} \right. \\ \left. + \beta_y Z'_{mn} \right) &= \left( \frac{1}{EI_{yy}} - \frac{1}{EI_{xx}} \right) \vartheta_n \end{aligned} \quad (141)$$

ここに  $A_{mn}, Z_{mn}, Z'_{mn}$  は (101) 式で与えた係数であるが、 $\Pi_{mn}, \Omega_{mn}$ 、および  $\vartheta_n$  は次式で定義される係数である。



第 56 図 端部モーメントによる梁の横倒れ座屈 (S/S)

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{mn} &= \int_0^L M_x^2 \varphi_m(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi \quad \vartheta_n = \int_0^L M_x M_y \varphi_n(\xi) d\xi \\ \Omega_{mn} &= \int_0^L M_y^2 \varphi_m(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} (142)$$

すなわち梁が曲げモーメント  $M_x$  および  $M_y$  を受ける場合には一般に荷重が加わり始めると同時に変形が生じていわゆる座屈現象は起こらない。特に  $I_{xx} = I_{yy}$  の場合には (141) 式の右边が零になるから横倒れ座屈が起ることになる。

そこで座屈特有方程式の第一近似を求めてみると、つぎのようになる。

$$\nu_1^4 + GK A_{11} = \frac{\Pi_{11}}{EI_{xx}} + \frac{\Omega_{11}}{EI_{yy}} - \beta_x Z_{11} + \beta_y Z'_{11} \quad (143)$$

(143) 式を用いて両端支持および片持梁に対する特有方程式を求めてみると、つぎの第 17 表のようになる。

この表からもわかるように特有方程式は  $M_x, M_y$  に関する楕円の方程式で単に座標軸を平行移動するだけで標準形に直すことができる。この特有方程式によれば両端支持梁で  $\alpha = -1$  あるいは  $\beta = -1$  の場合も座屈条件が求められる。すなわち  $M_x = 0$  としてその特有方程式を  $M_x$  と  $\alpha$  を座標軸にとって画いてみると、第 56 図のような結果が得られる。この図からわかるように、 $\alpha = -0.8$  の辺に  $M_{cr}$  が最大になる点が存在する。比較のため一般的解析法により求めた特有方程式の第一近似解が画いてあるが、これから第一近似解は  $0 \leq \alpha \leq 1$  の範囲内においては、十分使える式であることがわかる。  
(14ページへつづく)

$$\nu = \left(\frac{1}{3} - \frac{k^2}{3}\right)m^3 + \left(\frac{2}{15} - \frac{k^2}{3} + \frac{k^4}{5}\right)m^5 + Q(m^7),$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{k^2}{3}\right)m^2 - \nu \approx 0$$

ゆえに  $m \approx \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu$

(21) を解いて、 $\mu = F(\nu)$  なる関数が得られたとすると、

$$m = \frac{\pi}{2} - F(\nu) \approx \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu$$

であるから、

$$G(\nu) = \left(\frac{\pi}{2} - F(\nu)\right) - \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu \dots\dots (22)$$

とおく  $G(\nu)$  はチェビシェフ展開可能と考え、

$$G(\nu) = \sum_{r=0}^n b_r T_r(\nu)$$

を作った。Ragula-Falsi の方法の  $\epsilon$  は  $10^{-7}$  に、チェビシェフ係数の  $\epsilon$  は、 $10^{-5}$  にとった。  $n=29$  で係数  $b_r$  が得られた。(22) より、

$$F(\nu) = \frac{\pi}{2} - G(\nu) - \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu$$

となり、 $\mu$  が求められた。

このルーチンを使って、最初の目的であった超音速流のノズルの計算をしたところ、約2時間で計算できた。

これは、チェビシェフ近似が、有効に使われている良い例である。

#### 4. 結 び

以上により、チェビシェフ近似したときには、かなり

(9ページよりつづく)

第17表 曲げモーメント  $M_x$ ,  $M_y$  を受ける静定梁の横倒れ座屈 (第一近似)

境界条件	特 有 方 程 式	備 考
S/S	$\left(\frac{1}{3}(1+\alpha+\alpha^2) - \frac{(1-\alpha)^2}{2\pi^2}\right) \frac{M_x^2}{EI_{xx}} + \left(\frac{1}{3}(1+\beta+\beta^2) - \frac{(1-\beta)^2}{2\pi^2}\right) \frac{M_y^2}{EI_{yy}}$ $- \frac{(1+\alpha)}{2} \beta_x M_x \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \frac{(1+\beta)}{2} \beta_y M_y \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2}\right)$	$\alpha, \beta$ はモーメントの勾配
C/F	$\frac{M_x^2 L^2}{EI_{xx}} - \frac{M_y^2 L^2}{EI_{yy}} + 0.8582(\beta_x M_x - \beta_y M_y) = 4.6478GK + 12.3624\left(\frac{EI_o}{L^2}\right)$	

#### 18. む す び

以上において軸圧縮力と端部モーメントを受ける薄肉開断面柱の安定についてその一般解をI形断面材を例にとって論じ、一応用例として M. R. Horne の取り扱った問題に触れ、さらにその特別な場合として軸力と端部振りモーメントの座屈変形における相関性を論じた (Grammel および Greenhill の問題)。次いで軸力と二つの端部曲げモーメントによる座屈特有方程式を求め、その第一近似解の意味する特有曲面の幾何学的性質について述べ、それから軸力と一つの曲げモーメントの相関曲線について考察し、AISC の Interaction Formula の由来を明らかにした。また単一曲げモーメントによる梁の横倒れ座屈についても言及し、AISC の  $Ld/bt$  Formu-

良い近似式が得られることがわかるであろう。ただし、係数を求める段階において、Prandtle-Meyer 関数にみられるように、いくらか手間がかかる。したがって、展開を要する関数の性質を良く吟味しておき、特異点等の存在する場合には、この影響をなくして係数をもとめることを試みなければならない。

さらに任意関数が、多変数をもつときについて、今後調べてみる必要がある。前述の ALGOL でかかれたものは、係数を求めるプログラムにおいて、係数のみの精度チェックではなく、関数値の方の精度チェックも、行なっている。この方法をプログラムに組み入れてみれば、さらに良い近似が得られるであろう。

最後に、本研究に際して、種々のご指導をいただいた渡辺勝教授・藤田長子氏・北坂秋秀氏に対して、深く感謝する。  
(1964年6月15日受理)

#### 文 献

- 1) 一松信 “数値計算” (至文堂) 1963.
- 2) Lance. G. N. “Numerical Methods for High Speed Computers” (London: Iliffe & Sons LTD) p. 13; p. 26, 1960.
- 3) Schwarz H. R. ACM 5, 1962.
- 4) Clenshaw C. W. “Mathematical Tables” 5 (London: Her Majesty's Stationery Office) 1962.
- 5) Lowan A. N. “Tables of Probability Functions” 1, 1941.
- 6) リーブマン・ロシコ著、玉田瑛訳 “気体力学” (吉岡書店).
- 7) Herriot J. G. “Methods of Mathematical Analysis and Computation” (London, : New York: John Wiley & Sons).

la を導出した。

そして最後に静定梁の場合にのみ存在する曲げモーメントを受ける梁の横倒れ座屈に関する精度のよい解析法について述べた。次号において横荷重 (集中荷重, 分布荷重) および軸力を受ける梁柱の安定問題について解説する予定である。  
(1964年6月17日受理)

#### 参 考 文 献

- 21) Horne; “The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetrical I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments” Quart. Jour. of Mech. and Appl. Math. Vol. VII (1954)
- 22) Greenhill; Proc. Inst. Mech. Engrs. London (1883)
- 23) Grammel; Z.A.M.M. Bd 3 (1923)
- 24) 仲, 加藤共著 “単一材の座屈” 東京大学出版会 (1959)