

チェビシェフ多項式による関数近似について

岡 本 通 子

種々の関数を近似する方法には、級数展開の部分和、最小二乗近似、チェビシェフ近似、ミニマックス近似等がある。級数展開の部分和によると、展開中心の近くでは、高精度であるが、少し離れたところでは、多くの項数を必要とする。そこで、少ない項数で、よい近似を得るために、計算が複雑なためもあって、計算機が発達するまでは注目されなかったチェビシェフ近似の方法について、係数の求め方、誤差の問題を中心に、OKITAC-5090 電子計算機を使って調べた結果をのべる。

1. チェビシェフ多項式の性質と近似

関数 $f(x)$ に対する、近似関数を、 $g(x)$ とするとき、誤差の最大値

$$M(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f - g| \dots\dots\dots (1)$$

を最小にするように、 $g(x)$ をえらぶ。この近似をミニマックス近似¹⁾といい、そのように選ばれた近似式 $g(x)$ を最良近似式という。ここでは、この最良近似式を求めるために、非常に効果的なチェビシェフ近似についてのべてみよう。

一般に、 $f(x) = x^n$ を閉区間 $[-1, 1]$ において、 $(n-1)$ 次多項式 $p(x)$ で最良近似したとき、 $x^n - p(x)$ を n 次のチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ といい、

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \dots\dots\dots (2)$$

で表わされる。これは、Lanczos による表示の仕方である²⁾。次に、チェビシェフ多項式の性質について、いくつかあげてみる。

$T_n(x)$ は直交性をもっている。すなわち、

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2}\pi & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \dots\dots (3)$$

$x = \cos \theta$ なる変換を行なうと、

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2}\pi & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

次に、 $x_j = \cos \pi j/n$ を $T_n(x)$ の零点とすると、

$$\sum_{j=0}^n T_r(x_j) T_s(x_j) = \begin{cases} n & (r=s=0) \\ \frac{1}{2}n & (r=s \neq 0) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases} \dots\dots (5)$$

また $2 \cos r\theta \cos s\theta = \cos(r+s)\theta + \cos(r-s)\theta$ から

$$2T_r(x) T_s(x) = T_{r+s}(x) + T_{|r-s|}(x)$$

となり、 $s=1$ とおけば、

$$T_{r+1}(x) - 2xT_r(x) + T_{|r-1|}(x) = 0 \dots\dots (6)$$

$$\text{また、 } T_n(x) = \frac{1}{2} [(2x)^n - (2_{n-1}C_1 - n-2C_1)(2x)^{n-2} + \dots] \dots\dots (7)$$

$$x^n = 2^{-(n-1)} \sum_{r=0}^n nCr T_{n-2r}(x) \dots\dots\dots (8)$$

これらの性質を使って、チェビシェフ展開を行なったときに、どうなるか調べてみよう。

任意の連続関数 $f(x)$ を区間 $[-1, 1]$ において、

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots + \dots \\ = \sum_{r=0}^\infty a_r T_r(x) \quad \left(a_{r=0} = \frac{1}{2} a_0 \right)$$

に展開したとき、これを $f(x)$ のチェビシェフ展開という。

また、 $f(x)$ が

$$f(x) \approx \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) \quad \left(a_{r=0} = \frac{1}{2} a_0 \right) \dots\dots (9)$$

と近似できるとき、 $f(x)$ のチェビシェフ近似という。

チェビシェフ近似したときの、項の節約、精度の問題については、どうなるであろうか。

$$f(x) = \sum_{r=0}^n a_r x^r + \varepsilon_n(x) \dots\dots\dots (10)$$

として、 $|\varepsilon_n(x)|$ が許容誤差 ε より、小であれば、 $f(x)$

は $\sum_{r=0}^n a_r x^r$ で近似できる。(8) を用いれば、

$$f(x) \approx \sum_{r=0}^n a_r x^r = \sum_{r=0}^n b_r T_r(x) \dots\dots\dots (11)$$

とすることができる。(7) を使って、

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 2^{n-1} b_n \left(x^n - \frac{n}{4} x^{n-2} + \dots \right) \\ + 2^{n-2} b_{n-1} \left(x^{n-1} - \frac{n-1}{4} x^{n-3} + \dots \right) \\ + 2^{n-3} b_{n-2} (x^{n-2} - \dots) + \dots + b_0$$

となり、 x^n, x^{n-1}, \dots, x の係数を比較してみると、

$$b_n = 2^{-(n-1)} a_n, \quad b_{n-1} = 2^{-(n-2)} a_{n-1},$$

$$b_{n-2} = 2^{-(n-3)} \left(a_{n-2} + \frac{n}{4} a_n \right)$$

で、大きい n に対しては、 b_r は a_r よりも小さくなっ

ている。そこで、

$$|b_{n-m+1}| + |b_{n-m+2}| + \dots + |b_n| + \varepsilon_1 < \varepsilon$$

なる m をえらぶことができる。ただし、 ε_1 は $|\varepsilon_n(x)| < \varepsilon_1 < \varepsilon$ 、 $|a_n| + \varepsilon_1 < \varepsilon$ 。したがって、(11) は、 $(n-m)$ までの和として

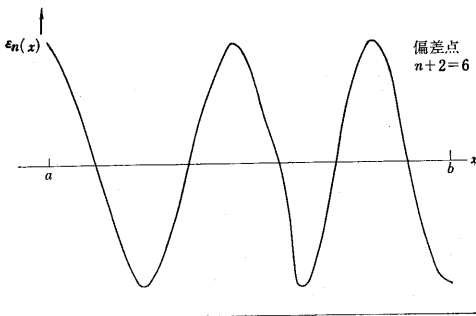
$$f(x) = \sum_{r=0}^{n-m} b_r T_r(x) = \sum_{r=0}^{n-m} c_r x^r$$

と近似される。

以上により、チェビシェフ近似は、少ない項数でよく、テイラー展開で n 項までとった誤差を ε とすると、チェビシェフ近似で n 項までとった誤差は、約 $2^{-(n-1)}\varepsilon$ であることが推定できる。

チェビシェフ多項式による近似式は、最良近似式といえるであろうか。

まず、 $f(x)$ を $[a, b]$ において、 n 次の多項式 $p_n(x)$ で近似したとき、区間内に $(n+2)$ 個の最大偏差点があり、かつその符号が交互に正負をとるならば、 $p_n(x)$ は最良近似式である (第 1 図)。



第 1 図 最良近似多項式の例 ($n=4$ の場合)

チェビシェフ多項式 $T_r(x)$ は、 $[-1, 1]$ において、 $(r+1)$ 個の点で極値を得ることは、(2) により明らかである。もし $f(x)$ が、 $(n+1)$ 次の任意の多項式ならば、 $[-1, 1]$ における n 次の最良近似多項式は、

$$p_n(x) = f(x) - a_{n+1} T_{n+1}(x) \dots \dots \dots (12)$$

に書けることは、誤差に相当する項、 $a_{n+1} T_{n+1}(x)$ の形から分かる (ただし、(12) の右辺の x^{n+1} の係数は、0 であるように a_{n+1} をえらぶ)。 $f(x)$ が、一般の関数のときにも、最良近似式をうるには、まずチェビシェフ近似を第一近似として、用いることが良いと推定される。

ある関数 $f(x)$ を、(9) のようにチェビシェフ近似したときの係数 a_r は、(5) の直交性により

$$a_r = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n f\left(\cos \frac{\pi j}{n}\right) \cos \frac{\pi r j}{n}$$

$$\left(j=0, n \text{ のとき } \frac{1}{2} f\left(\cos \frac{\pi j}{n}\right) \cos \frac{\pi r j}{n} \right)$$

として計算される。

近似式を求める最初の段階として、ALGOL でかかれていたもの³⁾ を参考にして、この係数 a_r を計算するプ

ログラムが作成された。このプログラムでは、 x の範囲が $[-1, 1]$ でなく、もっと一般的に、 $[a, b]$ に関して計算できるように変換されている。

展開の次数 n に対し、次の $(n+1)$ 個の点

$$t_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)x_k \dots \dots \dots (13)$$

ただし

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n) \dots \dots \dots (14)$$

について、ニュートンの補間多項式を計算し、これらの多項式を使って、

$$a_k = \frac{2}{n} \left[\frac{1}{2} f(t_0) + \sum_{s=1}^{n-1} f(t_s) x_{s \times k} + \frac{1}{2} (-1)^k f(t_n) \right] \dots \dots \dots (15)$$

を求める。このプログラムについては、2 節にのべる。求めた係数 a_0, a_1, \dots, a_n を使って任意の関数 $f(x)$ を計算する際に、次の方法を用いれば $T_r(x)$ を計算する手間をはぶくことができる。

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x)$$

$$= \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) \dots \dots \dots (16)$$

において、

$$\left. \begin{aligned} b_r &= 2x b_{r+1} - b_{r+2} + a_r \\ b_{n+1} &= b_{n+2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

から、 b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 を作ると、(6) より

$$f(x) = \frac{1}{2}(b_0 - b_2) \dots \dots \dots (18)$$

と表わされる。

もし $f(x) = \sum_{r=0}^n a_{2r} T_{2r}(x)$ ($a_{2r=0} = \frac{1}{2} a_0$) のときには、(17) において、 x を $2x^2 - 1$ で、 a_r を a_{2r} でおきかえれば、 $f(x)$ は (18) で表わされる。 $f(x) = \sum_{r=0}^n a_{2r+1} T_{2r+1}(x)$ のときには、 x を $2x^2 - 1$ で、 a_r を a_{2r+1} でおきかえれば、

$$f(x) = x(b_0 - b_1) \dots \dots \dots (19)$$

となる。

この計算のプログラムについても、2 節にのべる。

2. チェビシェフ近似関係のプログラム

1) チェビシェフ係数を求めるプログラム

プログラムは、(13)、(14)、(15) を使って作成され、 a_r は、次の方法で定められる。

i) n に関して、 $n=1$ からはじめて、 $n = \text{entier}(1.25 \times n + 2)$ の割合で増加させ、 a_r が (ii) の条件をみたすところで打ち切る (entier (E) は E を越えない最大整数値)。

ii) ある n についての係数 a_r と、一つ前の n についての a_r に関して、
(e)

$$\frac{\sum_{r=0}^n |ar - ar|}{(e)(e-1)} < \varepsilon$$

$$\frac{\sum_{r=0}^n |ar|}{(e-1)}$$

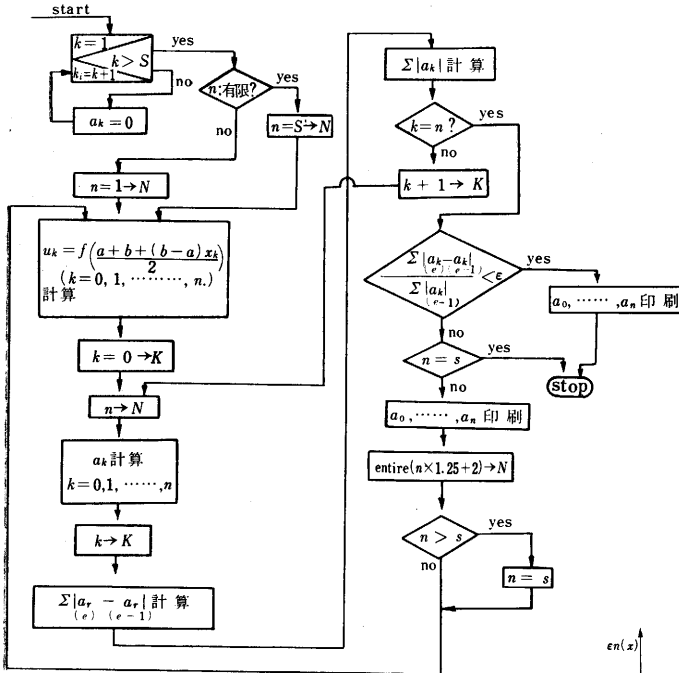
(ε は最初に指定した ar に関する誤差)

となるまで、n を増加させ、この条件が、みたされたときに、初めの ε に対する係数が求められた。

iii) n=s (s は n の予定最大値) となったとき、a₀, …, a_s まで計算してストップさせる。(ii) の条件にまだ達していないので、さらに大きい s について、(ii) の条件がみたされるまで計算する必要がある。

以上により、約 180 語の主プログラム形式で作成され、さらに次の二つの指定が必要である。

a) 展開範囲の下限 a, 上限 b, 項数 n の有限、無限の判定数, n の予定最大値, 係数の誤差 ε, ar を格納す



第2図 チェビシエフ係数計算フローチャート

る先頭番地。

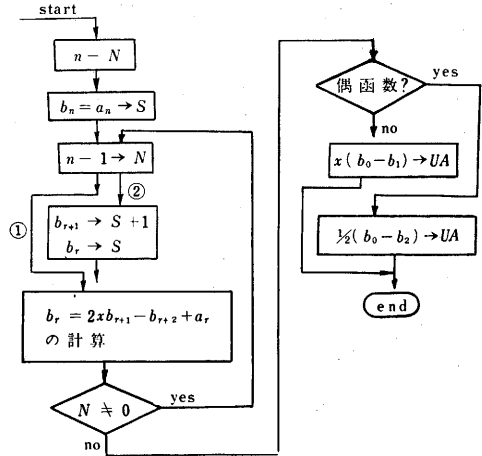
b) 関数 f(x) を、閉サブルーチン形式で作成する。フローチャートは第2図に示される。

2) $f(x) = \sum_{r=0}^n ar T_r(x)$ ($ar=0 = \frac{1}{2} a_0$) 計算プログラム

約 30 語の閉サブルーチン形式で、(17), (18), (19) を使う。1) によってもとめられた a₀, a₁, …, a_n を、連続した番地に格納しておき、ar の格納先頭番地、項数 n, 偶関数の、奇関数の判定数を指定すればよい。

ただし、1) において、もとめられた係数については、

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)x$$



第3図 チェビシエフ近似計算フローチャート

と変換されているので、

$$x = \frac{2y - (b+a)}{b-a}$$

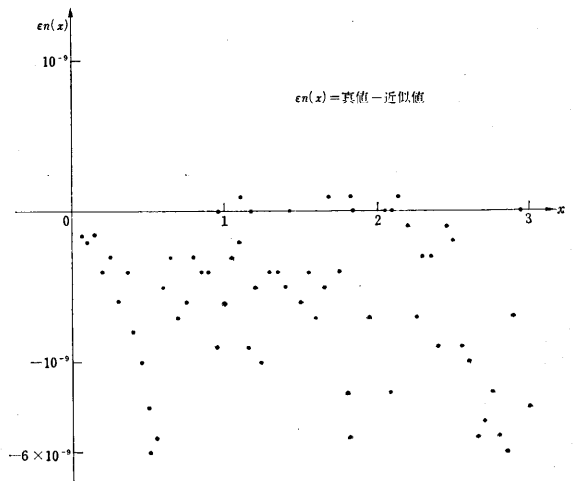
でおきかえなければならない。フローチャートは、第3図に示す。

以上二つのプログラムの詳細は、ここでは省略する。

3. チェビシエフ近似の実例

1) 精度について

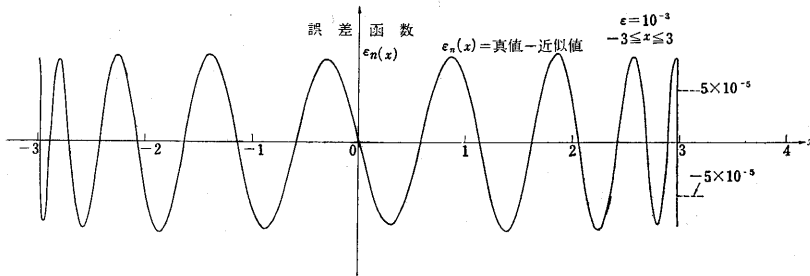
誤差関数を例にとってみる。高精度の誤差関数のプログラムを得るために、誤差関数、その他の初等関数について、10⁻²⁰ までチェビシエフ係数を求めた表⁴⁾ をもとにして調べた。まず第一に、係数を n=40 まで、すなわち ar が 10⁻¹⁰ までの値をとって計算した。このときの誤差と真値⁵⁾ の関係は、第4図のごときである。チェックした値についてのみ、プロットしたものである。これは、10⁻¹⁰



第4図 誤差関数 (チェビシエフ近似による)

の近似式として、必ずしも適当とはいえない。このようなことが生じた原因は、この表が、 10^{-20} までの係数としてもめられたものであり、 10^{-10} までの係数としては適当でないこと。プログラムの中で使用された浮動小数点演算のサブルーチンで、丸めの誤差が生じるなどが影響しているからであろう。しかし、8 桁までは有効のかなり良い近似が得られる。この方法で、良い精度をもったベッセル関数の J_0, J_1, I_0, Y_0, Y_1 と、 $\cos \pi x, \sin \pi x, e^x, 2^{-x}$ 等のサブルーチンが作成されている。

実際に 2 の 1) により求めた係数で近似したときの、精度を調べるために、この 8 桁まで有効の誤差関数のルーチンを使って、係数の誤差 ε を、 10^{-3} として係数をもとめた。この値をもとに計算したときの誤差曲線は、第 5 図にしめされる。これはほとんど最良近似多項式に近いものである。したがって 4 桁まで、有効な関数とい



第 5 図 チェビシェフ近似による誤差曲線

えるであろう。チェビシェフ近似したときの誤差は、他の例からも考えて、係数をもとめるときとった ε より、約 1 桁良い精度が得られることが推定される。

2) Prandtle-Meyer 関数⁶⁾への応用

超音速流のノズルの計算に必要な Prandtle-Meyer 関数 ν と、マッハ数 M との関係は、

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2-1) \right) - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1} \quad (20)$$

で与えられる。

(20) 式において、 $\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$ なる変換を行なうと、

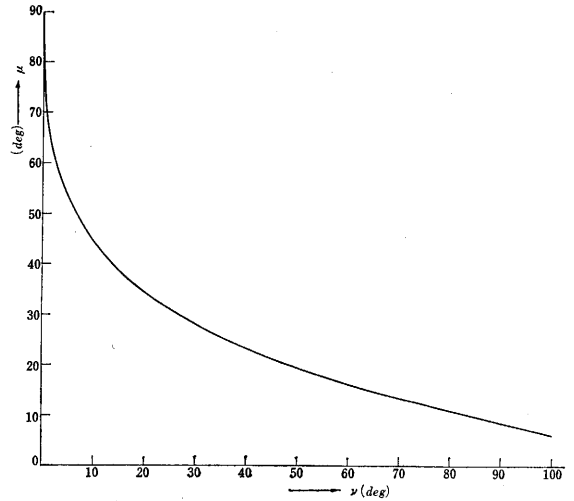
$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cot \mu \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right) \quad (21)$$

となり、 $\gamma=1.4$ ととり、マッハ角 μ と ν の関係を表わしたものが、第 6 図である。

(21) において、 μ から ν を計算するのは、問題はないが、逆に、 ν を与えて μ を計算する場合について、考えてみる。チェビシェフ関係のプログラムが開発されていないときは、与えられた ν に対し、

$$f(\mu) - \nu = 0$$

とおき、Regula-Falsi の方法⁷⁾で、根 μ を求めた。Re-



第 6 図 Prandtle-Meyer 関数対

gula-Falsi の方法の中の根の絶対誤差 ε を 10^{-6} にとった関係もあるが、ある角度についてのノズルの計算は、約 10 時間かかった。これは、 ν が 0 に近い点において、 μ を求めるのに非常に時間を要するためである。時間を節約するために、 $\nu = f(\mu)$

とおき、 $\mu = \sum_{r=0}^n a_r T_r(\nu)$ なる変

換を行なうことが考えられた。係数 a_r を求める段階において、ある ν_i に対する μ_i を計算するには、Regula-Falsi の方法を用いる。

この方法では係数 a_r を求めるために相当の時間を要するが、多くの μ を求める時間は、非常に早くすむ。

i) μ と ν の関係がすなおであるので、必要とする範囲、 $0 \leq \nu \leq 2/3\pi$ において、 a_r を求めた。 $n=50$ まで計算した結果、小数点以下 2 桁のところ、 $|a_n|$ と $|a_{n+1}|$ が非常に近い値となり、収束しないという状態が生じた（ここで Regula-Falsi の方法の ε は 10^{-7} に、係数の ε は 10^{-5} にとった）。これは、 $0 \leq \nu \leq 0.02$ において、 μ が急増加するために ($\mu = \pi/2$ にたいし $\nu = 0$ なる特異点をもつ) 展開範囲のとり方が不適当ではないかと考え、次のようにした。

ii) 展開範囲を、 $0 \leq \nu \leq 0.02$ と、 $0.02 \leq \nu \leq 2/3\pi$ の二つに分けた。この場合も、 $0 \leq \nu \leq 0.02$ においては、i) と同様のことがおこった。

iii) i), ii) より、 ν が 0 に近いところで、 μ が急増加することが影響しているため、これをとり除くことを考えた。(21) において、 $\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = k$, $\pi/2 - \mu = m$ とおきテイラー展開すると、

$$\nu = \left(\frac{1}{3} - \frac{k^2}{3}\right)m^3 + \left(\frac{2}{15} - \frac{k^2}{3} + \frac{k^4}{5}\right)m^5 + Q(m^7),$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{k^2}{3}\right)m^2 - \nu \approx 0$$

ゆえに $m \approx \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu$

(21) を解いて、 $\mu = F(\nu)$ なる関数が得られたとすると、

$$m = \frac{\pi}{2} - F(\nu) \approx \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu$$

であるから、

$$G(\nu) = \left(\frac{\pi}{2} - F(\nu)\right) - \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu \dots\dots (22)$$

とおく $G(\nu)$ はチェビシェフ展開可能と考え、

$$G(\nu) = \sum_{r=0}^n b_r T_r(\nu)$$

を作った。Ragula-Falsi の方法の ϵ は 10^{-7} に、チェビシェフ係数の ϵ は、 10^{-5} にとった。 $n=29$ で係数 b_r が得られた。(22) より、

$$F(\nu) = \frac{\pi}{2} - G(\nu) - \sqrt[3]{\frac{3(\gamma+1)}{2}}\nu$$

となり、 μ が求められた。

このルーチンを使って、最初の目的であった超音速流のノズルの計算をしたところ、約2時間で計算できた。

これは、チェビシェフ近似が、有効に使われている良い例である。

4. 結 び

以上により、チェビシェフ近似したときには、かなり

(9ページよりつづく)

第17表 曲げモーメント M_x, M_y を受ける静定梁の横倒れ座屈 (第一近似)

境界条件	特 有 方 程 式	備 考
S/S	$\left(\frac{1}{3}(1+\alpha+\alpha^2) - \frac{(1-\alpha)^2}{2\pi^2}\right) \frac{M_x^2}{EI_{xx}} + \left(\frac{1}{3}(1+\beta+\beta^2) - \frac{(1-\beta)^2}{2\pi^2}\right) \frac{M_y^2}{EI_{yy}}$ $- \frac{(1+\alpha)}{2} \beta_x M_x \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \frac{(1+\beta)}{2} \beta_y M_y \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2}\right)$	α, β はモーメントの勾配
C/F	$\frac{M_x^2 L^2}{EI_{xx}} - \frac{M_y^2 L^2}{EI_{yy}} + 0.8582(\beta_x M_x - \beta_y M_y) = 4.6478GK + 12.3624\left(\frac{EI_o}{L^2}\right)$	

18. む す び

以上において軸圧縮力と端部モーメントを受ける薄肉開断面柱の安定についてその一般解をI形断面材を例にとって論じ、一応用例として M. R. Horne の取り扱った問題に触れ、さらにその特別な場合として軸力と端部振りモーメントの座屈変形における相関性を論じた (Grammel および Greenhill の問題)。次いで軸力と二つの端部曲げモーメントによる座屈特有方程式を求め、その第一近似解の意味する特有曲面の幾何学的性質について述べ、それから軸力と一つの曲げモーメントの相関曲線について考察し、AISC の Interaction Formula の由来を明らかにした。また単一曲げモーメントによる梁の横倒れ座屈についても言及し、AISC の Ld/bt Formu-

良い近似式が得られることがわかるであろう。ただし、係数を求める段階において、Prandtle-Meyer 関数にみられるように、いくらか手間がかかる。したがって、展開を要する関数の性質を良く吟味しておき、特異点等の存在する場合には、この影響をなくして係数をもとめることを試みなければならない。

さらに任意関数が、多変数をもつときについて、今後調べてみる必要がある。前述の ALGOL でかかれたものは、係数を求めるプログラムにおいて、係数のみの精度チェックではなく、関数値の方の精度チェックも、行なっている。この方法をプログラムに組み入れてみれば、さらに良い近似が得られるであろう。

最後に、本研究に際して、種々のご指導をいただいた渡辺勝教授・藤田長子氏・北坂秋秀氏に対して、深く感謝する。
(1964年6月15日受理)

文 献

- 1) 一松信 “数値計算” (至文堂) 1963.
- 2) Lance. G. N. “Numerical Methods for High Speed Computers” (London: Iliffe & Sons LTD) p. 13; p. 26, 1960.
- 3) Schwarz H. R. ACM 5, 1962.
- 4) Clenshaw C. W. “Mathematical Tables” 5 (London: Her Majesty's Stationery Office) 1962.
- 5) Lowan A. N. “Tables of Probability Functions” 1, 1941.
- 6) リーブマン・ロシコ著、玉田瑠訳 “気体力学” (吉岡書店).
- 7) Herriot J. G. “Methods of Mathematical Analysis and Computation” (London, : New York: John Wiley & Sons).

la を導出した。

そして最後に静定梁の場合にのみ存在する曲げモーメントを受ける梁の横倒れ座屈に関する精度のよい解析法について述べた。次号において横荷重 (集中荷重, 分布荷重) および軸力を受ける梁柱の安定問題について解説する予定である。
(1964年6月17日受理)

参 考 文 献

- 21) Horne; “The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetrical I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments” Quart. Jour. of Mech. and Appl. Math. Vol. VII (1954)
- 22) Greenhill; Proc. Inst. Mech. Engrs. London (1883)
- 23) Grammel; Z.A.M.M. Bd 3 (1923)
- 24) 仲, 加藤共著 “単一材の座屈” 東京大学出版会 (1959)