薄肉開断面材の弾性力学 (IV)

川井忠彦

前号において薄肉開断面材の安定を支配する基礎方程式を導き，その一般的解法について説明した．そこで本号では一般的理論の応用として，まず軸圧縮力を受ける柱の曲げ振りおよび安定の問題について概説する．

9. 軸圧縮力を受ける柱の平衡方程式とその座屈特有方程式

薄肉開断面材がその軸圧縮力（その両端において作用する軸力ばかりでなく，図心軸に沿って分布する任意の軸力をも含む）の作用を受けて座屈変形を起こした場合の釣合方程式は前号（第16巻 第4号掲載）(93) 式より，つぎのように与えられる(前号第 (28) 図).

$$
\left.
\begin{aligned}
&EI_{xx}\frac{d^4u}{dz^4}+\frac{d}{dz}\left\{p\left(\frac{du}{dz}+y_0\frac{d\varphi}{dz}\right)\right\}\\
&\quad=\frac{d^2}{dz^2}(-m_x\varphi+m_y)\\
&EI_{yy}\frac{d^4v}{dz^4}+\frac{d}{dz}\left\{p\left(\frac{dv}{dz}-x_0\frac{d\varphi}{dz}\right)\right\}\\
&\quad=-\frac{d^2}{dz^2}(m_x+m_y\varphi)\\
&EI_{\omega}\frac{d^4\varphi}{dz^4}-GK\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d}{dz}\left\{p\left(y_0\frac{du}{dz}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-x_0\frac{dv}{dz}+r^2\frac{d\varphi}{dz}\right)\right\}=-m_x\frac{d^2u}{dz^2}\\
&\quad-m_y\frac{d^2v}{dz^2}+\beta_x\frac{d}{dz}\left(m_x\frac{d\varphi}{dz}\right)-\beta_y\left(m_y\frac{d\varphi}{dz}\right)
\end{aligned}
\right\}\quad(108)
$$

(108) 式中にある右辺の曲げモーメント m_x および m_y は柱の両端において加えられる軸圧縮力 P の偏心 (e_x, e_y) によって生ずる静的曲げモーメントを意味し，前号の一般論における曲げモーメント M_x, M_y と区別しておくことにする(一般に m_x, m_y は M_x, M_y の中に含まれているのであるが)．また荷重の偏心量は柱の両端において等しい場合のみをここでは取り扱い，偏心量が柱の両軸で異なる場合は端部モーメントと軸力が同時に作用する場合の問題として次号で考察することにする．

方程式 (108) の一般解を (102) 式または (103)式から書き出すと，つぎのようになる．すなわち柱の撓みおよび振り変形を決定する係数 a_n, b_n および c_n を求める方程式は，つぎのようになる．

(a) 非相似境界条件の場合

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lambda_n^4a_n-\sum_{m=1}^{\infty}a_mA_{mn}+\sum_{m=1}^{\infty}c_m(-y_0B_{mn}+F_{mn})=\mathfrak{A}_n\\
&\mu_n^4b_n-\sum_{m=1}^{\infty}b_mH_{mn}+\sum_{m=1}^{\infty}c_m(x_0H_{mn}-M_{mn})=-\mathfrak{B}_n\\
&\sum_{m=1}^{\infty}a_m(-y_0Q_{mn}+F_{nm})+\sum_{m=1}^{\infty}b_m(x_0H_{mn}-M_{nm})\\
&\quad+\gamma_n^4c_n+\sum_{n=1}^{\infty}c_m\{-r_s^2H_{mn}+GK\Lambda_{mn}+\beta_xZ_{mn}\\
&\quad-\beta_yZ'_{mn}\}=0
\end{aligned}
\right\}\quad(109)
$$

(b) 相似境界条件の場合

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lambda_n^4a_n-\sum_{m=1}^{\infty}a_mA_{mn}+\sum_{m=1}^{\infty}c_m(-y_0A_{mn}+F_{mn})=\mathfrak{A}_n\\
&\mu_n^4b_n-\sum_{m=1}^{\infty}b_mA_{mn}+\sum_{m=1}^{\infty}c_m(x_0A_{mn}-M_{mn})=-\mathfrak{B}_n\\
&\sum_{m=1}^{\infty}a_m(-y_0A_{mn}+F_{nm})+\sum_{m=1}^{\infty}b_m(x_0A_{mn}-M_{nm})\\
&\quad+\nu_n^4c_n+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\{-r_s^2A_{mn}+GK\Lambda_{mn}+\beta_xZ_{mn}\\
&\quad-\beta_yZ'_{mn}\}=0
\end{aligned}
\right\}\quad(110)
$$

ここに A_{mn}, B_{mn}, F_{mn} 等の諸係数は (101) 式に与えたとおりである．

前号で述べたように，この (109) または (110) 式を形式的に解けば

$$a_n=\frac{D_{n_1}}{D},\qquad b_n=\frac{D_{n_2}}{D},\qquad C_n=\frac{D_{n_3}}{D}\qquad(111)$$

のように未知係数 a_n, b_n, c_n が求められるから，これを (97) 式に代入して柱の撓み (u, v) および回転 φ が決まるわけであり，また柱の座屈荷重はつぎの無限次元行列式：

$$D=0\qquad(112)$$

の最小根として求められる．Dは無限次元行列式であるから，それを解くには当然逐次近似法によらなければならない．以下数節にわたって，ここに述べた理論を基にして軸圧縮力を受ける薄肉開断面材の安定について論ずるわけであるが，柱の両端の境界条件としては前々号（第16巻 第2号掲載）第2表で与えたもののうち，両端自由(F/F)，支持自由(S/F)，回転自由 (P/F) の三つを除いた7種の場合について考察を進めることにする．(109)，(110) 式に現われる m_x, m_y に関する積分項：F_{mn}, M_{mn}, Z_{mn}, Z'_{mn}, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ を計算する際にとるべき m_x, m_y の値は前号付録でも述べたようにその静定モーメントである．したがって，つぎの第8表のようになる．

第 8 表 柱が偏心圧縮荷重を受ける場合，とるべき静定モーメント m_x, m_y と境界条件の関係

境界条件の相似性	境界条件	m_x	m_y
相似境界	S/S	$-Pe_y$	Pe_x
	C/C	0	0
	C/S	$-Pe_y\left(\frac{Z}{L}\right)$	$Pe_x\left(\frac{Z}{L}\right)$
	C/F	$-Pe_y$	Pe_x
非相似境界	P/P	0	Pe_x
	C/P	0	$Pe_x\left(\frac{Z}{L}\right)$
	P/S	$-Pe_y\left(\frac{Z}{L}\right)$	Pe_x

第 10 表 純曲げ座屈荷重の計算値と厳密解の比較

境界条件	第一近以	第二近以	厳密解
P S/S P	π^2 (0%)		π^2
P C/C P	40.6877 (3.06%)	39.5623 (0.3%)	39.4784 $=4\pi^2$
P C/S P	20.695 (2.44%)	20.2911 (0.5%)	20.1932
P C/F P	2.6598 (7.7%)	2.4817 (0.5%)	2.4694

$P_{cr}=\frac{kEI}{L^2}$ 数字は k の値を示し，(　) 内の数値は誤差の百分率を表わす。

10. 両端において軸圧縮力 P を受ける柱の安定

本節では軸圧縮力 P をその両端において受ける柱の安定問題について考える．これは薄肉開断面材の安定についての最も基礎的な問題であるから，少し詳しく論ずることにする．座屈荷重を決定する特性方程式の第一近似は (109) 式または (110) 式において a_1, b_1, c_1 のみを取った斉次方程式からこれらの未知係数を消去すればつぎの第 9 表 (次ページ) のように求められる．

第 9 表のうち，両端単純支持 (S/S) の場合だけは厳密解であり，この式はすでに Timoshenko, Kappus, Goodier その他の人々により導かれている結果である．これらの特有方程式はいずれも求める座屈荷重 P に関する三次方程式であり，一般に相異なる三実根を有し，その最小根が求める座屈荷重である．そして座屈荷重は独立な三つの座屈荷重 P_x, P_y および P_T のいずれよりも小さい．換言すれば薄肉開断面材の安定問題において捩り座屈 P_T の可能性を考慮に入れると，一般に座屈は曲げと捩りの連成した状態で起こり，その座屈荷重は二つの純曲げ座屈荷重 (あるいは Euler 荷重) や純捩り座屈荷重よりも小さいことになる．この辺の事情は前々号で述べた自由振動の場合とまったく同様である．

さて座屈が連成しない状態で起こるのは第 9 表を見ればわかるように，その対角要素を除いた他の項が，すべて零となる場合である．(すなわち両端支持 (S/S)，あるいは固定自由 (C/F) の柱の場合には $e_x=x_0$, $e_y=y_0$, いい換えれば荷重の中心が剪断中心 S に一致するときまた両端固定 (C/C) の場合は断面が二軸対称のとき，固定一支持 (C/S) の場合は荷重中心が $0.6327e_x=x_0$, $0.6327e_y=y_0$ の条件を満足する位置に加えられる場合等である)．そのような場合には座屈荷重 P_{cr} を決定する特有方程式は

$$r^2(P_x-P)(P_y-P)(P_T-P)=0$$

となり，P_{cr} は P_x, P_y, P_T の最小値をとることになる．ところで第 9 表に与えた曲げ捩り座屈の特有方程式は両端支持の場合を除いて，すべて第一近似式であるから，純曲げ座屈および純捩り座屈の値の精度を吟味しておく必要があろう．すなわち純曲げ座屈荷重の第一近似，および第二近似の値を厳密解と比較してみると第 10 表のようになる．

また純捩り座屈荷重の精度は，それが一般につぎの式で与えられるので，この表から精度の見当がつけられる．

$$P_T=\frac{1}{r^2}\left(GK+\frac{kEI_\omega}{L^2}\right)$$

第 10 表の結果から片持梁 (C/F) の場合を除けば，第一近似でも十分実用上差し支えない位の精度であり，したがって第二近似まで進めば精度の点では申し分ないものと思われる．また第一近似の特有方程式を使用して座屈荷重を求める場合，P_x, P_y および P_T の値をその第一近似値をとらずに厳密な値を使用すれば，いかなる場合でも計算の誤差は実用上差し支えない程度のものとなると思われる．

以後座屈荷重の計算は特別な場合を除いて第一近似式を使用する．

さて初めに戻って一般的な曲げ捩り連成座屈の場合を考えることにするが，同じような議論が他のすべての場合にも適用できるから，両端支持の場合を例にとって説明する．第 9 表に与えられた特有方程式を展開すれば

$$-r^2(P_x-P)(P_y-P)(P_T-P)$$
$$+P^2(e_y-y_0)^2(P_y-P)+P^2(e_x-x_0)^2(P_x-P)=0 \tag{113}$$

となり，これを少しく変形すると

$$\left(\frac{e_y-y_0}{r\sqrt{\left(\frac{P_x}{P}-1\right)\left(\frac{P_T}{P}-1\right)}}\right)^2+\left(\frac{e_x-x_0}{r\sqrt{\left(\frac{P_y}{P}-1\right)\left(\frac{P_T}{P}-1\right)}}\right)^2=1 \tag{114}$$

が得られる．

この式は座屈荷重 P_{cr} とその偏心量 (e_x, e_y) の相関性を与えるものであり，e_x と e_y の関係を P をパラメータとして画くと共心楕円群が得られる．その曲線の 1 例は次号で与えることにするが，従来の純曲げ座屈においては，曲げの平面内の荷重の偏心量はその座屈荷重 P_{cr} には，なんらの影響を及ぼさなかったが一般の曲げ

第9表 軸圧縮力 P を受ける柱の座屈荷重の特有方程式（第一近似）

境界条件の相似性	境界条件	特 有 方 程 式	P_x, P_y および P_T
相似境界	S/S	$\begin{vmatrix} P_x-P & 0 & P(e_y-y_0) \\ 0 & P_y-P & -P(e_x-x_0) \\ P(e_y-y_0) & -P(e_x-x_0) & r^2(P_T-P) \end{vmatrix}=0^*$	$P_x=\frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2}$ $P_y=\frac{\pi^2 EI_{yy}}{L^2}$ $r^2P_T=GK+\frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2}$ $r^2=r_s{}^2+\beta_x e_y+\beta_y e_x$
	C/C	$\begin{vmatrix} P_x-P & 0 & -y_0P \\ 0 & P_y-P & x_0P \\ -y_0P & x_0P & r_s{}^2(P_T-P) \end{vmatrix}=0$	$P_x=40.688\frac{EI_{x_0}}{L^2}$ $P_y=40.688\frac{EI_{yy}}{L^2}$ $r_s{}^2P_T=GK+40.688\frac{EI}{L^2}$
	C/S	$\begin{vmatrix} P_x-P & 0 & P(0.6284e_y-y_0) \\ 0 & P_y-P & -P(0.6284e_x-x_0) \\ P(0.6284e_y-y_0) & -P(0.6284e_x-x_0) & r^2(P_T-P) \end{vmatrix}=0$	$P_x=20.695\frac{EI_{xx}}{L^2}$ $P_y=20.695\frac{EI_{yy}}{L^2}$ $r^2P_T=GK+20.695\frac{EI_\omega}{L^2}$ $r^2=r_s{}^2+0.6284(\beta_x e_y+\beta_y e_x)$
	C/F	$\begin{vmatrix} P_x-P & 0 & P(e_y-y_0) \\ 0 & P_y-P & -P(e_x-x_0) \\ P(e_y-y_0) & -P(e_x-x_0) & r^2(P_T-P) \end{vmatrix}=0$	$P_x=2.660\frac{EI_{xx}}{L^2}$ $P_y=2.660\frac{EI_{yy}}{L^2}$ $r^2P_T=GK+2.660\frac{EI_\omega}{L^2}$ $r^2=r_s{}^2+\beta_x e_y+\beta_y e_x$
非相似境界	P/P	$\begin{vmatrix} P_x-P & 0 & -0.9860y_0P \\ 0 & P_y-P & P(e_x-x_0) \\ -0.7909y_0P & P(e_x-x_0) & -r^2(P_T-P) \end{vmatrix}=0$	$P_x=\frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2}$ $P_y=40.688\frac{EI_{yy}}{L^2}$ $r^2P_T=GK+40.688\frac{EI_\omega}{L^2}$ $r^2=r_s{}^2+\beta_y e_x$
	C/P	$\begin{vmatrix} P_x-P & 0 & -0.9040y_0P \\ 0 & P_y-P & -P(0.5071e_x-x_0) \\ -0.8444y_0P & -P(0.5071e_x-x_0) & r^2(P_T-P) \end{vmatrix}=0$	$P_x=20.695\frac{EI_{xx}}{L^2}$ $P_y=40.688\frac{EI_{yy}}{L^2}$ $r^2P_T=GK+40.688\frac{EI_\omega}{L^2}$ $r^2=r_s{}^2+0.5071\beta_y e_x$
	P/S	$\begin{vmatrix} P_x-P & 0 & P(0.5260e_y-0.4450y_0) \\ 0 & P_y-P & -P(e_x-x_0) \\ P(0.4517e_y-0.3822y_0) & -P(e_x-x_0) & r^2(P_T-P) \end{vmatrix}=0$	$P_x=\frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2}$ $P_y=20.695\frac{EI_{yy}}{L^2}$ $r^2P_T=GK+20.695\frac{EI_\omega}{L^2}$ $r^2=r_s{}^2+0.6284\beta_x e_y+\beta_y e_x$

* この場合は厳密解であることに注意.

振り座屈においては荷重の偏心量が座屈荷重に大きな影響を及ぼすことは注目に値する.

また (113) 式において

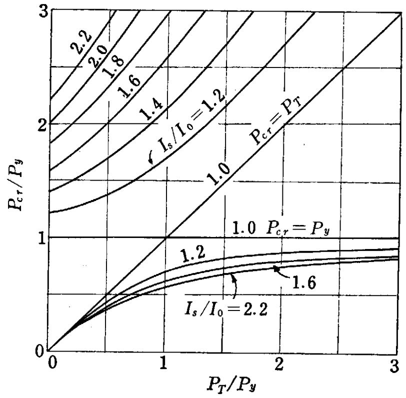
$$\left.\begin{array}{l} e_y=y_0 \text{ とすれば} \\ P=P_x \text{ または } P^2(e_x-x_0)^2=r^2(P_y-P)(P_T-P) \\ e_x=x_0 \text{ とすれば} \\ P=P_y \text{ または } P^2(e_y-y_0)^2=r^2(P_x-P)(P_T-P) \end{array}\right\} \quad (115)$$

すなわち荷重の中心が剪断中心 S を通る主軸のいずれか一つの上にあれば，起こり得る座屈は他の主軸のまわりの純曲げ座屈か，あるいはその主軸上の荷重によって起こる横倒れ座屈 (lateral buckling) である. (115) 式で与えられる横倒れ座屈の特有方程式はすでに多くの人々によって論ぜられているように，荷重偏心量と座屈荷重との関係を示す直角双曲線の式であって，偏心量が大きくなると，P_{cr} が負，したがって引張り荷重によっても横倒れ座屈が起こり得ることを示している. これらの式についても次号で再びふれる予定である. 今荷重の中心が図心に一致し，かつ断面が x 軸に関して対称であるとすれば，$e_x=e_y=0$, $y_0=0$ として，横倒れ座屈の条件式はつぎのようになる.

$$\left.\begin{array}{l} x_0{}^2P^2=r_s{}^2(P_y-P)(P_T-P) \\ \text{あるいは} \\ \dfrac{I_0}{I_s}P^2-(P_y+P_T)P+P_yP_T=0 \end{array}\right\} \quad (116)$$

この二次式は二つの実根を有し，その一つは P_y または P_T のいずれよりも小さく，他の一つはそのいずれよりも大きい. (116) 式より得られるこの二つの座屈荷重をグラフに示すと，つぎの第 38 図のようになる.

この図を見ればわかるように P_T/P_y が小さい場合には低い方の座屈荷重は P_T に非常に近く，したがって座屈波形は純振り座屈のそれに近い. これに反して，高い方の座屈荷重は主として純曲げ座屈の波形を示す. また P_y/P_T が大きくなると低い方の座屈荷重は純曲げ座屈に近づく. たとえば等脚アングル材では I_s/I_0 がだいたい 1.6 となるから，このグラフ中の対応する曲線が使用で



第 38 図 共心軸圧縮力を受ける一軸対称断面材の曲げ振り連成座屈（両端単純支持）

きる. その他の一軸対称断面（たとえばチャンネル材など）では I_s/I_0 を個々の場合について計算しなければならない.

最後に以上の結果をまとめて表にすれば，第 11表のようになる.

11. 一般化された Secant Formula

柱の設計においては常に荷重の偏心，初期撓みや材料の不均一性，さらに細長比 L/r が小さい短柱の範囲では残留応力の影響等は無視できない重要な因子である.

本節においてはその中でも特に重要な荷重の偏心がある場合の柱の，圧縮荷重に対する弾性的挙動について考察する. 一般に柱が偏心軸圧縮力を受けると，その偏心によって軸力 P の外に曲げモーメントが発生し，そのため柱は荷重がかかると同時に撓み始めることになる. そしてその撓みは荷重とともに増大し柱のある断面での最大圧縮応力が材料の降伏点を越えると，その付近に塑性域が発生し，しだいに発達して断面の曲げ剛性や振り剛性が低下し遂に柱の最高荷重点に到達して，屈服による破壊を起こすことは前号で述べたとおりである. すなわちこの場合の柱の挙動は分岐点 (bifircation point) を持ったいわゆる座屈現象ではなく，不安定現象 (instability phenomenon) であるが，柱の設計に良く使用され

第 11 表 偏心軸圧縮力 P を受ける薄肉開断面材に起こる座屈様式とその特有方程式（両端単純支持）

座屈型式	特有方程式	備考
非連成座屈	$P_{cr}=P_x, P_y, P_T$ の最小値 $P_x=y$ 軸周りの純曲げ座屈荷重 $P_y=x$ 軸周りの純曲げ座屈荷重 $P_T=$純振り座屈荷重	$e_x=x_0$, $e_y=y_0$ の場合に限り起こる.
二重連成座屈	$e_y=y_0$ ならば $P_{cr}=P_x$ または $P^2(e_x-x_0)^2=r^2(P_y-P)(P_T-P)$ （横倒れ座屈）の小さい方の値	$e_x=x_0$ または $e_y=y_0$ のいずれかが成立する場合に起こる. AISC の ld/bt Formula や Interaction Formula の基礎式
三重連成座屈	$r^2(P_x-P)(P_y-P)(P_T-P)-P^2(e_y-y_0)^2(P_y-P)$ $-P^2(e_x-x_0)^2(P_x-P)=0$ の最小値	$e_x \neq x_0$, $e_y \neq y_0$ の一般の場合 $P_{cr}<\min(P_x, P_y, P_T)$

ている Secant Formula はこのような柱の弾性的撓みと荷重との関係を与える簡単な理論式である．この式は両端支持二軸対称断面の柱の一つの主軸上に荷重の中心がある場合にしか厳密には適用できない．したがって任意の非対称断面を有する柱が偏心軸圧縮力を受ける場合の荷重 P と撓み (u, v) および振り φ との関係式を求め，従来の Secant Formula による柱の設計規準の妥当性を検討する必要がある．これがすなわち一般化された Secant Formula の問題である．議論を簡単にするため，両端単純支持 (S/S) の場合について考察し，両端回転端 (P/P) の場合に行なった実験と理論の相関性について簡単に述べることにする．

さて両端支持の柱の場合，(110) 式中の必要な諸係数を求めてみるとつぎのようになる．

$$A_{mn}=-P\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\delta_{mn},\quad F_{mn}=Pe_y\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\delta_{mn}$$

$$M_{mn}=-Pe_x\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\delta_{mn},\quad Z_{mn}=Pe_y\left(\frac{m\pi}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)\delta_{mn}$$

$$Z_{mn}'=-Pe_x\left(\frac{m\pi}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)\delta_{mn}$$

$$\mathfrak{U}_n=-Pe_x\left(\frac{n\pi}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}(1-\cos n\pi)$$

$$\mathfrak{V}_n=Pe_y\left(\frac{n\pi}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}(1-\cos n\pi)$$

ここに δ_{mn} は Kronecker のデルタを示す．

以上の結果を (110)式に代入して整理すれば，つぎのような a_n, b_n および c_n に関する三元一次連立方程式が得られる．

$$\left.\begin{array}{l} a_n(n^2P_x-P)+P(e_y-y_0)c_n=-2Pe_x\left(\dfrac{\sqrt{2L}}{n\pi}\right) \\ b_n(n^2P_y-P)-P(e_x-x_0)c_n=-2Pe_y\left(\dfrac{\sqrt{2L}}{n\pi}\right) \\ P(e_y-y_0)a_n-P(e_x-x_0)b_n+c_nr^2(P_T{}^{(n)}-P)=0 \end{array}\right\}$$

$$(n=1,3,5,\cdots\cdots)\qquad(117)$$

ここに

$$P_x=\frac{\pi^2EI_{xx}}{L^2},\quad P_y=\frac{\pi^2EI_{yy}}{L^2},\quad P_T{}^{(n)}=\frac{1}{r^2}\left(GK+\frac{n^2\pi^2EI_\omega}{L^2}\right)$$

である．

(117) 式を a_n, b_n および c_n について解けば

$$a_n=\frac{\Delta_{n_1}}{\Delta_n},\quad b_n=\frac{\Delta_{n_2}}{\Delta_n},\quad c_n=\frac{\Delta_{n_3}}{\Delta_n}\qquad(118)$$

ここに

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} n^2P_x-P & 0 & P(e_y-y_0) \\ 0 & n^2P_y-P & -P(e_x-x_0) \\ P(e_y-y_0) & -P(e_x-x_0) & r^2(P_T{}^{(n)}-P) \end{vmatrix}$$

Δ_{n1}, Δ_{n2}, Δ_{n3} はそれぞれ Δ_n の第1列，第2列，第3列を (117)式の右辺の項で置換することによって得られる行列式を表わす．

(97)，(118) 式を用いて，けっきょく柱の撓み (u, v) および振り φ はつぎのように荷重 P とその偏心量 (e_x, e_y) の函数として求められる．

$$u(z)=\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\Delta_{n_1}}{\Delta_n}u_n(z),\quad v(z)=\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\Delta_{n_2}}{\Delta_n}u_n(z)$$

$$\varphi(z)=\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\Delta_{n_3}}{\Delta_n}u_n(z)\qquad(119)$$

いま特に (119) 式において $e_y=y_0$ とすれば，その第1式より

$$a_n=-\frac{2Pe_x\left(\dfrac{\sqrt{2L}}{n\pi}\right)}{n^2P_x-P}$$

が得られ，したがって (97) 式に代入して

$$u(z)=-\frac{4Pe_x}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi z}{L}}{n(n^2P_x-P)}$$

となる．この式をつぎの公式

$$\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin nz}{n(n^2-k^2)}=\frac{\pi}{4k^2}\left(\frac{\cos k\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\dfrac{k\pi}{2}}-1\right)$$

を用いて変形すると

$$u(z)=e_x\left(1-\frac{\cos k\left(z-\dfrac{L}{2}\right)}{\cos\dfrac{kL}{2}}\right)\qquad(120)$$

ここに　　$k^2=\dfrac{P}{EI_{xx}}$

これはよく知られた従来の Secant Formula を導く基礎式である．さてここに導いた一般化された Secant Formula (119) 式を用いて行なった数値計算の1例を示すとつぎのごとくである．

アメリカ合衆国において送電線鉄塔用として使用されている圧延広幅形鋼 14 WF 43 の長さ $L=280''$ の柱が $e_x=0.75''$, $e_y=10''$ の偏心を有する軸力 P を受ける場合の変形を考える．この柱の諸断面係数その他計算に必要な諸量はつぎの第 39 図 (次ページ) に示してある．

以上の資料を基にして座屈荷重を計算してみると

$$P_{cr}=103\text{kips}$$

となり，当然のことながら P_x, P_y および P_T のいずれよりも小さいことがわかる．そこで (119)式を用いて荷重と撓み (u, v) および振り φ と軸圧縮力 P との関係を計算してグラフに画いてみると，つぎの第 40 図のようになる．

(119) 式の級数は収斂が速いので，初めの3項をとって近似してある．また中央断面 $z=L/2$ 上に現われる直応力 σ と荷重 P との関係は第 39 図に示したようになる．これらの図中実線は新しい一般化された Secant Formula を用いて計算した場合で，点線は従来の Secant Formula による計算値を示している．この計算例からつぎのようなことがいえると思われる．

(i) 柱の撓みに関しては従来の Secant Formula に

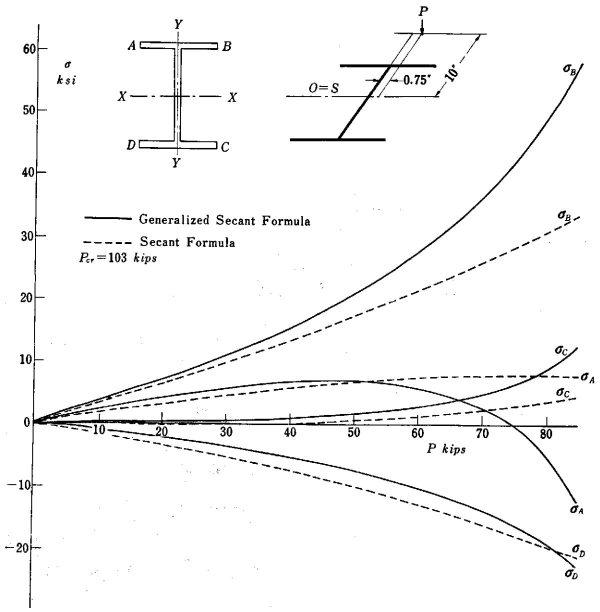
よって求められる撓みは曲げ剛性の大きい方の軸まわりの曲げに関する限り，荷重が相当大きな値になるまで正確であるが，曲げ剛性の小さい方の軸まわりの曲げの場合には低い荷重の所からここで求めた厳密な曲線から離れてしまうものと思われる．

（ⅱ）柱の中央断面における応力と荷重の関係を従来の Secant Formula と新しい Generalized Secant Formula と比較してみると $P=50$ kips のところで誤差約 13％である（この荷重は柱の座屈荷重の約 50％ である）．材料をふつうの軟鋼として，その降伏応力 $\sigma_y=33$ksi とすると，柱の中央断面においては St. Venant の捩り剪断応力 τ_{st} も曲げ捩り剪断応力 τ_ω も零であるから，柱は直応力 σ の値が σ_y を越せば降伏を起こすことになる．

この例題では σ_B が常に最大応力となるから $\sigma_B=\sigma_y$ としたときの降伏荷重 P_y は $P_y=66.5$kips となる．それ以後の荷重状態に対する関係式は柱が弾塑性応力状態に入るので，この理論式では調べることはできない．したがって柱の最高荷重の問題ももちろん論ずることはできないが，柱が偏心圧縮荷重を受ける場合その最高荷重が偏心量の大きさいかんによって著しく座屈荷重よりも低くなることがうなずけると思う（この例題では約 25％位低下するものと思われる）．

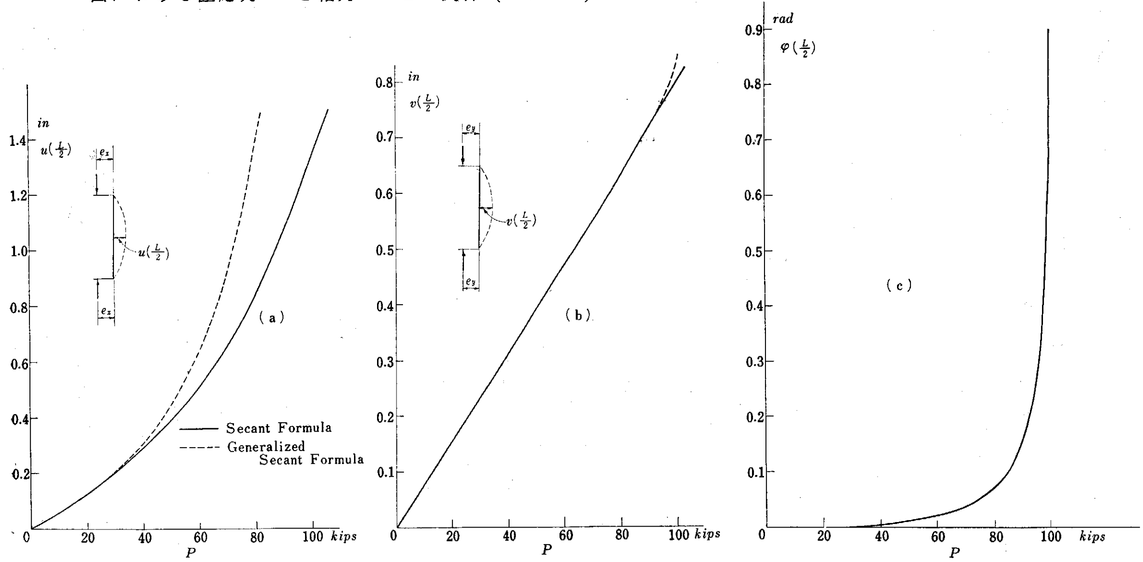
以上に述べたように，柱が任意の偏心量を有する軸圧縮力を受ける場合，従来の Secant Fomula を合理化し，ここに述べた Generalized Secant Formula を基にした新規格を作るべきであると思う．

さてこの新しい Secant Formula に関する理論を実験的に検証する意味において一軸対称断面である等辺山形鋼の長柱を用いて偏心圧縮試験を行ない，荷重と柱の曲げ振り変形の挙動を調べてみた．試験片としては 100 mm×100 mm×13 mm の圧延山形鋼で，柱の長さを 200 cm



Nominal Size	Weight per Foot	Area	Depth	Flange Width	Flange Thickness	Web Thickness
In 14×8	Lb 43	In² 12.65	In 13.68	In 9.000	In 0.528	In 0.408
I_y	r_y	I_x	r_x	P_x	P_y	P_T
In⁴ 45.1	In 1.89	In⁴ 4290	In 5.82	Kips 164.8	Kips 1563	Kips 460

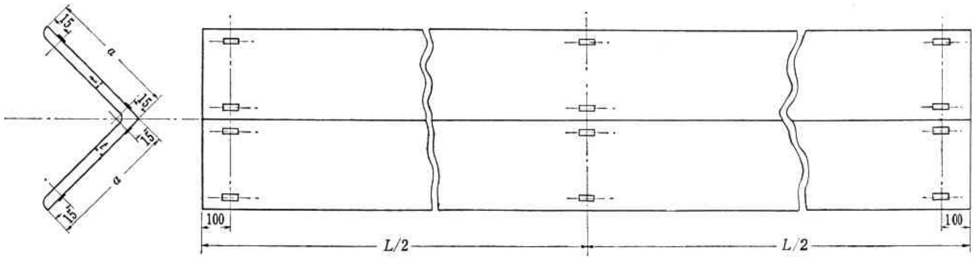
第 39 図　偏心軸圧縮力を受ける広幅型鋼の柱の中央断面における直応力 σ と軸力 P との関係（14WF43）



(a), (b)　偏心圧縮荷重を受ける柱の荷重-撓み曲線（14WF43）

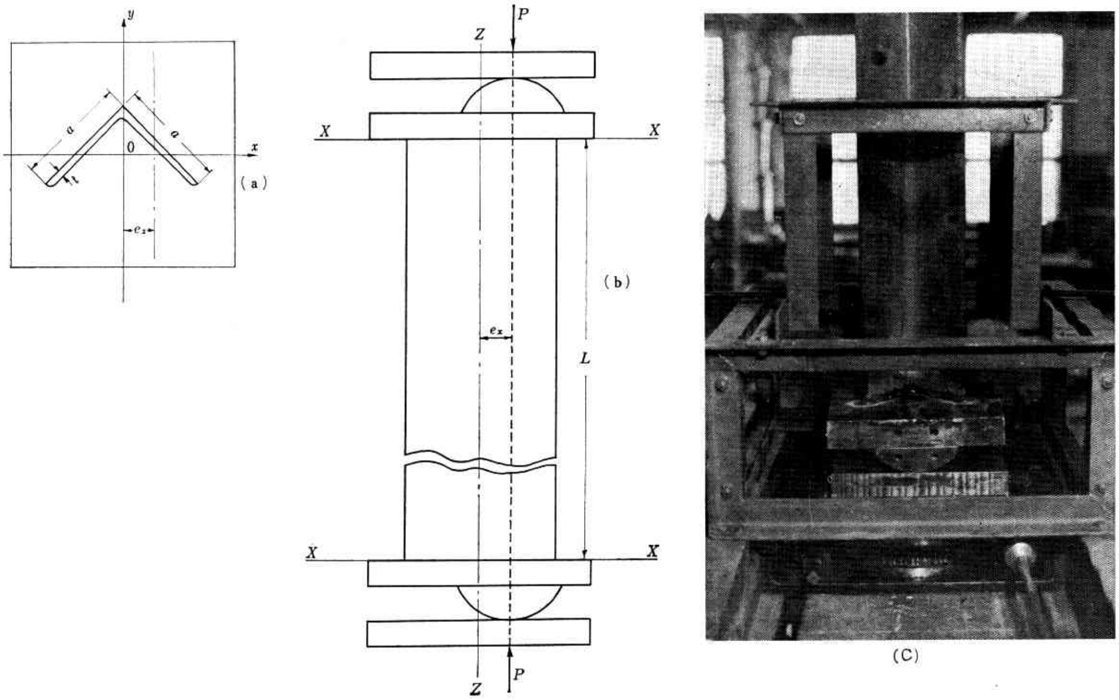
(c)　偏心圧縮荷重を受ける柱の荷重-振れ曲線（14WF43）

第 40 図

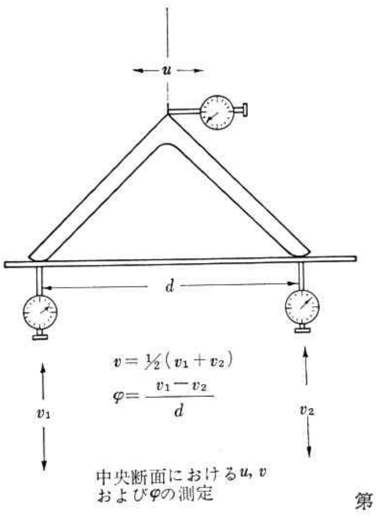


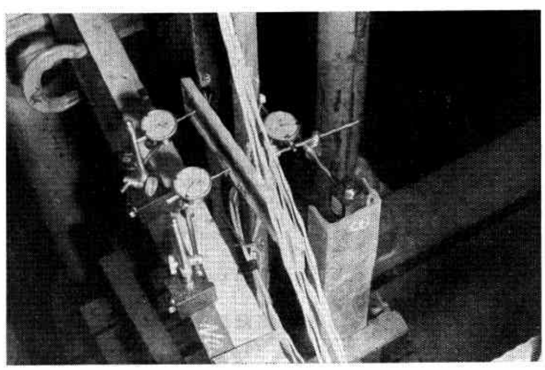
	a	t	A	L	I_{xx}	I_{yy}	K	I_{ω}	L/r_x	L/r_y	P_x	P_y	P_T	e_x	x_0	y_0	r_0^2
	mm	mm	mm²	mm	mm⁴	mm⁴	mm⁴	mm⁶			ton	ton	ton	mm		mm	mm²
A	100	13	2431	2000	91×10^4	205×10^4	13695×10^4	99.77×10^6	51.81	52.91	180.25	188.62	319.30	20	0	−41.6	3538.9

第 41 図 偏心圧縮試験に使用した等辺山形鋼材の諸断面係数と歪ゲージ貼付位置その他

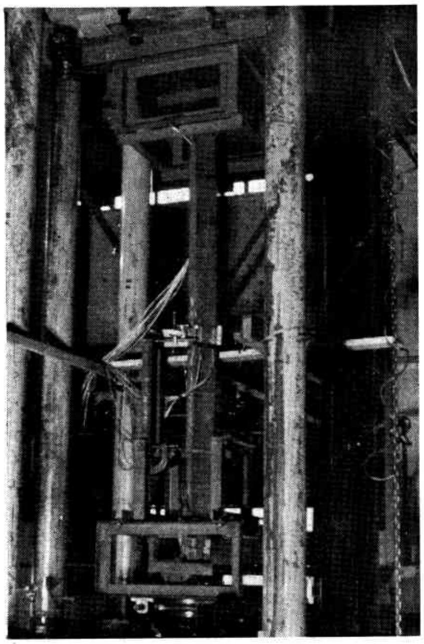


第 42 図 偏心負荷の方法および端部治具

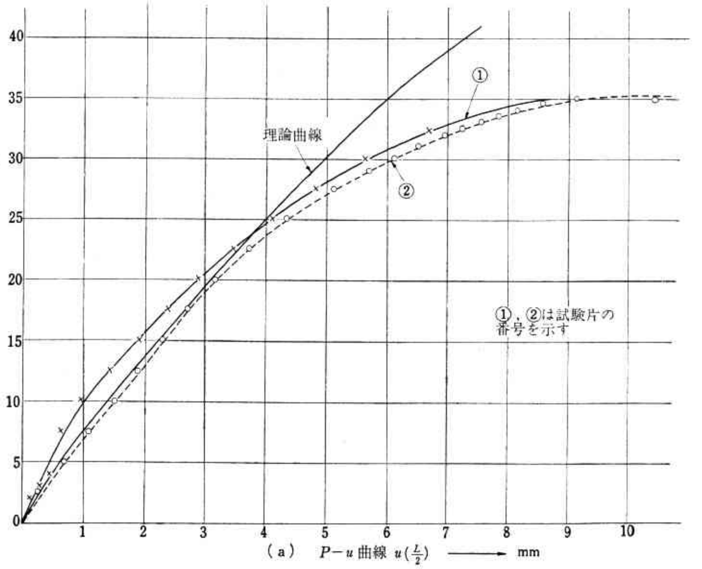




第 43 図 柱の撓みおよび捩りの測定



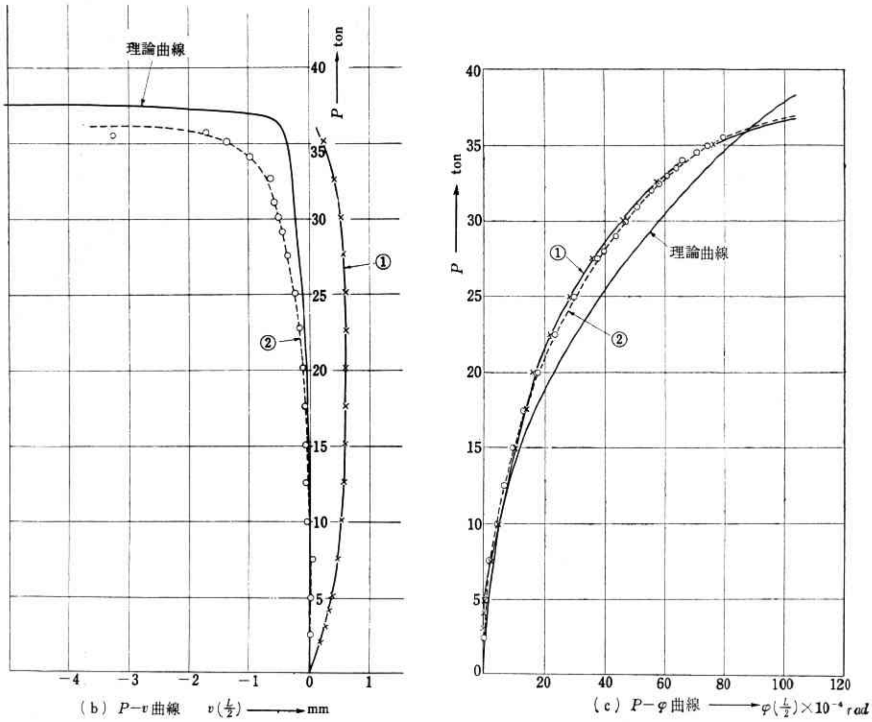
第 44 図　柱の偏心圧縮試験装置



とし，荷重の偏心量が自由に調節できるように設計された端部冶具を柱の両端に取り付け，アムスラー形 300 t 万能試験機を用いて実験を行なった.

第 41, 42, 43, (前ページ) 44 図に実験に使用した試験片の主要寸法，断面の諸係数，純曲げおよび純捩り座屈荷重の理論値，撓み u, v および捩り φ ならびに圧縮歪測定のためのダイアルゲージ，歪ゲージの配置状況，試験装置全体の写真等が示してある.

第 42 図で試験片は y 軸に平行に 20 mm の偏心を与えて圧縮荷重を加えた.



第 45 図　偏心圧縮試験における柱の撓み (u, v) および捩り φ と軸力 P の関係（等辺山型鋼材）

実験に使用した端部冶具に対する境界条件について考えてみると，試験片の端板と試験機のベッドの間には半円壔をしたシリンダーが y 軸に平行におかれ，これを通して荷重が試験片に加えられるようになっているから柱の両端は曲げ剛性の強い主軸方向には，すなわち変位 u に対し単純支持 (S/S) の両端回転端 (P/P) であると考えられる.

柱の撓み (u, v) はその剪断中心軸の変位であり，φ はそのまわりの断面の回転角であるから柱の中央断面において 3 個のダイアルゲージを第 43 図に示したように取り付けて測定した．上の第 45 図はこの実験において得られた P-u, P-v, P-φ 曲線である．図中の理論曲線

は両端回転端の柱に対する級数解の初めの3項をとって画いたものであるが，実験結果とは荷重が 20 t までのところでは比較的良く一致しているが，それ以上になるとしだいに離れてゆくのがわかるであろう．

すなわち荷重がある範囲内にあれば Generalized Secant Formula で柱の弾性的挙動がかなり正確に推定できると思われる．なお圧縮荷重を受ける柱の荷重一撓み曲線をもっと精密に求めようと思えば実際の柱には不可避な初期撓みの影響をも考慮して理論解を求める必要があろう．さて従来の Secant Formula で P-u 曲線を求めてみるとこの場合その曲線はやや新しい理論曲線より撓みが小さく出るが，実際問題として両者はほとんど一致していた．このことは荷重があまり大きくない場合とか，曲げ剛性に比べて捩り剛性の大きい断面材の場合には従来の Secant Formula でも十分に役に立つことを示している．

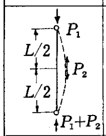
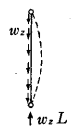
12. 分布軸圧縮力を受ける柱の安定

最後に柱が両端にかかる軸力 P のみならず，その軸に沿って分布している圧縮力 $w_z(z)$ によって座屈を起こす場合を一二考えてみよう．他の場合も同様に論ずることができるから柱の両端は単純支持とすると (107)式よりその第一近似として次式が得られる．

$$\begin{vmatrix} P_x-P+\dfrac{L^2}{\pi^2}A_{11} & 0 & P(e_y-y_0)+\dfrac{y_0L^2}{\pi^2}A_{11} \\ 0 & P_y-P+\dfrac{L^2}{\pi^2}A_{11} & -P(e_x-x_0)-\dfrac{x_0L^2}{\pi^2}A_{11} \\ P(e_y-y_0)+\dfrac{y_0L^2}{\pi^2}A_{11} & -P(e_x-x_0)-\dfrac{x_0L^2}{\pi^2}A_{11} & r^2(P_T{}^{(1)}-P)+\dfrac{r_0{}^2L^2}{\pi^2}A_{11} \end{vmatrix}=0 \qquad (121)$$

(121) 式の応用例題として第 12 表に示すような軸圧縮力がかかる場合を考えてみると，それぞれ，つぎのようになる．

第 12 表　分布軸圧縮力を受ける柱の曲げ捩れ座屈に関する特有方程式の一二の例（両端単純支持，第一近似）

	特有方程式（1st. App.）	備　考
	$\begin{vmatrix} P_x-(P_1+\frac{P_2}{2}) & 0 & -y_0(P_1+\frac{P_2}{2}) \\ 0 & P_y-(P_1+\frac{P_2}{2}) & x_0(P_1+\frac{P_2}{2}) \\ -y_0(P_1+\frac{P_2}{2}) & x_0(P_1+\frac{P_2}{2}) & r_0^2(P_T-(P_1+\frac{P_2}{2})) \end{vmatrix}=0$	P_1の偏心量は無いものとする
	$\begin{vmatrix} P_x-\frac{w_zL}{2} & 0 & -\frac{y_0w_zL}{2} \\ 0 & P_y-\frac{w_zL}{2} & \frac{x_0w_zL}{2} \\ -\frac{y_0w_zL}{2} & \frac{x_0w_zL}{2} & r_0{}^2(P_T-\frac{w_zL}{2}) \end{vmatrix}=0$	w_zは一定とする

13. む　す　び

前号において説明した薄肉開断面材の安定に関する一般的理論の工学的応用としてまず軸圧縮力を受ける柱の座屈特有方程式を導き，曲げ捩り座屈の特性について論じ，次いで任意の偏心を有する一軸圧縮力による柱の曲げ捩り変形と荷重との関係について説明した．また従来の Secant Formula による柱の設計が往々にして非安全側になりうることを指摘し，一般化されたSecant Formula を用いて合理的な設計規準を立てる必要性のあることを論じた．そして最後に分布軸圧縮力を受ける柱の座屈特有方程式について簡単に説明したが，次号において軸圧縮力と端部モーメントを受ける柱の安定について解説する予定である．

(1964 年4月 17 日受理)