

薄肉開断面材の弾性力学(Ⅲ)

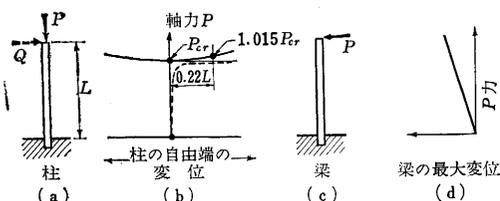
川井 忠彦

(Ⅱ)において、薄肉開断面梁が任意の動的外力を受けて振動する場合の運動方程式とその解法、ならびに二三の工学的応用問題について述べたが、本号では薄肉開断面材が任意の外力(軸力、端部モーメントあるいは横荷重)の作用を受けて座屈変形を起こした場合の基礎方程式、ならびにその一般的解法について概説する。

9. 柱の不安定現象の本質と薄肉開断面材に起

こり得る座屈変形様式

本論に入る前に柱の不安定現象について若干論ずることとする。一般に物体が外力によって弾性的な変形を起こしているときには、外力と弾性的に生じた内力とは釣り合っているばかりでなく、ふつうは安定した平衡状態となっている。ところがある種の変形様式ではそれがあある大きさになったり、またはそれに対応する外力の大きさがある程度以上になると、その釣合状態はもはや安定なものではなくて、それから先では別の変形様式が安定な釣合となることあると、あるいはまた急激な大変形が起って破壊したりすることがある。このような現象を一般に弾性不安定 (elastic instability) と呼んでいる。柱に起こる不安定現象の本質をつかむためにつぎのような簡単な例題を考えてみよう。第 24 図 (a) は一端固定他端自由の長い、完全に真直な柱を示す。以下述べることは、"長い" という言葉について、なんら定量的な説明をしていないけれども、他の境界条件の長い柱に対しても成り立つのである。



第 24 図 一端固定一端自由の柱 (a) と梁 (b) における撓みの挙動の比較

いま図心軸を通り小さな軸力 P をこの柱に加えると、柱は撓まずに少し縮む。

この力 P をさらに大きくし、小さな横方向の力 Q を加え、それから取り除いたとすると柱は少し横の方向に撓み、やがてもとの真直の状態に戻るであろう。軸力 P を大きくしながら同じようなサイクルを繰り返せば P が Euler 荷重 P_{er} と呼ばれるある限界荷重に達すると、横方向の力 Q を加え、取り除いた後も柱は少し撓んだ状態のままになる。この状態の時に力 Q を反対方向に加えれば柱はもとの真直な状態に戻るであろう。この状態を中立の平衡状態と呼んでいる。すなわち軸力 P が P_{er}

に等しい時には、ごく僅かな横方向の力 Q を加えれば柱に曲げ座屈 (flexural buckling) が起こり、したがって不安定な直立の平衡状態を破ることができる。いま軸力 P を P_{er} よりごく僅かだけ大きくすると、無限小の力 Q を加えても柱はもとの状態には戻らなくなる。梁の曲げに関する厳密な微分方程式を用いればこの新しい平衡状態を決定することは可能である (柱のエラスティカ (Elastica) の問題)。そのような解析によると軸力 P が P_{er} 以下であれば常に一つの安定した平衡状態 (ただ単に縮む状態) が存在し、 $P=P_{er}$ になるとその平衡状態は中立となり $P>P_{er}$ になると、その平衡状態は不安定となり、別のもう一つの安定した平衡状態が現われてくる。そして、たとえば軸力 P が P_{er} より 1.5% 大きくなると、変形が弾性限内にあるとして、その最大撓みは柱長の 22% に等しいことが示される。この場合、柱の荷重-撓み曲線は第 24 図 (b) の実線で近似的に示される。

このような状態は、ちょうど滑らかな曲面上におかれた質点の平衡状態と比べてみれば良くわかる。



すなわちある平衡状態 I を考え、これと同じ外力、境界条件のもとで、それよりごく僅かの変位によって達した状態 II を仮想する。状態 I より II に移るときのポテンシャルエネルギーの増加が正、0、負となるに従って、状態 I の平衡状態は安定 (stable) 中立 (neutral) 不安定 (unstable) となる。不安定現象 (instability phenomenon) は安定から不安定に移る限界の中立平衡状態で起こるのであり、この平衡状態の分岐点 (bifurcation point) に対応する荷重がいわゆる柱の座屈荷重 (buckling load) P_{er} と呼ばれるものである。

実際の柱では完全に真直なものではなく、また荷重の偏心も完全には無くすることができないから、軸力 P がかかると同時に柱は撓み始め、その撓みは荷重とともに増大する。第 24 図 (b) に破線でその挙動が示されている。この場合前に述べたような荷重の分岐点は存在し

ないが荷重—撓み曲線に極大点が現われる。この点がすなわち柱の最高荷重 P_{ult} を示す点で、この点を過ぎるともはや柱はその荷重に耐えられなくなり、柱の撓みは荷重を減少させても急激に進行し、ついに崩壊するに至る。この現象を屈服という。そしてこれらの現象全体をひっくるめて柱の不安定現象と呼んでいる。

それは P が P_{cr} より大きくなると非常に大きな変形を生じて外力の偏心が増大し、したがって柱の内部応力も急激に大きくなり、塑性変形が進行し、ついに断面全体が降伏して、それ以上の負荷に耐えられなくなるからである。いずれにしても、このような状態は実際の構造物では許されないし、また柱の支え得る最高荷重 P_{ult} (ultimate load carrying capacity of a column) は P_{cr} と大差ないから、座屈荷重 P_{cr} を決定することが柱の強度解析上最も重要な問題になる。

第 24 図 (c) は以上に説明した不安定現象をさらに明確にさせるために示したもので、片持梁が横荷重を受ける場合である。この場合自由端の撓みは外力 P の一次関数であって、 P が 2 倍になれば撓みも 2 倍になる。ところが柱の場合、 $P < P_{cr}$ ならば、荷重が何倍になってもその値が P_{cr} 以下である限り、理想的な柱では外力の大きさは柱が縮むこと以外なんらの影響も及ぼさないわけである。また実際の柱の場合でも、軸力が大きくなるにつれて、徐々に撓みが増加するだけでいつ危険な負荷状態に達するのかは限界荷重 P_{cr} に近くなるまでわからない。実際第 24 図 (b) に示したように P_{cr} の近傍で突然撓みが急激に大きくなるのである。すなわち荷重—撓み線図は外力の一次関数ではない。このようなわけで各種構造物における柱の不安定現象は往々にして大惨事を招き、極めて危険である。特に薄肉部材の多く使用されるようになってきた最近の構造物では、破壊の大部分が部材の不安定現象によるものであることを銘記せねばなるまい。

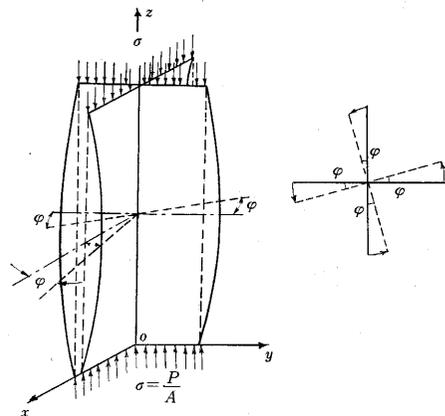
以上において曲げ座屈を例にとって柱に起こる不安定現象の本質を論じたが、弾性学におけるキルヒホッフ (G. Kirchhoff) の解の唯一性に関する定理 (uniqueness theorem) によれば、弾性体に作用する外力および表面の条件が与えられれば平衡状態はただ一つ定まるわけであるから、このような柱の不安定現象は一見この解の唯一性の定理と矛盾しているように思われる。しかし実際にはこの定理は変位が微小で、ひずみが変位の一次式で表わされるときに限って成立するのであって、この仮定が成立しないとき、同一条件に対して二つ以上の平衡条件が存在しても差し支えないことになる。細長い梁柱のようなものでは大きな変形を行なっても、ひずみは微小であり、応力は弾性域にある場合も多い。そのような場合の変形の解析にはいわゆる有限変位理論 (theory of elasticity with large displacements) を必要とするが、弾

性学でもこの範囲になると解の唯一性の定理が成立せず、弾性不安定現象が起こっても差し支えない。以上述べたように弾性不安定現象は変位について線型の微小変位理論 (infinitesimal theory of elasticity) の範囲では、本質的には考えられないものであるが、座屈の安定限界点を決定するためには外力の小さいときと同じ形式の平衡状態から、新しい平衡状態に移るときの変位が小さいので線型化した式を用いることができる (この線に沿って 10. および 11. において薄肉開断面材の安定に関する平衡方程式が導かれるであろう)。最後に薄肉開断面材に起こり得る柱としての座屈変形様式について述べることにする。座屈は前述のように柱の平衡状態に分岐点の生ずる場合に現われるのであるから、この分岐点のすぐ近傍では二つの釣合の状態が存在する。その一つはその荷重になるまで存在していた変形様式 (直接変形様式と名づける) のものであり、そしてもう一つの釣合の状態はそれとは別な変形様式 (座屈変形様式と名づける) のものであって、そのときまでにはぜんぜん含まれていなかったようなものでなければならぬ。いま倉西教授に従ってこの座屈変形様式として考えられるものを二三挙げてみると次表のようなものが考えられる。

第 6 表 薄肉開断面材に起こり得る柱としての座屈変形様式

荷重形式	直接変形様式	座屈変形様式
1. 軸圧縮荷重	真直な縮み	a. 曲 げ b. 振 り
2. 一主軸周の曲げ荷重	その主軸周の曲げ	a. 他の主軸周の曲げ b. 振 り
3. 振り荷重	振 り	a. 曲 げ

この荷重形式と座屈変形様式について 1-a の組合せはいわゆる柱の座屈といわれるものであって Euler 以来最も多く取り扱われたもので座屈の代表的なものである。そうして他と比較するときには曲げ座屈 (flexural

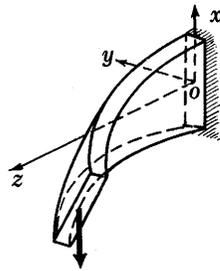


第 26 図 十字形断面材に起こる振り座屈 (torsional buckling) (S. Timoshenko, 1907 年)

buckling, Knickung) ということにしよう. 1-b の組合せたものは Timoshenko が 1907 年に論じ, H. Wagner が 1928 年に発表したのが最初であって, 比較的新しく理論が発展したものである. したがって実際に相当起っているのだが, まだ一般にははっきりと注意されていない. これを振り座屈 (torsional buckling, Verdrehung) と名づけていくこととする.

荷重形式 2 の場合には, 荷重として曲げモーメントを発生するものであれば偶力荷重でも, 横荷重であってもよいのである. しかし座屈変形は a, b が独立して生ずることができないで 2-a-b の組合せとなって現われるもので L. Prandtl が 1899 年に取り扱ったのが始まりであって, 横倒れ座屈 (lateral buckling, Kippung) といわれるものである. 3-a の場合は Greenhill が最初に論じたもので細い線を振った場合に現われるものである.

この表に示したものの外にこれらの荷重の組み合わせられている場合もあるわけで, たとえば 1-2, 1-3 などの組合せが考えられる. そうして 1 の圧縮荷重の代わりに引張荷重であることもあるのである. このように薄肉開断面材が軸圧縮力, モーメント (曲げあるいは振りモーメント) また横荷重を受けて座屈変形を起こす場合, その組合せに従っていろいろな変形様式をとることが考えられるから, その座屈荷重を求める理論式も多種多様になるものと思われる. しかしながらその座屈荷重は前号において述べた振動の場合のように, 二つの主軸のまわりの軸圧縮力による曲げ座屈荷重と振り座屈荷重をもって表わすことができないであろうか? この問いに答えるために, まずつぎの 10. で両端において一軸圧縮力 P を受ける単純支持薄肉開断面柱の安定を支配する基礎方程式を導き, その解を求めてみよう.



第 27 図

深い梁に起こる横倒れ座屈 (lateral buckling) (L. Prandtl, 1899 年)

10. 両端において軸圧縮力 P を受ける薄肉開断面材の安定

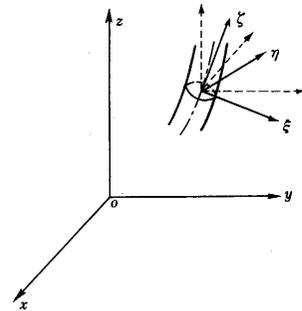
解析のために使用する座標系および諸記号はすべて前号の通りとすると, 柱のある断面 z 上における図心の変位を (u_0, v_0) とすれば,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u + y_0\phi \\ v_0 &= v - x_0\phi \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

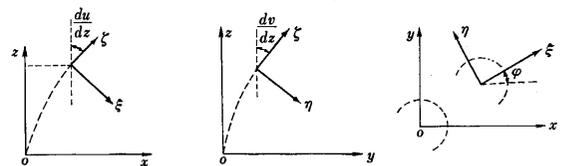
で与えられる. したがってその断面上の曲げモーメント M_x, M_y は, 軸圧縮力の偏心量を (e_x, e_y) とすると,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -P(e_y - v_0) = -P(e_y - v + x_0\phi) \\ M_y &= P(e_x - u_0) = P(e_x - u - y_0\phi) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

となる. ここで空間に固定された x, y, z 座標系に対し, 物体に固定された ξ, η, ζ 座標系をつぎのように定義する. すなわち ζ 軸は図心を通り変位した剪断中心軸の切線 (z の増加する方向) に平行にとり, ξ, η 軸は ζ 軸に垂直な平面内において慣性主軸の方向に,



第 29 図 空間固定座標系 (x, y, z) と物体固定座標系 (ξ, η, ζ) が, 変形後は回転してある微小角度をもつようになる. すなわち (ξ, η, ζ) 座標系と (x, y, z) 座標系の間の傾斜角の関係は, つぎの第 30 図を参考にして第 7 表のように求められる.

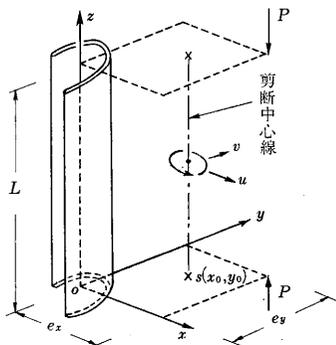


(a) 変位 u による角変化 (b) 変位 v による角変化 (c) 回転 ϕ による角変化
第 30 図 微小座屈変形による (ξ, η, ζ) 座標系の回転

第 7 表 物体座標系 (ξ, η, ζ) と空間固定座標系 (x, y, z) との間方向余弦の関係 (座屈変形後)

	ξ	η	ζ
x	1	$-\phi$	$\frac{du}{dz}$
y	ϕ	1	$\frac{dv}{dz}$
z	$-\frac{du}{dz}$	$-\frac{dv}{dz}$	1

したがって座屈変形後における ξ, η 軸まわりの曲げモーメントをそれぞれ M_ξ, M_η とすれば, 第 7 表を参考にし, 高次の微小量を無視すれば,



第 28 図 偏心軸圧縮力 P を受ける薄肉開断面の柱

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= M_x + M_y \varphi \sim -P\{e_y - v - \varphi(e_x - x_0)\} \\ M_\eta &= -M_x \varphi + M_z \sim P\{e_x - u - \varphi(e_y - y_0)\} \\ M_\zeta' &= M_x \frac{du}{dz} + M_y \frac{dv}{dz} \sim P\left(-e_y \frac{du}{dz} + e_x \frac{dv}{dz}\right) \end{aligned} \right\} (65)$$

(65) の第 3 式 M_ζ' は座屈変形によって生ずる振りモーメント M_ζ の一部である。

また軸圧縮荷重 P は図心軸を通るが、座屈変形によって、つぎのような振りモーメント M_ζ'' が発生する。

$$M_\zeta'' = P\left(y_0 \frac{du}{dz} - x_0 \frac{dv}{dz}\right) \quad (66)$$

振りモーメント M_ζ への第 3 の寄与 M_ζ''' は初め剪断中心軸に平行であった繊維が座屈変形を受けて傾斜することによって生ずる。

すなわち断面 ε における直応力 σ は座屈変形を受けて断面が剪断中心のまわりに φ だけ回転すると断面内に $\sigma \rho \frac{d\varphi}{dz}$ の剪断応力を発生し、これが剪断中心 S のまわりに腕の長さを ρ としてつぎのような振りモーメント M_ζ''' を生ずる。

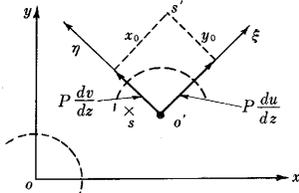
$$M_\zeta''' = -\int_A \left(\sigma \rho \frac{d\varphi}{dz}\right) \rho dA \quad (67)$$

ここに

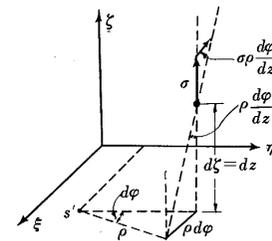
$$\rho^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

すなわち断面は荷重を受けても変形しない、換言すれば断面上の一点 (x, y) と剪断中心 (x_0, y_0) の距離は変形後も一定であるとする。

さて断面上の直応力 σ は第 1 講で述べたように



第 31 図 軸力 P の座屈変形によって生ずる剪断力の作る振りモーメント M_ζ''



第 32 図 断面の直応力 σ が振り φ によって作る振りモーメント M_ζ'''

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M_\xi \eta}{I_{\eta\eta}} - \frac{M_\eta \xi}{I_{\xi\xi}} + \frac{M_\omega \omega_m}{I_\omega} \quad (68)$$

で与えられる。

(68) 式の右辺の第 1 項は軸圧縮力 P による一様圧縮応力、第 2, 第 3 項は曲げモーメント M_ξ, M_η による曲げ応力、第 4 項は断面の曲げ振り応力 (warping stress) σ_ω を表わしている。一般に σ_ω は他の 3 項に比して小さいからこれを無視することにし、(68) 式を (67) 式に代入し、断面不変の仮定を用いて ξ, η 軸に関する演算をもとの x, y 軸に移して行なうと、

$$\begin{aligned} M_\zeta''' &= \frac{d\varphi}{dz} \left[\frac{P}{A} \{I_{xx} + I_{yy} + (x_0^2 + y_0^2) A\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_\xi}{I_{yy}} \left\{ \int y(x^2 + y^2) dA - 2y_0 I_{yy} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_\eta}{I_{xx}} \left\{ \int x(x^2 + y^2) dA - 2x_0 I_{xx} \right\} \right] \quad (69) \end{aligned}$$

ここに x, y は断面の主軸であり、したがって

$$\left. \begin{aligned} \int x dA &= \int y dA = \int xy dA = 0 \\ I_{xx} &= \int x^2 dA, \quad I_{yy} = \int y^2 dA \end{aligned} \right\}$$

なる関係を用いている。さて前号において述べたように

$$r_s^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_0}{A} \quad \text{であるから}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= \frac{1}{I_{yy}} \int y(x^2 + y^2) dA - 2y_0 \\ \beta_y &= \frac{1}{I_{xx}} \int x(x^2 + y^2) dA - 2x_0 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

なる記号を導入し、また (65) 式を (69) 式に代入すれば、

$$M_\zeta''' = P \frac{d\varphi}{dz} (r_s^2 + \beta_x e_y + \beta_y e_x) = P r^2 \frac{d\varphi}{dz} \quad (71)$$

ここに

$$r^2 = r_s^2 + \beta_x e_y + \beta_y e_x$$

以上に求めた M_ζ', M_ζ'' および M_ζ''' を加えると

$$\begin{aligned} M_\zeta &= M_\zeta' + M_\zeta'' + M_\zeta''' \\ &= P r^2 \frac{d\varphi}{dz} - P(e_y - y_0) \frac{du}{dz} + P(e_x - x_0) \frac{dv}{dz} \quad (72) \end{aligned}$$

が得られる。

さて以上に求められた断面力 M_ξ, M_η および M_ζ は変位 u, v , 回転 φ と第 1 講の基礎方程式 (21) 式より、つぎのような関係にある。

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= -EI_{\eta\eta} \frac{d^2 v}{dz^2} \sim -EI_{yy} \frac{d^2 v}{dz^2} \\ M_\eta &= EI_{\xi\xi} \frac{d^2 u}{dz^2} \sim EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} \\ M_\zeta &= GK \frac{d\varphi}{dz} - EI_\omega \frac{d^3 \varphi}{dz^3} \sim GK \frac{d\varphi}{dz} - EI_\omega \frac{d^3 \varphi}{dz^3} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

(73) 式の左辺に (65) の第 1, 第 2 式および (72) 式を代入すれば、けっきょく両端において一軸圧縮力 P を受ける柱の座屈変形に関する平衡方程式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} + Pu - P(e_y - y_0) \varphi &= P e_x \\ EI_{yy} \frac{d^2 v}{dz^2} + Pv + P(e_x - x_0) \varphi &= P e_y \\ EI_\omega \frac{d^3 \varphi}{dz^3} + (P r^2 - GK) \frac{d\varphi}{dz} + P \left[-(e_y - y_0) \frac{du}{dz} \right. \\ &\quad \left. + (e_x - x_0) \frac{dv}{dz} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

(境界条件)

$z=0$ および $z=L$ において

$$u=v=\varphi=0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$$

(74) 式は未知函数 $u(z)$, $v(z)$ および $\varphi(z)$ に関する三元連立常微分方程式であり、これを解けば軸力と柱の変形の関係が完全に決定される。(74) 式を見ればわかるように軸力 P が剪断中心を通らぬ限り、すなわち $e_x \neq x_0$, $e_y \neq y_0$ ならば u, v, φ は互いに独立とはなり得ない。これに反し $e_x = x_0$ あるいは、 $e_y = y_0$ であれば u または v が他の二つから独立になり、 $e_x = x_0$, $e_y = y_0$ ならば変形は完全に互いに独立となる。すなわち軸圧縮力を受ける薄肉開断面材の変形についても振動の場合と同じようなことが成り立っているのである。

変形が互いに独立になる第3の場合には(74)式はつぎのような三つの独立な方程式に分かれる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^2u}{dz^2} + Pu &= Pe_x \\ EI_{yy} \frac{d^2v}{dz^2} + Pv &= Pe_y \\ EI_o \frac{d^3\varphi}{dz^3} + (Pr^2 - GK) \frac{d\varphi}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

(75) 式の第1, 第2式は偏心圧縮荷重を受ける柱の y 軸および x 軸まわりの曲げ変形を支配する良く知られた方程式であるが第3式は振り座屈を支配する方程式である。さて(75)式の第1, 第2式の右辺を零として得られる曲げ座屈の方程式を両端支持の場合について解くと Euler 座屈荷重 P_x, P_y がそれぞれつぎのように求められる。

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_{xx}}{L^2}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{L^2} \quad (76)$$

また第3の振り座屈の方程式も両端支持の場合には

$$\varphi(z) = \phi_0 \sin \frac{\pi z}{L}$$

とおくと境界条件も完全に満足され、振り座屈荷重 P_T が次式のように定められる。

$$P_T = \frac{1}{r^2} \left(GK + \frac{\pi^2 EI_o}{L^2} \right) \quad (77)$$

軸力 P が剪断中心 S を通らない他を含めて、(75) 式の一般解とその座屈荷重を求める特性方程式や座屈変形のモードその他については次節で詳細に論ずることとし、ここではこれ以上述べない。次節で任意の外荷重を受ける薄肉開断面材の安定を支配する最も一般的な方程式について述べる。

11. 任意の外荷重を受ける薄肉開断面材の座屈平衡方程式

薄肉開断面材が図心軸に沿って働く軸圧縮力、曲げモーメント、振りモーメント、分布横荷重、さらに分布したスプリング反力等、工学上の重要問題に現われる外力をすべて含んだ一般的な荷重状態下において座屈変形を起こした場合の平衡方程式を本節において導出する。こ

こに述べる軸圧縮力、曲げモーメントあるいは振りモーメントはすべて部材の両端に加えられるものの外に分布荷重のものも含めるものとする。まず外荷重の影響を、つぎの3種に分けて別々に考察することにする。

- (a) 曲げモーメント M_x, M_y , および振りモーメント M_z のみを受ける場合 (これには分布横荷重により生ずるものも含めることにする)。
- (b) 図心軸に沿って働く分布軸圧縮力のみを受ける場合
- (c) 梁の長さ方向に分布したスプリングによる拘束を受ける場合

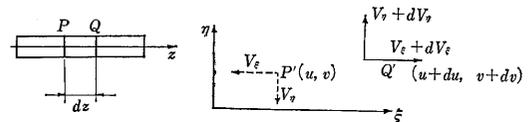
さて梁柱のある断面において M_x, M_y, M_z のモーメント、 V_x, V_y なる剪断力 (剪断中心を通る) が作用している場合、微小座屈変形後のこれらの断面力は第7表を用いて、つぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= M_x + M_y \varphi - M_z \frac{du}{dz} \\ M_\eta &= -M_x \varphi + M_y - M_z \frac{dv}{dz} \\ M_\zeta^{(1)} &= M_x \frac{du}{dz} + M_y \frac{dv}{dz} + M_z \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$M_\zeta^{(1)}$ は前節において述べたのと同じ理由で座屈変形により生ずる振りモーメントの一部を表わしているに過ぎないから $M_\zeta^{(1)}$ と書いたわけである。また剪断力、 V_ξ, V_η および軸力 V_ζ はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} V_\xi &= V_x + V_y \varphi \\ V_\eta &= -V_x \varphi + V_y \\ V_\zeta &= V_x \frac{du}{dz} + V_y \frac{dv}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

これらの断面力はいずれも断面の剪断中心を通る線上において作用しているが、剪断力 V_ξ, V_η は梁が撓むことにより、つぎのような付加振りモーメント $M_\zeta^{(2)}$ を生ずる。



第33図 剪断力 V_x, V_y が座屈変形によって作る振りモーメント $M_\zeta^{(2)}$

$$m_\zeta^{(2)} = -\frac{dM_\zeta^{(2)}}{dz} = V_y \frac{du}{dz} - V_x \frac{dv}{dz}$$

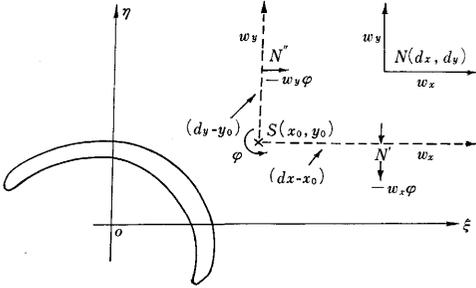
$$\text{したがって} \quad M_\zeta^{(2)} = \int \left(-V_y \frac{du}{dz} + V_x \frac{dv}{dz} \right) dz \quad (80)$$

一般に梁にかかる分布横荷重 w_x, w_y が初めの x, y 軸に関し d_x, d_y の偏心を持っているとすれば、梁は初めからつぎのような分布振りモーメントを受けていることになる。

$$m_z = -\frac{dM_z}{dz} = w_y (d_x - x_0) - w_x (d_y - y_0) \quad (81)$$

ところが座屈変形を生ずると、さらにつぎのような付加振りモーメント $m_c^{(3)}$ を生ずることになる。

$$m_c^{(3)} = -\frac{dM_c^{(3)}}{d\xi} = -\{w_x(dx-x_0) + w_y(dy-y_0)\}\varphi \quad (82)$$



第 34 図 分布横荷重 (w_x, w_y) が作る振りモーメント M_c および $M_c^{(3)}$

これは S を原点とし ξ, η 軸に平行な座標軸上でそれぞれ $(dx-x_0), (dy-y_0)$ の距離の点 N', N'' に作用する w_x, w_y が断面の回転により生ずる付加振りモーメントである。

最後に直応力 σ により生ずる付加振りモーメント $M_c^{(4)}$ を前節と同様に考えると

$$\sigma = \frac{V_c}{A} + \frac{M_\xi \eta}{I_{\eta\eta}} - \frac{M_\eta \xi}{I_{\xi\xi}}$$

であるから

$$M_c^{(4)} = -\int \sigma \frac{d\varphi}{dz} \rho^2 dA = \frac{d\varphi}{dz} (-M_x \beta_x + M_y \beta_y) \quad (83)$$

となる。ここに V_c は一次の微小量であるが、これが作る振りモーメントは二次の微小量となるので無視する。

したがって断面 z 上に生ずる振りモーメント M_c はつぎのように与えられることになる。

$$\begin{aligned} M_c &= M_c^{(1)} + M_c^{(2)} + M_c^{(3)} + M_c^{(4)} \\ &= M_x \frac{du}{dz} + M_y \frac{dv}{dz} + M_z + \int \left(V_x \frac{dv}{dz} - V_y \frac{du}{dz} \right) dz \\ &\quad + (\beta_y M_y - \beta_x M_x) \frac{d\varphi}{dz} \\ &\quad + \int \{w_x(dx-x_0) + w_y(dy-y_0)\} \varphi dz \quad (84) \end{aligned}$$

以上のように座屈変形後のある断面 z における断面力 M_ξ, M_η, M_c および V_ξ, V_η が求められたのであるから基礎方程式 (21) と結びつけば、平衡方程式が求まるわけであるが、初めの曲げに関する 2 式を z で 2 回微分して端部曲げモーメントの影響を消し、また振りに関する第 3 式を z で 1 回微分して積分記号を取り除くと、つぎのような方程式が得られる。

$$\begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} &= \frac{d^2}{dz^2} \left(-M_x \varphi + M_y - M_z \frac{dv}{dz} \right) \\ EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} &= -\frac{d^2}{dz^2} \left(M_x + M_y \varphi - M_z \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -M_x \frac{d^2 u}{dz^2} - M_y \frac{d^2 v}{dz^2} + m_z \\ &+ \{w_x(dx-x_0) + w_y(dy-y_0)\} \varphi \\ &+ \beta_x \frac{d}{dz} \left(M_x \frac{d\varphi}{dz} \right) - \beta_y \frac{d}{dz} \left(M_y \frac{d\varphi}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

ここに

$$m_z = w_y(dx-x_0) - w_x(dy-y_0)$$

つぎに図心軸に沿い分布した軸圧縮力 $p(z)$ を受ける薄肉開断面材の座屈平衡方程式を求めないのであるが、それにはつぎのように進めばよい。

すなわち任意の断面 z における軸力 $p(z)$ (圧縮を正とする) は微小座屈変形後、つぎのような剪断力 V_x, V_y を生ずる。

$$\left. \begin{aligned} V_x &= p \frac{du_0}{dz} = p \left(\frac{du}{dz} + y_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) \\ V_y &= p \frac{dv_0}{dz} = p \left(\frac{dv}{dz} - x_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

ここに (u_0, v_0) は (63) 式で与えた図心 O の変位を表わしている。したがって V_ξ, V_η, V_c は第 7 表を参考にして

$$\left. \begin{aligned} V_\xi &= V_x + V_y \varphi \sim p \left(\frac{du}{dz} + y_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) \\ V_\eta &= V_x \varphi + V_y \sim p \left(\frac{dv}{dz} - x_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) \\ V_c &= V_x \frac{du}{dz} + V_y \frac{dv}{dz} \sim 0 \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

となり基礎方程式 (23) 式とはつぎのように結びつく。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{du}{dz} + y_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) \right\} &= 0 \\ EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{dv}{dz} - x_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

また図心を通る軸圧縮力 $p(z)$ は座屈変形によって 10. に述べたのと同じ理由で、つぎのような付加振りモーメント $M_c^{(5)}$ および $M_c^{(6)}$ を生ずる。

$$M_c^{(5)} = p \left(y_0 \frac{du}{dz} - x_0 \frac{dv}{dz} \right) \quad (89)$$

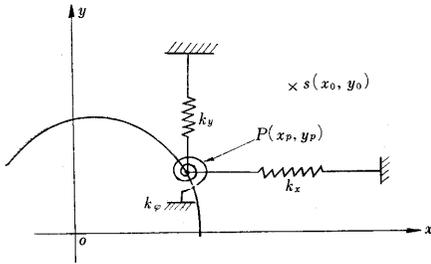
$$M_c^{(6)} = -\int \sigma \rho^2 \frac{d\varphi}{dz} dA = p r_s^2 \frac{d\varphi}{dz} \quad (90)$$

(89), (90) 式を基礎方程式 (23) の第 3 式と結びつけば、つぎの式が得られる。

$$EI_{xx} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(y_0 \frac{du}{dz} - x_0 \frac{dv}{dz} + r_s^2 \right) \right\} = 0 \quad (91)$$

最後に部材が連続的に分布したスプリングによって支持されている場合におけるスプリングの拘束力を求めよう。

第 35 図のように断面上の 1 点 $P(x_p, y_p)$ を通り、 z 軸に平行な線上に沿って梁が連続的に 3 種のスプリング k_x, k_y および k_φ によって支持されているとする。



第 35 図 連続的に分布したスプリングにより支持された薄肉開断面材

バネ常数の単位は

$$\left. \begin{matrix} k_x \\ k_y \end{matrix} \right\} = \text{kg/cm/cm}$$

$$k_\phi = \text{kg-cm/cm/rad}$$

で与えられているとする。前にも述べたように点 P の変位は

$$\left. \begin{matrix} u_p = u + \phi(y_0 - y_p) \\ v_p = v - \phi(x_0 - x_p) \end{matrix} \right\}$$

であるから単位長さ当りのスプリングの反力 q_x, q_y および m_z は、つぎのように与えられる。

$$\left. \begin{matrix} q_x = -k_x u_p = -k_x [u + \phi(y_0 - y_p)] \text{ kg/cm} \\ q_y = -k_y v_p = -k_y [v - \phi(x_0 - x_p)] \text{ kg/cm} \\ m_z = -k_\phi \phi + q_x (y_0 - y_p) - q_y (x_0 - x_p) \text{ kg-cm/cm} \end{matrix} \right\} \quad (92)$$

m_z は剪断中心 S のまわりの振りモーメントの反力を示している。さて以上において導いた梁の曲げ振りの平衡方程式 (85), (88), (91), および (92) 式を全部組み合わせれば、つぎのような最も一般的な梁柱の安定に関する釣合方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{du}{dz} + y_0 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} + k_x \{ u + (y_0 - y_p) \phi \} \\ = \frac{d^2}{dz^2} \left(-M_x \phi + M_y - M_z \frac{dv}{dz} \right) \\ EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{dv}{dz} - x_0 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} + k_y \{ v - (x_0 - x_p) \phi \} \\ = -\frac{d^2}{dz^2} \left(M_x + M_y \phi - M_z \frac{du}{dz} \right) \\ EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(y_0 \frac{du}{dz} - x_0 \frac{dv}{dz} + r_s^2 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} \\ + k_\phi \phi + k_x (y_0 - y_p) \{ u + (y_0 - y_p) \phi \} \\ - k_y (x_0 - x_p) \{ v - (x_0 - x_p) \phi \} \\ = -M_x \frac{d^2 u}{dz^2} - M_y \frac{d^2 v}{dz^2} + m_z + \{ w_x (x_0 - d_x) \\ + w_y (y_0 - d_y) \} \phi + \beta_x \frac{d}{dz} \left(M_x \frac{d\phi}{dz} \right) \\ - \beta_y \frac{d}{dz} \left(M_y \frac{d\phi}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

(93) 式を見れば判るように薄肉開断面材が外荷重を受けて変形を起こす場合一般に曲げと振りが連成する。

すなわち u, v, ϕ に関する連立常微分方程を解くことが必要であり、撓み u, v と振り ϕ とが互いに独立になるのは、ごく特別な場合に過ぎない。

いま分布したモーメントあるいは横荷重が存在しないとすれば (93) 式の右辺はすべて零になる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{du}{dz} + y_0 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} + k_x \{ u + (y_0 - y_p) \phi \} &= 0 \\ EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{dv}{dz} - x_0 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} + k_y \{ v - (x_0 - x_p) \phi \} &= 0 \\ EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left\{ p \left(y_0 \frac{du}{dz} - x_0 \frac{dv}{dz} + r_s^2 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} \\ + k_\phi \phi + k_x (y_0 - y_p) \{ u + (y_0 - y_p) \phi \} \\ - k_y (x_0 - x_p) \{ v - (x_0 - x_p) \phi \} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

(94) 式は弾性支持された梁が分布軸圧縮力 $p(z)$ を受ける場合の安定に関する微分方程式で、特に断面が二軸対称であるとすれば、剪断中心 S は図心 O に一致し、 $x_0 = y_0 = 0$ となる。さらにスプリングが図心 O に沿って取り付けられているとすれば $x_p = y_p = 0$ となるから (94) 式は互いに独立な三つの方程式になる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left(p \frac{du}{dz} \right) + k_x u &= 0 \\ EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left(p \frac{dv}{dz} \right) + k_y v &= 0 \\ EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(p r_0^2 \frac{d\phi}{dz} \right) + k_\phi \phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (95-a)$$

第 1 講 (22) 式より $dp/dz = -w_z$ であるから (95) 式は、つぎのようにも書ける。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + p \frac{d^2 u}{dz^2} - w_z \frac{du}{dz} + k_x u &= 0 \\ EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + p \frac{d^2 v}{dz^2} - w_z \frac{dv}{dz} + k_y v &= 0 \\ EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} + (p r_0^2 - GK) \frac{d^2 \phi}{dz^2} - w_z r_0^2 \frac{d\phi}{dz} + k_\phi \phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (95-b)$$

(95-a, b) 式の第 1 あるいは第 2 式は、柱の座屈理論においてよく知られた方程式である。また (94) 式において

$k_x = k_y = k_\phi = 0$ とし $p(z) = P$ すなわち $w_z = 0$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + P \left(\frac{d^2 u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right) &= 0 \\ EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} + P \left(\frac{d^2 v}{dz^2} - x_0 \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right) &= 0 \\ EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} + (P r_s^2 - GK) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + P \left(y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} - x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

となる。(96) 式は Timoshenko その他の人々によって導かれた両端において共心軸圧縮力 P を受ける柱の曲げ振り座屈の基礎方程式で、すでに 10. で導いた (74) 式において $e_x=e_y=0$ とし、初めの 2 式を z につき 2 回、第 3 式を 1 回微分したものに一致する。そしてさらに $x_0=y_0=0$ とすれば方程式は互いに独立となり (75) 式が得られることはすでに述べたとおりである。

12. 基礎方程式の一般解法

前節において導いた (93) 式の一般解を求めるため未知関数 $u(z)$, $v(z)$ および $\varphi(z)$ を第 2 講で述べたと同様につきのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z) \\ v(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n(z) \\ \varphi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z) \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

ここに a_n, b_n および c_n は未知係数である。

さて (93) 式の一般解を (II) で述べたような 10 種の境界条件に対して導くことは可能であるが自由端を有する部材は片持梁 (C/F) の場合を除いて、あまり工学上の重要性はないように思われる。したがって $F/F, S/F, P/F$ の三つの場合を除外した七つの場合について一般解を求めてみることにする (第 2 表参照)。

部材の両端の境界条件は固定端または単純支持端の場合は振動の場合と同じであるが、片持梁の場合、自由端 ($z=L$) の剪断力に関する条件式は、つぎのようにとらなければならない。

(a) 撓み (u, v) の場合 たとえば u について

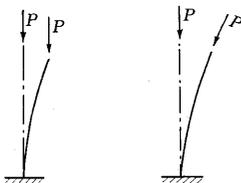
$$\frac{d^3u}{dz^3} = 0 \rightarrow EI_{xx} \frac{d^3u}{dz^3} + P \frac{du}{dz} = 0$$

(b) 振り φ に対し

$$EI_{\omega} \frac{d^3\varphi}{dz^3} - GK \frac{d\varphi}{dz} = 0 \rightarrow \quad (98)$$

$$EI_{\omega} \frac{d^3\varphi}{dz^3} + (Pr_s^2 - GK) \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

すなわち、部材の釣合を有限変形理論で考えているので (a) の場合、自由端というのが曲げモーメント零 ($\frac{d^2u}{dz^2} = 0$)、剪断力零 ($\frac{d^3u}{dz^3} = 0$) というのではないことである。



(i) 可能 (ii) 不可能
第 36 図 片持梁の曲げ座屈変形

座屈荷重を求める問題としては本来のものは第 36 図 (i) であって、剪断力零と考えたものは第 36 図 (ii) のように撓んだ軸線方向に荷重が作用するように撓みとともに荷重方向が変化する場合を取り扱っていることになり、このような変形では座屈変形は成立しないのである。振り φ 対しても曲げ座屈の場合の推論から (b) のような境界条件を課することが合理的であると考えられる。すなわち、自由端においては断面の反り (warping) が自由 ($d^2\varphi/dz^2=0$) で、 $-Pr^2(d\varphi/dz)$ の大きさの集中トルクが作用していることを意味している。このような境界条件を実現することは一般に困難であると思われるが、理論的にはすっきりしているからそれを採用することにする。さて後の計算の便宜上 (93) 式を 1 位および 2 位の Dirac のデルタ関数 $\delta^{(1)}(z-\xi)$, $\delta^{(2)}(z-\xi)$ を用いて、つぎのように変形する。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{d^4u}{dz^4} - \int_0^L p(\xi) \left(\frac{du}{d\xi} + y_0 \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \delta^{(1)}(z-\xi) d\xi \\ + k_x \{ u + (y_0 - y_p) \varphi \} \\ = \int_0^L \left(-M_x \varphi + M_y - M_x \frac{dv}{d\xi} \right) \delta^{(2)}(z-\xi) d\xi \\ EI_{yy} \frac{d^4v}{dz^4} - \int_0^L p(\xi) \left(\frac{dv}{d\xi} - x_0 \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \delta^{(1)}(z-\xi) d\xi \\ + k_y \{ v - (x_0 - x_p) \varphi \} \\ = - \int_0^L \left(M_x + M_y \varphi - M_x \frac{du}{d\xi} \right) \delta^{(2)}(z-\xi) d\xi \\ EI_{\omega} \frac{d^4\varphi}{dz^4} + \int_0^L GK \frac{d\varphi}{d\xi} \delta^{(1)}(z-\xi) d\xi \\ - \int_0^L p(\xi) \left(y_0 \frac{du}{d\xi} - x_0 \frac{dv}{d\xi} + r_s^2 \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \delta^{(1)}(z-\xi) d\xi \\ + k_x \varphi + k_x \{ u + (y_0 - y_p) \varphi \} (y_0 - y_p) \\ - k_y \{ v - (x_0 - x_p) \varphi \} (x_0 - x_p) \\ = -M_x \frac{d^2u}{dz^2} - M_y \frac{d^2v}{dz^2} \\ + m_z + \{ w_x(x_0 - d_x) + w_y(y_0 - d_y) \} \varphi \\ - \beta_x \int_0^L M_x(\xi) \frac{d\varphi}{d\xi} \delta^{(1)}(z-\xi) d\xi \\ + \beta_y \int_0^L M_y(\xi) \frac{d\varphi}{d\xi} \delta^{(1)}(z-\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

ここに第 p 位の Dirac のデルタ関数について成立するつぎの関係式を用いた。

$$\int f(\xi) \delta^{(p)}(\xi-z) d\xi = (-1)^p \frac{d^p f}{dz^p} \quad (100)$$

$$\delta^{(p)}(\xi-z) = (-1)^p \delta^{(p)}(z-\xi)$$

この式の変形の目的は両端における境界モーメントや剪断力等に対する修正項の必要性を除くためである (付録参照)。さて (97) 式を (99) 式に代入し、 $u_n(z), v_n(z)$, および $\varphi_n(z)$ を (99) 式の第 1, 第 2, 第 3 式の両辺に掛け合わせて、 z について 0 から積分すれば、つぎのような未知数 a_n, b_n および c_n に関する無限次元連立

一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & a_n(\lambda_n^4 + k_x) - \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_{mn} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{-y_0 B_{mn} + F_{mn} + k_x(y_0 - y_p) E_{mn}\} = \mathfrak{A}_n \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} a_m N_{mn} + b_n(\mu_n^4 + k_y) - \sum_{m=1}^{\infty} b_m H_{mn} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{x_0 K_{mn} - k_y(x_0 - x_p) L_{mn} + M_{mn}\} = -\mathfrak{B}_n \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} a_m \{-y_0 Q_{mn} + k_x(y_0 - y_p) E_{nm} + F_{nm}\} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \{x_0 T_{mn} - k_y(x_0 - x_p) L_{nm} + M_{nm}\} \\
 & + c_n \{\nu_n^4 + k_p + k_y(x_0 - x_p)^2 + k_x(y_0 - y_p)^2\} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{-r s^2 O_{mn} + GK A_{mn} - (x_0 - d_x) X_{mn} \\
 & - (y_0 - y_p) Y_{mn} + \beta_x Z_{mn} - \beta_y Z'_{mn}\} = \mathfrak{Q}_n \dots\dots\dots (101)
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 A_{mn} &= \int_0^L p(\xi) \frac{d u_m}{d \xi} \frac{d u_n}{d \xi} d \xi, \\
 B_{mn} &= \int_0^L p(\xi) \frac{d \varphi_m}{d \xi} \frac{d u_n}{d \xi} d \xi \\
 E_{mn} &= \int_0^L \varphi_m(\xi) u_n(\xi) d \xi, \\
 F_{mn} &= \int_0^L M_x(\xi) \varphi_m(\xi) \frac{d^2 u_n}{d \xi^2} d \xi \\
 G_{mn} &= \int_0^L M_z(\xi) \frac{d v_m}{d \xi} \frac{d^2 u_n}{d \xi^2} d \xi, \\
 H_{mn} &= \int_0^L p(\xi) \frac{d v_m}{d \xi} \frac{d v_n}{d \xi} d \xi \\
 K_{mn} &= \int_0^L p(\xi) \frac{d \varphi_m}{d \xi} \frac{d v_n}{d \xi} d \xi, \\
 L_{mn} &= \int_0^L \varphi_m(\xi) v_n(\xi) d \xi \\
 M_{mn} &= \int_0^L M_y(\xi) \varphi_m(\xi) \frac{d^2 v_n}{d \xi^2} d \xi, \\
 N_{mn} &= \int_0^L M_z(\xi) \frac{d u_m}{d \xi} \frac{d^2 v_n}{d \xi^2} d \xi \\
 O_{mn} &= \int_0^L p(\xi) \frac{d \varphi_m}{d \xi} \frac{d \varphi_n}{d \xi} d \xi \\
 Q_{mn} &= \int_0^L p(\xi) \frac{d u_m}{d \xi} \frac{d \varphi_n}{d \xi} d \xi \\
 T_{mn} &= \int_0^L p(\xi) \frac{d v_m}{d \xi} \frac{d \varphi_n}{d \xi} d \xi \\
 X_{mn} &= \int_0^L w_x(\xi) \varphi_m(\xi) \varphi_n(\xi) d \xi \\
 Y_{mn} &= \int_0^L w_y(\xi) \varphi_m(\xi) \varphi_n(\xi) d \xi, \\
 Z_{mn} &= \int_0^L M_x(\xi) \frac{d \varphi_m}{d \xi} \frac{d \varphi_n}{d \xi} d \xi \\
 Z'_{mn} &= \int_0^L M_y(\xi) \frac{d \varphi_m}{d \xi} \frac{d \varphi_n}{d \xi} d \xi, \\
 A_{mn} &= \int_0^L \frac{d \varphi_m}{d \xi} \frac{d \varphi_n}{d \xi} d \xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}_n &= \int_0^L M_y(\xi) \frac{d^2 u_n}{d \xi^2} d \xi \\
 \mathfrak{B}_n &= \int_0^L M_x(\xi) \frac{d^2 v_n}{d \xi^2} d \xi, \\
 \mathfrak{Q}_n &= \int_0^L m_z(\xi) \varphi_n(\xi) d \xi
 \end{aligned}$$

であり、(101) 式を導くに当たり、つぎのような関係式が用いられている。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L u_n(z) dz \int_0^L p(\xi) \frac{d u_m}{d \xi} \delta^{(1)}(\xi - z) d \xi \\
 &= - \int_0^L \int_0^L p(\xi) \frac{d u_m}{d \xi} u_n(z) \delta^{(1)}(z - \xi) d \xi dz \\
 &= \int_0^L p(\xi) \frac{d u_m}{d \xi} \frac{d u_n}{d \xi} d \xi \\
 & \int_0^L u_n(z) dz \int_0^L M_y(\xi) \delta^{(2)}(\xi - z) d \xi \\
 &= \int_0^L M_y(\xi) \frac{d^2 u_n}{d \xi^2} d \xi
 \end{aligned}$$

(101) 式はいかなる組合せ境界条件の場合にも適用できる一般式であるから当然いま問題にしている7種の境界条件に対する解もこれに含まれている。ところで上記7種の場合には常に $v_n(z) = \varphi_n(z)$ であり、したがって

$$K_{mn} = H_{mn}, L_{mn} = \delta_{mn}, O_{mn} = H_{mn} = T_{mn}$$

となり(101)式は若干簡単になる。またさらに相似境界の場合には $u_n(z) = v_n(z) = \varphi_n(z)$ であるから

$$\begin{aligned}
 B_{mn} &= H_{mn} = K_{mn} = O_{mn} = A_{mn} \\
 E_{mn} &= \delta_{mn}, N_{mn} = G_{mn}, T_{mn} = Q_{mn}
 \end{aligned}$$

となって非常に簡単化される。

したがって

(i) 非相似境界条件の場合

$$\begin{aligned}
 & a_n(\lambda_n^4 + k_x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_{mn} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{-y_0 B_{mn} + F_{mn} + k_x(y_0 - y_p) E_{mn}\} = \mathfrak{A}_n \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} a_m N_{mn} + b_n(\mu_n^4 + k_y) \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} b_m H_{mn} - k_y(x_0 - x_p) c_n \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (x_0 H_{mn} + M_{mn}) = -\mathfrak{B}_n \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} a_m \{-y_0 Q_{mn} + k_x(y_0 - y_p) E_{nm} + F_{nm}\} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (x_0 H_{mn} + M_{nm}) - k_y(x_0 - x_p) b_n \\
 & + c_n \{\nu_n^4 + k_p + k_y(x_0 - x_p)^2 + k_x(y_0 - y_p)^2\} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{-r s^2 H_{mn} + GK A_{mn} - (x_0 - d_x) X_{mn} \\
 & - (y_0 - d_y) Y_{mn} + \beta_x Z_{mn} - \beta_y Z'_{mn}\} = \mathfrak{Q}_n \dots\dots\dots (102)
 \end{aligned}$$

(ii) 相似境界条件の場合

$$a_n(\lambda_n^4 + k_x) - \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{mn}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_{mn} + k_x (y_0 - y_p) c_n \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (-y_0 A_{mn} + F_{mn}) = \mathfrak{A}_n \\
 - & \sum_{m=1}^{\infty} a_m G_{mn} + b_n (\mu_n^4 + k_y) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} b_m A_{mn} - k_y (x_0 - x_p) c_n \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_n (x_0 A_{mn} + M_{mn}) = \mathfrak{B}_n \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} a_m (y_0 A_{mn} + F_{nm}) + k_x (y_0 - y_p) a_n \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (x_0 A_{mn} + M_{nm}) - k_y (x_0 - x_p) b_n \\
 & + c_n \{ \nu_n^4 + k_p + k_y (x_0 - x_p)^2 + k_x (y_0 - y_p)^2 \} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \{ -r_s^2 A_{mn} + GK A_{mn} - (x_0 - d_x) X_{mn} \\
 & - (y_0 - d_y) Y_{mn} + \beta_x Z_{mn} - \beta_y Z'_{mn} \} = \mathfrak{C}_n \dots \dots \dots (103)
 \end{aligned}$$

(102) 式あるいは (103) 式より未知係数 a_n, b_n および c_n は形式的に次式のように決定される。

$$a_n = \frac{D_{1n}}{D}, \quad b_n = \frac{D_{2n}}{D}, \quad c_n = \frac{D_{3n}}{D} \quad (104)$$

ここに D は (102) 式あるいは (103) 式の左辺から*

(iii) 非相似境界条件の場合

$$\begin{vmatrix}
 \lambda_1^4 + k_x - A_{11} & G_{11} & -y_0 B_{11} + F_{11} + k_x (y_0 - y_p) E - \\
 -N_{11} & \mu_1^4 + k_y - H_{11} & x_0 H_{11} + M_{11} - k_y (x_0 - x_p) \\
 -y_0 Q_{11} + k_x (y_0 - y_p) E_{11} & x_0 H_{11} + M_{11} & \nu_1^4 + k_p + k_y (x_0 - x_p)^2 \\
 +F_{11} & -k_y (x_0 - x_p) & +k_x (y_0 - y_p)^2 - r_s^2 H_{11} \\
 & & +GK A_{11} - (x_0 - d_x) X_{11} \\
 & & - (y_0 - d_y) Y_{11} + \beta_x Z_{11} - \beta_y Z'_{11}
 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (106)$$

(iv) 相似境界条件の場合

$$\begin{vmatrix}
 \lambda_1^4 + k_x - A_{11} & G_{11} & -y_0 A_{11} + F_{11} + k_x (y_0 - y_p) \\
 -G_{11} & \mu_1^4 + k_y - A_{11} & x_0 A_{11} + M_{11} - k_y (x_0 - x_p) \\
 -y_0 A_{11} + F_{11} & x_0 A_{11} + M_{11} & \nu_1^4 + k_p + k_y (x_0 - x_p)^2 \\
 +k_x (y_0 - y_p) & -k_y (x_0 - x_p) & +k_x (y_0 - y_p)^2 - r_s^2 A_{11} \\
 & & +GK A_{11} - (x_0 - d_x) X_{11} \\
 & & - (y_0 - d_y) Y_{11} + \beta_x Z_{11} - \beta_y Z'_{11}
 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (107)$$

付 録

以上に導いた (106) 式あるいは (107) 式を用いて工學上重要と思われる薄肉開断面材の座屈荷重の第 1 近似解がすべて容易に求めることができる。

13. む す び

以上において薄肉開断面材に起こる弾性不安定現象の本質とその座屈変形様式について簡単に解説し、ついで両端において一軸圧縮力を受ける柱の安定平衡方程式を導き、それをさらに一般化して任意の外荷重を受ける薄肉開断面材が微小座屈変形を起こす場合の基礎方程式を求め、その一般的解法を示した。次号以下において工學上重要と思われる薄肉開断面材のいろいろな安定問題について逐次説明する予定である。(1964年2月14日受理)

* a_n, b_n, c_n を消去して得られる無限次元の行列式で、 D_{1n} は D において a_n の係数に相当する項を左辺の項で置き換えて得られる行列式である。 D_{2n}, D_{3n} も同じようにして得られる行列式を表わしている。このようにして求められた未知係数の解 (104) 式を (97) 式に代入すれば撓み $u(z), v(z)$ および換り $\varphi(z)$ が正規固有函数の級数として完全に決定されることになるが、実際の計算においては未知係数 a_n, b_n および c_n を初めの数項に限り、近似的に解くことになる。

このようにして任意の外荷重を受ける薄肉開断面材の曲げ換り座屈変形が一般的に決定されるわけで、その安定条件、すなわち座屈荷重の特有方程式は次式で与えられる。

$$D = 0 \quad (105)$$

(105) 式は単一薄肉開断面材の安定を支配する最も一般的な特有方程式であって、これまで多くの人々によって求められた結果はすべて (105) 式の中に含まれている。そこでまず (105) 式の第 1 近似解を求めてみよう。それには a_1, b_1, c_1 の 3 項のみをとって行列式を作ればよい。(座屈の場合は振動の場合と異なり基本固有値が問題になることに注意) すなわち

薄肉開断面梁の振動あるいは安定の方式式を梁の撓み振動の固有函数系 $u_n(z), v_n(z)$ および $\varphi_n(z)$ を用いて解く場合、自由端の境界条件のうち剪断力に関する条件式が満足されないのので微分方程式に見掛けの集中モーメントの項を入れて修正する必要がある。片持梁を例にとつていうならば

(i) 純換り自由振動の場合

$$EI_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \lambda^2 r_0 \varphi + GK \frac{d\varphi}{dz} \delta(z-L) = 0$$

(ii) 曲げ座屈の場合

$$EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} - P \frac{du}{dz} \delta(z-L) = 0$$

(a)

これらの方程式は1位の Dirac のデルタ函数 $\delta^{(1)}(\xi)$ を用いると、なんらの修正を必要とすることなく、つぎのように解くことができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & EI \omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + \int_0^L GK \frac{d\varphi}{d\xi} \delta^{(1)}(\xi-z) d\xi - \lambda^2 r_0 \varphi = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \frac{d^4 u}{dz^4} - \int_0^L P \frac{du}{d\xi} \delta^{(1)}(\xi-z) d\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(b)}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z) \\ u(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z) \end{aligned} \right\} \text{(c)}$$

とおいてあるから (b) 式の両辺にそれぞれ $\varphi_n(z)$ および $u_n(z)$ を掛けて z について0から L まで積分すれば

$$\left. \begin{aligned} c_n \nu_n^4 + \int_0^L \int_0^L GK \frac{d\varphi}{d\xi} \varphi_n(z) \delta^{(1)}(\xi-z) d\xi dz - \lambda^2 r_0^2 c_n = 0 \\ a_n \lambda_n^4 - \int_0^L \int_0^L P \frac{du}{d\xi} u_n(z) \delta^{(1)}(\xi-z) d\xi dz = 0 \end{aligned} \right\}$$

が得られ、最終的につぎのような結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} c_u (\nu_n^4 - \lambda^2 r_0^2) + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn} = 0 \\ \lambda_n^4 a_n - P \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{mn} = 0 \end{aligned} \right\} \text{(d)}$$

ここに

$$A_{mn} = \int_0^L \frac{d\varphi_m}{d\xi} \frac{d\varphi_n}{d\xi} d\xi = \int_0^L \frac{du_m}{d\xi} \frac{du_n}{d\xi} d\xi$$

(d) 式の第1式は前号 (34) 式の第3式に一致している。また梁の曲げの問題では、不静定梁の場合でも

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = q_x \text{ (e)}$$

を解く代わりにモーメントを曲率に関する関係式：

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} = M_y \text{ (f)}$$

を用い、 M_y として外荷重の静定モーメントだけをとって解けることを示そう。

(e) 式は2位の Dirac のデルタ函数 $\delta^{(2)}(\xi-z)$ を用いて、つぎのように書くことができる。

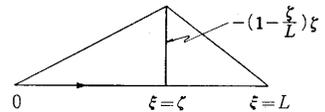
$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} = \frac{d^2 M_y}{dz^2} = \int_0^L M_y(\xi) \delta^{(2)}(\xi-z) d\xi \text{ (g)}$$

(c) の第2式を用い、(g) 式の両辺に $u_n(z)$ を掛けて z について0から L まで積分すれば

$$\begin{aligned} \lambda_n^4 a_n &= \int_0^L \int_0^L M_y(\xi) u_n(z) \delta^{(2)}(\xi-z) d\xi dz \\ &= \int_0^L M_y(\xi) \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} d\xi \\ \therefore a_n &= \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^L M_y(\xi) \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} d\xi \end{aligned} \text{ (h)}$$

いま1例として両端固定梁の撓みの影響函数 $G(z, \zeta)$ を求めてみよう。この場合静定曲げモーメント M_y は次式のように与えられる。

$$M_y = \begin{cases} -1 \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{L}\right) \xi & (0 \leq \xi \leq \zeta) \\ -1 \cdot \left(\frac{\zeta}{L}\right) (L - \xi) & (\zeta \leq \xi \leq L) \end{cases} \text{ (i)}$$



第37図 集中荷一重を受ける両端固定梁の静定曲げモーメント

(i) 式を (h) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\lambda_n^4} \left[- \int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{L}\right) \xi \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_{\zeta}^L \left(\frac{\zeta}{L}\right) (L - \xi) \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} d\xi \right] = \frac{u_n(\zeta)}{\lambda_n^4} \end{aligned}$$

となるから

$$G(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z) u_n(\zeta)}{\lambda_n^4} \text{ (j)}$$

一方 (e) 式から出発して $G(z, \zeta)$ を求めるには (c) の第2式を (e) 式に代入し両辺に $u_n(z)$ を掛けて z について0から L まで積分し、 a_n がつぎのように容易に定められる。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^L q_x u_n(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^L \delta(\xi - \zeta) u_n(\xi) d\xi \\ &= \frac{u_n(\zeta)}{\lambda_n^4} \end{aligned}$$

したがって (j) 式と同じ結果が得られることがわかる。同じようなことが固定一支持、両端支持、片持梁の場合も成立することは容易に確かめられる。このようにして不静定梁の曲げの問題も梁の固有函数系を使用すれば、2階の曲げモーメントに対する微分方程式を用い外荷重の静定モーメントだけをとって解けることがわかる。

