

薄肉開断面材の弾性力学〔Ⅱ〕

川井 忠彦

前号において、薄肉開断面材の曲げや振りの静的問題を取り扱う場合、断面のゆがみ(warping)によって生ずる剪断応力のために、剪断中心 (shear center) および曲げ振り剛性 (warping torsional rigidity) の概念を導入する必要性のあることを、チャンネル材や I 形梁の曲げと振りを例にとって説明し、その曲げや振りを支配する基礎方程式を導出した。本号では、かかる薄肉開断面材が動的外力を受けて振動する場合の運動方程式とその解法、ならびに二三の工学的応用問題について述べることにする。

5. 薄肉開断面梁の振動

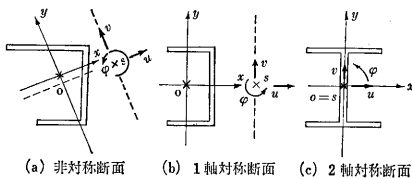
梁の振動解析は、あらゆる構造物の振動を論ずる場合の基礎であり、特に航空機・船舶・車両など動的問題が重要になる構造物においては、一つの大きな研究分野を構成していることは、周知のとおりである。

空力弾性学 (Aeroelasticity) において重要な研究課題であるロケット機体や翼のフラッタ解析も、もとをたせば 1 本の梁の振動解析が、その基礎となっている。

プロペラの振動、ヘリコプタ翼や、タービンブレードなどの振動も、梁の振動として詳細な研究が行なわれている。ところが従来行なわれてきた梁の振動に関する研究の大部分は、純曲げあるいは純振り振動にのみ終始し、曲げ振り連成振動については、ほとんど組織的な研究が行なわれていないのが現状である。

そこでまず 1 本の一様非対称断面梁が動的外力を受けると、どのような振動を起こすか、最も一般的な立場から考えてみよう。

非対称断面の梁が振動を起こすと、一般に曲げと振りの連成した振動になる。この曲げ振り連成振動は断面の図心と剪断中心とが一致しない場合には、常に起こるものであって最も一般的な場合には、二つの互いに垂直な曲げ振動が振り振動と連成して“三重連成振動” (triple coupling vibration) を起こす。



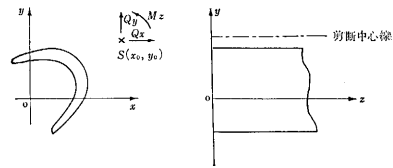
第 10 図 薄肉開断面梁の振動

第 10 図 (a) の場合がこの場合であり、もし梁の断面が一つの対称軸を有する場合には、曲げ振動の一つが他の振動から独立したものとなる。

これが (b) の場合で、他の一つの曲げ振動が振り振動と連成して“二重連成振動” (double coupling vibration) を生ずる。

これに対して、(c) の場合には二つの曲げ振動と振り振動が、互いに独立して起こるものである。

6. 梁の運動方程式とその解法



第 11 図 薄肉開断面梁の振動解析に使用する座標系および記号

第 11 図に示すような任意断面の梁を考える。ここで x, y 軸は断面の図心を通る慣性主軸にとり、 z 軸はこれらと右手系をなすようにとる。剪断中心 S の撓みを $u(z, t), v(z, t)$ とし、そのまわりの回転を $\varphi(z, t)$ とすると、その運動方程式は梁の静的平衡方程式 (前号 3 の (23) 式) の右辺の外力の項を慣性力を含めた動的外力 $Q_x(z, t), Q_y(z, t)$ および $M_z(z, t)$ におきかえて、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} &= Q_x(z, t), & EI_{yy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} &= Q_y(z, t) \\ EI_{\omega} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= M_z(z, t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

記号は、すべて前号に説明したとおりである。

さて任意の時刻 t における重心 O の変位をおのおの U, V とすれば、第 12 図からわかるように変位は平行移動 (u, v) と S のまわりの回転 φ による変位とからなり、ベクトルの考えて容易につぎの式が得られる。

$$U = u - x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi + x_0 \sim u + y_0 \varphi$$

$$V = v - y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi + y_0 \sim v - x_0 \varphi$$

すなわち、ベクトルの複素数表示を用いて

$$\begin{aligned} \vec{OO}'' &= U + iV \\ &= \vec{OO}' + \vec{O'O}'' \end{aligned}$$

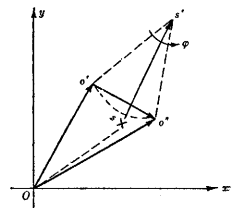
しかるに

$$\vec{OO}' = \vec{SS}' = u + iv$$

$$\vec{O'O}'' = \vec{O'S}' + \vec{S'O}''$$

$$= \vec{O'S}' + \vec{S'O}' \cdot e^{i\varphi}$$

$$= \vec{OS}' (1 - e^{i\varphi})$$



第 12 図 重心 O の変位のベクトル演算

$$= (x_0 + iy_0) \{ (1 - \cos \varphi) - i \sin \varphi \}$$

$$= \{ x_0(1 - \cos \varphi) + y_0 \sin \varphi \} + i \{ y_0(1 - \cos \varphi) - x_0 \sin \varphi \}$$

$$\sim \varphi (y_0 - ix_0)$$

したがって

$$\overrightarrow{OO''} = (u + iv) + (y_0 \varphi - ix_0 \varphi)$$

$$\therefore U = u + y_0 \varphi, V = v - x_0 \varphi$$

したがって、梁が振動する時、 x および y 軸方向の変位によって生ずる慣性力の x, y 成分はそれぞれ

$$-mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u + y_0 \varphi) \quad -mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - x_0 \varphi)$$

となる。ここに

m : 梁の質量分布, A : 梁の断面積, t : 時間である。また、変位によって生ずる慣性力は、図心 O を通って働いているから、剪断中心 S のまわりに働く全慣性トルクは、つぎのようになる。

$$-mI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u + y_0 \varphi) y_0 + mA \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - x_0 \varphi) x_0$$

(I_0 は図心 O のまわりの断面の極慣性性能率を表わす)。

動的外力の成分をおのおの $q_x(z, t), q_y(z, t), m_z(z, t)$ とし、これらの成分と上に導いた慣性力の成分の和を (25) 式の右辺に代入整理すれば、つぎのような運動方程式が得られる⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mA y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= q_x(z, t) \\ EI_{yy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= q_y(z, t) \\ EI_{\omega\omega} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + mA y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\quad - mA x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mI_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m_z(z, t) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここに I_s は、剪断中心 S のまわりの極慣性性能率を表わし

$$I_s = I_0 + A(x_0^2 + y_0^2)$$

の関係がある。

方程式 (26) 式からわかるように、一般に非対称断面の薄肉開断面梁が振動すると、曲げと捩りの連成した振動になり、その連成の状態は、5. で説明したように断面の非対称性に依存していることがわかる。梁の両端における境界条件としては、撓み (u, v) に対しては、(24) 式、捩り φ に対しては (11) 式で与えられるような固定、支持ないしは、自由の 3 種の条件を考え、その組合せによって得られる境界条件としてつぎの 10 種類の場合を選定する。

工学上重要な場合は、だいたいその 10 種類のいずれかに属すると考えられる (第 2 表参照)。

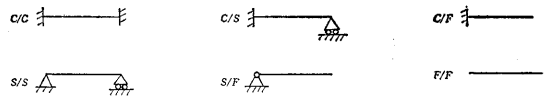
材料力学では、いわゆる回転端 (pin-end) を単純支持端 (simply supported end) と同様に扱っているが、正確にはこの表のように区別しなければならない。

さて (26) 式を解くために変位をつぎのように仮定す

第 2 表 工学上重要と思われる梁の境界条件

B.C.	変位	u	v	φ
相似境界	C/C	C/C	C/C	C/C
	C/S	C/S	C/S	C/S
	C/F	C/F	C/F	C/F
	S/S	S/S	S/S	S/S
	S/F	S/F	S/F	S/F
	F/F	F/F	F/F	F/F
非相似境界	C/P	C/S	C/C	C/C
	P/P	S/S	C/C	C/C
	P/S	S/S	C/S	C/S
	P/F	S/F	C/F	C/F

この表に用いた記号は、つぎの境界条件に対応している。



る。

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(x) \\ v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) v_n(x) \\ \varphi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここに $a_n(t), b_n(t), c_n(t)$ は、梁の変形の時間的変化を決定する未知関数で、 $u_n(x), v_n(x), \varphi_n(x)$ は、与えられた境界条件を満足する梁の曲げ振動に対する正規固有関数を表わす。定義によりこれらの関数系は、それぞれつぎの微分方程式を満足している。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 u_n}{dz^4} &= \left(\frac{\alpha_n}{L} \right)^4 u_n(x) & \frac{d^4 v_n}{dz^4} &= \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^4 v_n(x) \\ \frac{d^4 \varphi_n}{dz^4} &= \left(\frac{\gamma_n}{L} \right)^4 \varphi_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

梁の曲げ振動に関する固有関数系 $u_n(x), v_n(x), \varphi_n(x)$ はすでに多くの人々により詳細に研究されていて数値表もいくつかできている^{9), 10)}。

つぎの第 3 表は、いろいろな境界条件に対する $u_n(x)$ を表にしたものである。

さて (27) 式のように梁の振動モードを仮定すると、捩り φ に対する自由端の境界条件の一つであるつぎの式

$$EI_{\omega\omega} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} - GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

は (27) 式のような展開では満足されない。したがって自由端を含む場合には、見かけの集中トルク

$GK \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ を $z=0, z=L$ に加えてとく必要がある。さらに外力の成分 q_x, q_y および m_z をおのおの $u_n(x), v_n(x)$ および $\varphi_n(x)$ によって、つぎのように展開されると仮定しよう。

第3表 梁の正規固有関数系

境界条件	正規固有関数 $u_n(z)$	固有値 $\alpha_n(n)$
	$\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \alpha_n \frac{z}{L} - \cos \alpha_n \frac{z}{L} \right) - \delta_n \left(\sinh \alpha_n \frac{z}{L} - \sin \alpha_n \frac{z}{L} \right) \right\}$ $\delta_n = (\cosh \alpha_n - \cos \alpha_n) / (\sinh \alpha_n - \sin \alpha_n)$	$\cosh \alpha_n \cos \alpha_n - 1 = 0$ 4.73004 (1) 7.85320 (2) 10.99561 (3) 14.13717 (4) 17.27876 (5)
	$\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \alpha_n \frac{z}{L} - \cos \alpha_n \frac{z}{L} \right) - \delta_n \left(\sinh \alpha_n \frac{z}{L} - \sin \alpha_n \frac{z}{L} \right) \right\}$ $\delta_n = (\cosh \alpha_n - \cos \alpha_n) / (\sinh \alpha_n - \sin \alpha_n)$	$\tanh \alpha_n - \tan \alpha_n = 0$ 3.96299 (1) 7.06858 (2) 10.21018 (3) 13.35177 (4) 16.49336 (5)
	$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \alpha_n \frac{z}{L}$	$\sin \alpha_n = 0 \quad \alpha_n = n\pi$ 3.14159 (1) 6.28319 (2) 9.42478 (3) 12.56637 (4) 15.70795 (5)
	$\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \alpha_n \frac{z}{L} - \cosh \alpha_n \frac{z}{L} \right) - \delta_n \left(\sinh \alpha_n \frac{z}{L} - \sin \alpha_n \frac{z}{L} \right) \right\}$ $\delta_n = (\cosh \alpha_n - \cos \alpha_n) / (\sinh \alpha_n - \sin \alpha_n)$	$\cosh \alpha_n \cos \alpha_n + 1 = 0$ 1.87510 (1) 4.69409 (2) 7.85476 (3) 10.99554 (4) 14.13717 (5)
	$\sqrt{\frac{3}{L}} \frac{z}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2}{(1-\delta_n^2)}} \left(\delta_n \sinh \alpha_n \frac{z}{L} + \sin \alpha_n \frac{z}{L} \right)$ $\delta_n = \sin \alpha_n / \sinh \alpha_n$	$\tanh \alpha_n - \tan \alpha_n = 0$ 0 (1) 3.92699 (2) 7.06858 (3) 10.21018 (4) 13.35177 (5)
	$\frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{3}{L}} \left(1 - \frac{2z}{L} \right), \delta_n = (\cosh \alpha_n - \cos \alpha_n) / (\sinh \alpha_n - \sin \alpha_n)$ $\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \left(\cosh \alpha_n \frac{z}{L} + \cos \alpha_n \frac{z}{L} \right) - \delta_n \left(\sinh \alpha_n \frac{z}{L} + \sin \alpha_n \frac{z}{L} \right) \right\}$	$\cosh \alpha_n \cos \alpha_n - 1 = 0$ 0 (1) 0 (2) 4.73004 (3) 7.85320 (4) 10.99560 (5)

S: 単純支持端 C: 固定端 F: 自由端

$$\left. \begin{aligned} q_x(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t) u_n(z) \\ q_y(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(z) \\ m_z(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \varphi_n(z) \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \nu_n^4 c_n(t) + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \Lambda_{mn} = G_n(t) \\ &(m, n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\}$$

ここに

$$\lambda_n^4 = \frac{\alpha_n^4 EI_{xx}}{L^4}, \quad \mu_n^4 = \frac{\beta_n^4 EI_{yy}}{L^4}, \quad \nu_n^4 = \frac{\gamma_n^4 EI_{\omega}}{L^4}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} E_n(t) &= \int_0^L q_x(\xi, t) u_n(\xi) d\xi \\ F_n(t) &= \int_0^L q_y(\xi, t) v_n(\xi) d\xi \\ G_n(t) &= \int_0^L m_z(\xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$

$$\Gamma_{mn} = \int_0^L \varphi_m(z) u_n(z) dz, \quad \Pi_{mn} = \int_0^L \varphi_m(z) v_n(z) dz,$$

$$\Lambda_{mn} = \int_0^L \frac{d\varphi_m}{dz} \frac{d\varphi_n}{dz} dz$$

方程式 (30) は、特に両端単純支持の場合に限り、

$$u_n(z) = v_n(z) = \varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi z}{L} \text{ で}$$

$$\Gamma_{mn} = \Pi_{mn} = \delta_{mn}, \quad \Lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right) \delta_{mn}$$

となり、(30)式はつぎのように非常に簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} mA\ddot{a}_n(t) + \lambda_n^4 a_n(t) + mA\gamma_0 \dot{c}_n(t) &= E_n(t) \\ MA\ddot{b}_n(t) + \mu_n^4 b_n(t) - MAx_0 \dot{c}_n(t) &= F_n(t) \\ MA\gamma_0 \dot{a}_n(t) - MAx_0 \dot{c}_n(t) + mI_s \ddot{c}_n(t) \\ &+ \left(\nu_n^4 + GK \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) c_n(t) = G_n(t) \end{aligned} \right\} (31)$$

この場合には厳密解を求めることが、可能である。

このようにして、薄肉開断面梁の振動衝撃などの問題の解析は、(30)式で与えられる連立常微分方程式を与えられた初期条件の下で解く問題に帰着する。次節で以上に述べた振動理論を応用して解析した工学上の具体例につき、簡単に述べることにする。

(27)式および (29) 式を、(26)式に代入し正規固有関数系の直交性：

$$\int_0^L u_m(z) u_n(z) dz = \delta_{mn}^*$$

を用いると、つぎのような未知関数 $a_n(t)$, $b_n(t)$ および $c_n(t)$ に関する無限次元連立常微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} mA\ddot{a}_n(t) + \lambda_n^4 a_n(t) + mA\gamma_0 \sum_{m=1}^{\infty} \dot{c}_m(t) \Gamma_{mn} &= E_n(t) \\ MA\ddot{b}_n(t) + \mu_n^4 b_n(t) - MAx_0 \sum_{m=1}^{\infty} \dot{c}_m(t) \Pi_{mn} &= F_n(t) \\ MA\gamma_0 \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_m(t) \Gamma_{nm} - MAx_0 \sum_{m=1}^{\infty} \dot{b}_m(t) \Pi_{nm} + mI_s \ddot{c}_n(t) &= G_n(t) \end{aligned} \right\} (30)$$

* δ_{mn} は Kronecker のデルタを表す。

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

7. 振動解析の実例

(1) 薄肉開断面梁の自由振動

まず手初めに 1 本の梁の自由振動を、一般的な立場から考えてみよう。この場合は、運動方程式 (26) において右辺の外力の項 $q_x(z, t)$, $q_y(z, t)$, $m_z(z, t)$ をすべて 0 とおき、また、振動の周期性からしてよくやるように

$$\left. \begin{aligned} a_n(t) &= a_n e^{i\beta t} \\ b_n(t) &= b_n e^{i\beta t} \\ c_n(t) &= c_n e^{i\beta t} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(a_n, b_n, c_n はある常数)

とおく。

この (32) 式を (30) 式に代入すると、つぎのような未知係数 a_n, b_n および c_n に関する齊次の無限次元連立一次方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_n(\lambda_n^4 - \lambda^2) - y_0 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \Gamma_{nm} &= 0 \\ b_n(\mu_n^4 - \lambda^2) + x_0 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \Pi_{nm} &= 0 \\ y_0 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Gamma_{nm} + x_0 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \Pi_{nm} + (\nu_n^4 - \lambda^2 r_s^2) c_n \\ + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{nm} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに

$$\lambda^2 = m A \beta^2 \quad r_s^2 = \frac{I_s}{A} \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots) \quad (33)$$

これらの式から a_n, b_n, c_n を消去すれば、固有振動数 λ^2 を決定するための特有方程式が得られ、 λ^2 が求められれば、その値を (33) 式に代入して各係数間の比率が決定され、したがって振動のモードがわかることは、梁の曲げ振動の場合とまったく同様である。

特に断面の図心と剪断中心が一致した場合は、 $x_0 = y_0 = 0$, $r_s = r_o$ となり、(33) 式はつぎの三つの方程式に分かれる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n^4 - \lambda^2 = 0 \quad \mu_n^4 - \lambda^2 = 0 \\ (\nu_n^4 - \lambda^2 r_o^2) c_n + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{nm} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

はじめの二つの式は、おのおの梁の y 軸および x 軸まわりの曲げの固有振動数を決定する厳密な式である。

第 3 式は、梁の振り振動数を求める式を表わしておりその第一近似式は c_n の項のみを取って

$$\lambda^2 = \frac{1}{r_o^2} (\nu_n^4 + GK A_{nn}) \quad (35)$$

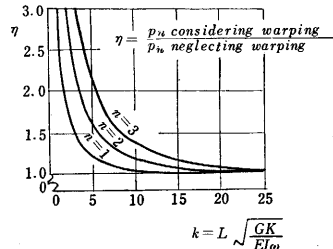
となる。単純支持の場合には、前にも述べたように (35) 式が厳密解となり St. Venant の振り剛性 GK と、曲げ振り剛性 EI_o の比を $k^2 = \frac{GKL^2}{EI_o}$ とおくと

$$(p_n)_s = \frac{n\pi}{L^2} \sqrt{\frac{GK}{mI_o}} \left(\frac{n^2\pi^2}{k^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

となる。ここに $(p_n)_s$ は、第 n 次の振り振動数を表わしている。

単純支持以外の場合には、(35) 式は第一近似式である

から、精度のよい値を求めるには、 c_n の項数をふやして、次数の高い振動方程式を作り根を求めなければならない。単純支持梁の場合を例にとり、断面のそり (warping) が梁の振り振動数に及ぼす影響を初めの三つのモードについて調べてみると、右の第 (13) 図のようになる¹¹⁾。



第 13 図 断面のそり (warping) が梁の純振り振動数に及ぼす影響—単純支持梁

縦軸 η は、そりを考慮に入れた場合と入れない場合の振動数の比、すなわち

$$\eta = \frac{p_n \text{ considering warping}}{p_n \text{ neglecting warping}} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{k^2} + 1}$$

を表わし、横軸はさきほど定義した k を表わしている。

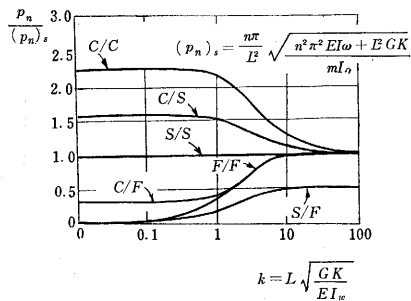
一般にそりは梁の回転に対する剛性を増大させるから振動数を高める効果を表わす。特に k が小さい場合には、 EI_o が GK に比して大きく、その影響が無視できないことを物語っている。

これに対し、 k が大きくなるとその影響は小さくなり、多くの場合これを無視することができる。

たとえば、長さ 20 フィートのアメリカの標準広幅型鋼 12WF45 では、隅肉 (fillet) の影響を無視して計算された k の値は、約 4.0 である。

第 13 図によると、第一次振動の場合でもそりの影響は、それを無視した振動数より約 27% 高めであることがわかる。

右の第 14 図は、各種境界条件における振り第一次振動数と k との関係を示すグラフである。



第 14 図 $p_n / (p_n)_s$ の値 ($n=1$)

縦軸は単純支持梁の場合を基準にとり、これとの比で表わされた振動数を表わしている。

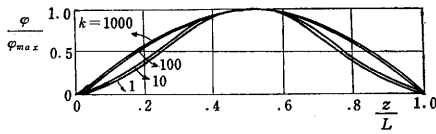
第 15 図は、二三の境界条件における第一次振り振動

のモードを k をパラメータにして画いたものである。

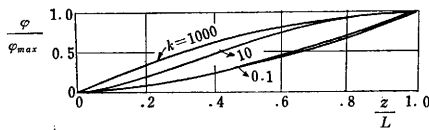
(a) は両端固定 (C/C) の場合で k が小さいとモードの形は cosine 曲線に近く、 k が大きくなると単純支持の場合と同じような sine 曲線に近づくことがわかる。

(b) は片持梁 (C/F) の場合で k が大きくなると sine 波の半分 (St. Venant の振り振動の厳密解) に近づくことを示している。

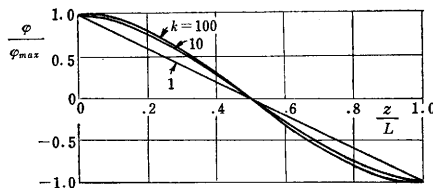
この場合 k が 0.1 以下あるいは、1000 以上であってもモードはおおの $k=0.1$ あるいは 1000 の曲線とほとんど一致する。(c) は両端自由 (F/F) の場合の振動モードで k が小さいときは直線で、 k が大きくなると cosine 曲線に近づくことを示している。



(a) 両端固定 (C/C)



(b) 固定自由 (C/F)



(c) 両端自由 (F/F)

第 15 図 二三の純振り振動モード ($n=1$)

さて初めの三重連成振動の場合に戻って議論を進めることにしよう。(33)式において a_n , b_n および c_n のみをとって振動方程式の第一近似を求めてみると、つぎのようになる。

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 - \lambda^2 & 0 & -y_0 \lambda^2 \Gamma_{nn} \\ 0 & \mu_n^4 - \lambda^2 & x_0 \lambda^2 \Pi_{nn} \\ -y_0 \lambda^2 \Gamma_{nn} & x_0 \lambda^2 \Pi_{nn} & \nu_n^4 + GK \Lambda_{nn} - \lambda^2 r_s^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (37)$$

梁の両端における境界条件として、第 2 表で与えられるような場合のみを考えると、常に $v_n(z) = \varphi_n(z)$ であり、したがって

$$\Pi_{nn} = \int_0^L (v_n(z))^2 dz = 1$$

である。

さらに相似境界の場合には、 $u_n(z) = v_n(z)$ となり

$$\Gamma_{nn} = 1$$

となるから、けっきょく (37) 式は相似境界の場合には

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 - \lambda^2 & 0 & -y_0 \lambda^2 \\ 0 & \mu_n^4 - \lambda^2 & x_0 \lambda^2 \\ -y_0 \lambda^2 & x_0 \lambda^2 & \nu_n^4 + GK \Lambda_{nn} - \lambda^2 r_s^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (38)$$

となる。また非相似境界の場合には

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 - \lambda^2 & 0 & -y_0 \lambda^2 \Gamma_{nn} \\ 0 & \mu_n^4 - \lambda^2 & x_0 \lambda^2 \\ -y_0 \lambda^2 \Gamma_{nn} & x_0 \lambda^2 & \nu_n^4 + GK \Lambda_{nn} - \lambda^2 r_s^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

となり、 Γ_{nn} , Λ_{nn} はつぎの第 4 表に示すような値を代入すればよい。¹³⁾

$$\Gamma_{nn} = \int_0^L u_n(z) \varphi_n(z) dz \text{ の値}$$

n	1	2	3
C/P	0.998118	0.938406	0.912738
P/P	0.986239	0.972070	0.958049
P/S	0.976087	0.944909	0.950633
P/F	0.985235	-0.959942	0.939348

$$L^2 \Lambda_{nn} = L^2 \int_0^L \left(\frac{d\varphi_n}{dz} \right)^2 dz \text{ の値}$$

n	1	2	3
C/C	12.30212	46.05012	98.90480
C/S	11.491292	42.896243	94.037518
S/S*	9.869604	39.478418	88.826440
C/F	4.64778	32.41735	77.29589
S/F	3.00000	27.23537	71.25833
F/F	0	12.0000	49.48082

第 4 表 Γ_{nn} および Λ_{nn} の諸数値

特に両端支持梁の場合には、 $\Lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right) \delta_{mn}$ となるから (38) 式で与えられる振動数方程式は厳密解となり、

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 - \lambda^2 & 0 & -y_0 \lambda^2 \\ 0 & \mu_n^4 - \lambda^2 & x_0 \lambda^2 \\ -y_0 \lambda^2 & x_0 \lambda^2 & \nu_n^4 + GK \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - r_s^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

となる。(40)式を展開して無次元化すると、つぎのような式が得られる。

$$\frac{I_0}{I_s} \left(\frac{p_n^2}{p_x^2} \right)^3 - \left[1 - \frac{Ax_0^2}{I_s} + \frac{p_y^2}{p_x^2} \left(1 - \frac{Ay_0^2}{I_s} \right) + \frac{p_\varphi^2}{p_x^2} \right] \left(\frac{p_n^2}{p_x^2} \right)^2 + \left[\frac{p_y^2}{p_x^2} + \frac{p_\varphi^2}{p_x^2} + \frac{p_y^2}{p_x^2} \frac{p_\varphi^2}{p_x^2} \right] \frac{p_n^2}{p_x^2} - \frac{p_\varphi^2}{p_x^2} \frac{p_\varphi^2}{p_x^2} = 0 \quad (41)$$

ここに

$$p_x^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \left(\frac{EI_{xx}}{mA} \right), \quad p_y^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \left(\frac{EI_{yy}}{mA} \right)$$

$$p_\varphi^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left[\frac{GK + EI_\omega \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}{mI_s} \right]$$

p_n = 第 n 次振動の角速度

p_x , p_y , p_φ は、それぞれ単純支持梁の独立な (連成し

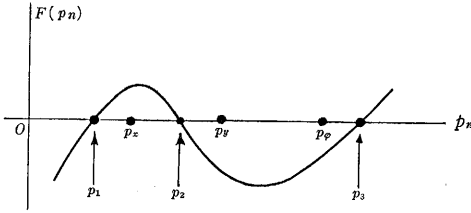
* S/S の場合は一般に $\Gamma_{nn} = (n\pi)^2$

ない) 場合の y 軸, x 軸まわりの第 n 次曲げ固有振動数および捩りの第 n 次固有振動数を表わしている。

(41) 式は, p_n^2 に関して三次方程式で一般に正の三実根 (すなわち固有振動数) を有し, 最も低い固有振動数は, 独立な三つの固有振動数のいずれよりも小さく, 最も高い固有振動数は, そのいずれよりも大きい。

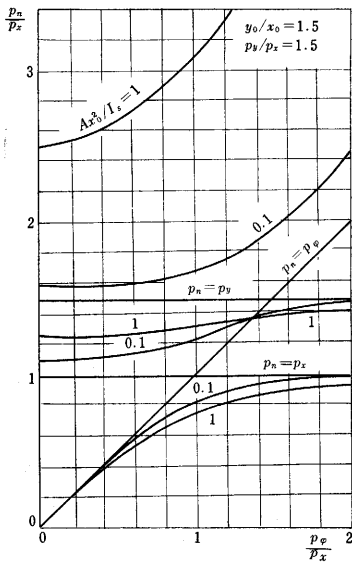
そして第 2 の固有振動数は, それらの中間の値をとる (第 16 図参照)。

いま, y_0/x_0 , p_y/p_x の比がある値にとって連成振動数と独立な固有振動数との関係を求めてみると, 第 17 図のようになる。

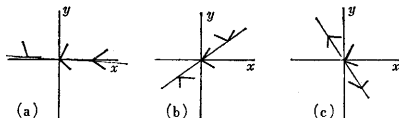


ただし $p_x < p_y < p_\phi$ とする。 $F(p_n)$ は (38) 式の左辺の三次方程式を表わす。

第 16 図 三重連成振動の特性



第 17 図 両端単純支持梁の三重連成振動数



第 18 図 アンクル材の三重連成振動モードの 1 例

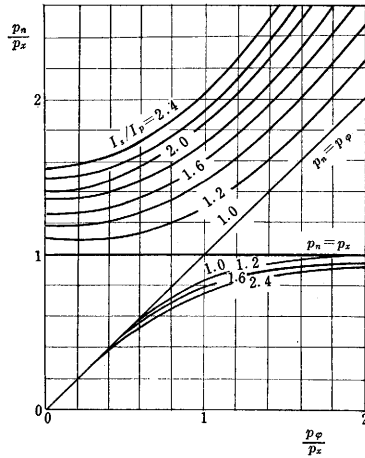
さて, このようにして求められた三つの固有振動数に対応して, それぞれ特有な振動モードが存在する。たとえば, 右の 18 図は, $6'' \times 3'' \times 1/2'$ のアンクル材で, 長さ 6 フィートの梁を両端で支持した場合に起こる第一振動の三つの振動モードを画いたものである。図中 (a) は, 最も低い振動数に対応するもので (b) は, そのつぎ

(c) は最も高い振動数の場合に対応している。同様に, 二重連成振動の場合を考えてみよう。たとえば $x_0=0$ の場合をとると,

$$\frac{I_0}{I_s} \left(\frac{p_n^2}{p_x^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{p_\phi^2}{p_x^2} \right) \frac{p_\phi^2}{p_x^2} + \frac{p_\phi^2}{p_x^2} = 0 \quad (42)$$

となり, I_s/I_0 をパラメータとして (42) 式によって決定される。

p_n/p_x と p_ϕ/p_x の関係を描いたのが, つぎの第 19 図である。この場合にも, 低い方の連成振動数は, p_x ,



第 19 図 両端単純支持梁の二重連成振動数

p_ϕ のいずれよりも常に小さく高い方の連成振動数は常に大きいことがわかる。

前にものべたように, 両端支持以外の場合は (37) 式あるいは (38) 式, (39) 式が, いずれも第一近似式となるが, その振動特性は, 単純支持梁の場合と同様

である¹²⁾。

第 2 表で与えられるその他のいろいろな境界条件の場合の振動を論ずるには, これらの式に与えられた境界条件に適合する Γ_{nn} , Π_{nn} および A_{nn} の値を代入して, 両端支持の場合と同様三次方程式の根を求めればよい。振動数の精度を高めようと思えば (33) 式にもどり, さらに多くの係数 a_n , b_n , c_n をとり, 次数の高い特有方程式を作って, 根を求めることが必要になることは, もちろんである。

(2) 薄肉開断面梁の強制振動¹⁴⁾

薄肉開断面梁の時間的に変動する外力に対する動的応答の問題は, 工学上応用範囲の広い重要な研究課題である。

すでに述べたようにこの問題は, (30) 式で与えられる連立常微分方程式を, 与えられた初期条件の下に解く問題に帰せられる。(30) 式からもわかるように, 薄肉開断面梁の振動問題では, 外力がかりに剪断中心軸を通して作用しても, その結果誘起される振動は独立とはなり得ない。すなわち連成振動状態の応答を一般に示す。なんとすれば梁の有する慣性力が図心軸に沿って常に分布するからである。方程式 (30) 式はすでに確立されている連立常微分方程式の理論や Laplace 変換を用いれば, 逐次近似解を求めることは, それほど困難ではない。

以上は、外力が梁の応答に無関係な場合であるが、翼のフラッタのように、空気が翼の変位に依存する場合(30)式の右辺の $E_n(t)$, $F_n(t)$ および $G_n(t)$ が、変位あるいはその微係数を含んだ複雑な関数形となり、多自由度非線形振動の問題となる¹⁵⁾。

普通行なわれているフラッタ解析では、自由度をいくつかに限定し、Trial and Error 式に解を、電子計算機にかけて求めているようである。

現在この種の非線形振動の問題は、研究者に漸く注目され始めた程度で、今後の発展が望まれる。また、航空機翼の突風荷重に対する応答、波浪を受ける船体の動的応答、車両の走行路線に対する不規則振動などの問題も(30)式を基礎にして、新しい展開が期待できる工学上の重要問題であろう¹⁵⁾。

(3) 変断面薄肉梁の振動解析

6. に述べた振動理論は、断面の一樣で真直な薄肉梁の場合を対象にして構成されたが、実際の構造物の振動は論ずる場合には、これをどうしても、変断面の梁まで拡張しなければならない。

ロケット、航空機体あるいは船体のように、組立梁とみなしうる構造物では、断面の剪断変形や回転慣性、あるいは構造減衰の影響をも考慮して、振動解析を行なう必要がある。

以上述べたような点を考慮して、エネルギーの停留原理から、つぎのような変断面薄肉梁の自由振動の方程式が求められる¹⁶⁾。ただし、簡単のために、構造減衰の影響は無視し、 x 軸が断面の対称軸になっている場合のみを考える。そうすると 5. で述べたのと同様に、 y 軸まわりの曲げ振動は独立となり、 x 軸まわりの曲げ振動と振り振動が連成する。

すなわち、解析の結果、

(a) y 軸まわりの曲げ振動

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^2} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(mI_{xx} \frac{\partial^3 u_b}{\partial t^2 \partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) - mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} \right) - mI_{xx} \frac{\partial^3 u_b}{\partial t^2 \partial x} \right\} \delta u_b &= 0^* \\ EI_{xx} \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial u_b}{\partial z} \right) = 0, \quad K'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta u_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

(b) x 軸まわりの曲げと振りの連成振動

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_b}{\partial z^2} \right) + mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(mI_{yy} \frac{\partial^3 v_b}{\partial t^2 \partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

* δ は変分記号である。したがって $k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} \delta u_s = 0$ とは

$k'GA \frac{\partial u_s}{\partial z} = 0$ または $u_s = 0$ の境界条件を表わしている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(k'GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) - mA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + mA x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_{\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - mA x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ + mI_{\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 v_b}{\partial z^2} \right) - mI_{yy} \frac{\partial^3 v_b}{\partial t^2 \partial z} \right\} \delta v_b &= 0 \\ EI_{yy} \frac{\partial^2 v_b}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial v_b}{\partial z} \right) = 0, \quad k'GA \frac{\partial v_s}{\partial z} \delta v_s &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - GK \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \delta \varphi &= 0 \\ EI_{\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

なる方程式が求められる。

ここに使用している記号は、前号と同じであるが、

$$u = u_b + u_s \quad v = v_b + v_s \quad \text{で}$$

u_b, v_b = 剪断中心 S の x および y 方向の曲げ変形による撓み。

u_s, v_s = 剪断中心 S の x および y 方向の剪断変形による撓み。

k' = 断面形について定められる係数でつぎの関係式が成立する。

$$Q = k'GA\beta$$

(ここに Q は梁のある断面の剪断力、 β をその断面における剪断歪とする)。

(43) 式あるいは、(45) 式の解法は原理的には 6. に述べた方法と同じであるが、複雑になるのはまぬがれない。

ロケット機体の振動解析などでは、さらに曲げによる断面の扁平化、推進の燃焼によって生ずる軸力の影響をも考慮に入れる必要がある場合も出てくる。著者は、かつて(43)式あるいは、(45)式を用いて、あるジェット輸送機主翼や、観測ロケット機体の振動解析を行ない、6. で述べた解析法が、十分実用的であることを確かめた^{16), 17)}。

(4) 一定の角速度 ω で回転する薄肉梁の自由振動¹⁸⁾

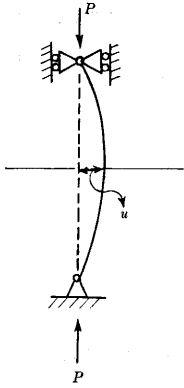
梁が鉛直軸のまわりに水平面内で回転すると、遠心力などのために梁の重心軸に沿って、軸力の分布が生ずる。したがってまず分布軸力と横荷重を受ける薄肉梁の平衡方程式を導くことが必要であり、ついでこの分布軸力と回転速度との関係を調べなければならない。

以下この2点につき若干述べることにする。

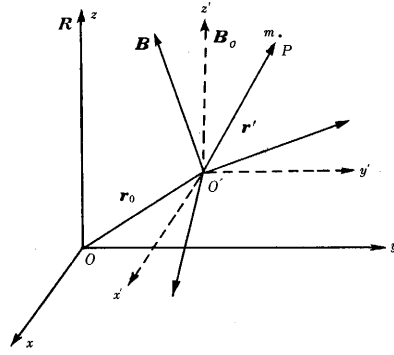
(a) 分布軸力と横荷重を受ける梁の平衡方程式

この問題は、次号で述べる予定にしている薄肉梁の安定の問題に関係があるので、その詳細は次号にゆずりその結果だけを記すとつぎのとおりである¹⁹⁾。

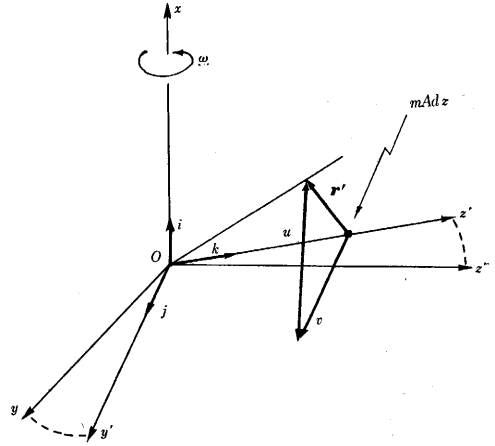
$$EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{du}{dz} + y_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) \right\} = Q_s \quad \left. \right\}$$



第 20 図 両端支持の柱の曲げ座屈



第 21 図 運動する座標系から見た質点の運動



第 22 図 一定の角速度で回転する梁の振動解析に使用する回転座標系

$$\left. \begin{aligned} EI_{yy} \frac{d^4 v}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left\{ p \left(\frac{dv}{dz} - x_0 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} &= Q_y \\ EI_{zz} \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GK \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{d}{dz} \left\{ p \left(y_0 \frac{du}{dz} - x_0 \frac{dv}{dz} \right. \right. \\ &\left. \left. + r_s^2 \frac{d\phi}{dz} \right) \right\} = M_z \end{aligned} \right\} (47)$$

(47) 式で $y_0=0$ としてその第 1 式のみを考えると、

$$EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left(P \frac{du}{dz} \right) = Q_x$$

が得られる。いま $Q_x=0$ とし、さらに軸力 $p=P$ で $P < 0$ とすれば

$$EI_{xx} \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$$

というよく知られた柱の曲げ座屈に関する Euler の方程式が得られる(第 20 図参照)。

(b) 一定の角速度 ω で回転する梁の微小要素に働く外力

(i) 運動座標系に関する質点の運動方程式

力学の理論によれば、質点 P (質量 m) の \mathbf{B} に関する運動方程式は、つぎのようになる(第 21 図参照)²⁰⁾。

$$m \{ \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' + 2(\mathbf{O} \times \dot{\mathbf{r}}') + \dot{\mathbf{O}} \times \mathbf{r}' + \mathbf{O} \times (\mathbf{O} \times \mathbf{r}') \} = \mathbf{F} \quad (48)$$

ただし、 \mathbf{O} は座標系 \mathbf{B} の回転を表わすベクトルであり、 \mathbf{F} は質点 P に働く外力を示す。

(ii) 梁の微小要素に働く外力の分析

この方程式 (48) を用いて一定の角速度 ω で回転する梁の微小要素に働く外力を求めてみよう。梁は x 軸に垂直な平面、すなわち yz 平面内で、一定の角速度 ω をもって回転していると仮定する。梁の長さ方向に z 軸をとり、ある時刻 t における y, z 軸を第 22 図のように、おのおの y', z' 軸とし、 z' 軸上に梁の微小要素 $mAdz$ を考え、その断面の剪断中心の x', y' 方向の変位をおのおの u, v 、そのまわりの断面の回転角を ϕ とすると、 $xy'z'$ 座標系に関する微小要素の重心の位置ベクトル \mathbf{r}' は、次式で与えられる。

$$\mathbf{r}' = (u + y_0\phi, v - x_0\phi, z) \quad (49)$$

座標原点 O は、不動であるから $\mathbf{r}_0(t) = 0$
また回転ベクトル \mathbf{O} は、 $\mathbf{O} = (\omega, 0, 0)$ で与えられる。
したがって

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_0 &= 0, \quad \dot{\mathbf{O}} = 0 \\ \dot{\mathbf{r}}' &= (\dot{u} + y_0\dot{\phi}, \dot{v} - x_0\dot{\phi}, 0) \\ \ddot{\mathbf{r}}' &= (\ddot{u} + y_0\ddot{\phi}, \ddot{v} - x_0\ddot{\phi}, 0) \end{aligned} \right\} (50)$$

(49) と (50) の関係を (48) 式に代入すると、梁の微小要素に働く力 \mathbf{f} は、ベクトル式で、

$$\mathbf{f} = -m\mathbf{A} \{ \ddot{\mathbf{r}}' + 2(\mathbf{O} \times \dot{\mathbf{r}}') + \mathbf{O} \times (\mathbf{O} \times \mathbf{r}') \} \quad (51)$$

(51) 式の第 2 項は、いわゆる Coriolis の力で、第 3 項が遠心力を表わす項となる。さて

$$\begin{aligned} -2m\mathbf{A}(\mathbf{O} \times \dot{\mathbf{r}}') &= -2m\mathbf{A} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega & 0 & 0 \\ \dot{u} + y_0\dot{\phi} & \dot{v} - x_0\dot{\phi} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2m\mathbf{A}\omega(\dot{v} - x_0\dot{\phi})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (52)$$

となり、梁の図心軸すなわち z 軸に沿う力となる。

$$\begin{aligned} -m\mathbf{A}\mathbf{O} \times (\mathbf{O} \times \mathbf{r}') &= -m\mathbf{A}\mathbf{O} \times \omega \{ -z\mathbf{j} + (v - x_0\phi)\mathbf{k} \} \\ &= m\mathbf{A}\omega^2 \{ (v - x_0\phi)\mathbf{j} + z\mathbf{k} \} \end{aligned} \quad (53)$$

となり、 y 方向と図心軸に沿う成分とからなることがわかる。

以上は、基準にとった座標系が回転するために生ずる力の成分であるが、その他に 6 ですでに述べたように慣性力の成分が存在する。

したがって (47) 式の右辺 $Q_x(z, t)$, $Q_y(z, t)$ および $M_z(z, t)$ に相当する項は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x(z, t) &= -m\mathbf{A}(\ddot{u} + y_0\ddot{\phi}) + q_x(z, t) \\ Q_y(z, t) &= -m\mathbf{A}(\ddot{v} - x_0\ddot{\phi}) + m\mathbf{A}\omega^2(v - x_0\phi) + q_y(z, t) \\ M_z(z, t) &= -mI_s\ddot{\phi} - m\mathbf{A}(y_0\ddot{u} - x_0\ddot{v}) \\ &\quad - m\mathbf{A}x_0\omega^2(v - x_0\phi) \end{aligned} \right\}$$

また分布軸力 ω_z は、次式で与えられる。

$$\omega_z = -\frac{\partial p}{\partial z} = -2m\mathbf{A}\omega(\dot{v} - x_0\dot{\phi}) + m\mathbf{A}z\omega^2$$

(54)

したがって

$$p(x, t) = \int_x^L w_x dz = -2mA\omega(\dot{v} - x_0\dot{\varphi})(L-x) + \frac{1}{2}mA\omega^2(L^2 - x^2) \quad (55)$$

となる。すなわち梁の回転によって生ずる軸力は、遠心力の外に Coriolis の力による成分も存在するが、いま梁の振動が微小であるとすれば、この成分は、遠心力による項に比べて無視することができる。そのような場合を考えて、梁の運動方程式を作ると、けっきょくつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 (L^2 - z^2) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} \\ + mA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = q_x(z, t) \\ EI_{yy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 (L^2 - z^2) \left(\frac{\partial v}{\partial z} - x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} \\ + mA \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = q_y(z, t) + \Omega^2 (v - x_0 \varphi) \\ EI \omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 (L^2 - z^2) \left(y_0 \frac{\partial u}{\partial z} - x_0 \frac{\partial v}{\partial z} + r_s^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \right\} \\ + mI_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + mA \left(y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = m_z(z, t) - x_0 \Omega^2 (v - x_0 \varphi) \end{aligned} \right\}$$

ここに

$$\Omega^2 = mA\omega^2 \quad \text{である} \quad (56)$$

(56) 式は x 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転する薄肉梁の運動方程式であって、6. で論じたように、図心と剪断中心の相対位置の関係によって、振動は連成あるいは独立になる。

たとえば $y_0 = 0$ とすれば、 y 軸まわりの曲げ振動は独立して

$$EI_{xx} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 (L^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + mA \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q_x(z, t)$$

となる。この式はよく振動学の本などに出ている式である。(56) 式の解き方も 6. で述べた方法と、まったく同じである。ただ違うのは、軸力の項が余分に含まれている点だけである。プロペラ、ヘリコプタのロータ翼、あるいは、タービンブレードの振動解析を頭において考えると、第 2 表で $C/F, S/F$ および P/F の三つの場合が工学上重要と思われる。自由振動の場合の式を、途中の経過を省略して結果だけを示せば、つぎのとおりになる。

(c) 相似境界の場合 (すなわち C/F または S/F の場合)

$$\left. (\lambda_n^4 - \lambda^2) a_n - y_0 \lambda^2 c_n + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + y_0 c_m) E_{mn} = 0 \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mu_n^4 - \lambda^2) b_n + x_0 \lambda^2 c_n + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (b_m - x_0 c_m) E_{mn} = 0 \\ - y_0 \lambda^2 a_n + x_0 \lambda^2 b_n + (\nu_n^4 - r_s^2 \lambda^2) c_n + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn} \\ + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (y_0 a_m - x_0 b_m + r_s^2 c_m) E_{mn} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

(d) 非相似境界の場合 (すなわち P/F の場合)

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_n^4 - \lambda^2) a_n - y_0 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \Theta_{mn} + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (a_m E_{mn} + y_0 c_m \Psi_{mn}) = 0 \\ (\mu_n^4 - \lambda^2) b_n + x_0 \lambda^2 c_n + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (b_m - x_0 c_m) \Phi_{mn} = 0 \\ (\nu_n^4 - \lambda^2 r_s^2) c_n - y_0 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Theta_{nm} + x_0 \lambda^2 b_n \\ + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn} + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} (y_0 a_m \Psi_{nm} - x_0 b_m \Theta_{nm} + r_s^2 c_m \Phi_{nm}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

ここに

$$\begin{aligned} E_{mn} &= \int_0^L (L^2 - z^2) \frac{du_m}{dz} \frac{du_n}{dz} dz \\ \Psi_{mn} &= \int_0^L (L^2 - z^2) \frac{dv_m}{dz} \frac{du_n}{dz} dz \\ \Phi_{mn} &= \int_0^L (L^2 - z^2) \frac{dv_m}{dz} \frac{dv_n}{dz} dz \\ \Theta_{mn} &= \int_0^L v_m(z) u_n(z) dz \end{aligned}$$

である。

(57) 式あるいは (58) 式より a_n, b_n, c_n を消去すれば、容易に振動数方程式が求められ、逐次近似的に解けることは、前と同様である。

特に $x_0 = y_0 = 0$ 、すなわち 2 軸対称断面の場合には、三つの振動が互いに独立となり、つぎの式から固有振動数が求められる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_n^4 - \lambda^2) a_n + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m E_{mn} = 0 \quad (y \text{ 軸まわりの曲げ振動}) \\ (\mu_n^4 - \lambda^4 - \Omega^2) b_n + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m E_{mn} = 0 \quad (x \text{ 軸まわりの曲げ振動}) \\ (\nu_n^4 - r_0^2 \lambda^2) c_n + GK \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{mn} + \frac{1}{2} r_0^2 \Omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m E_{mn} = 0 \quad (\text{振り振動}) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

したがって、各固有振動の第 1 近似式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= \lambda_n^4 + \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} \\ \lambda^2 &= \mu_n^4 + \Omega^2 \left(\frac{1}{2} E_{nn} - 1 \right) \\ \lambda^2 &= \nu_n^4 + GK A_{nn} + \frac{1}{2} r_0^2 \Omega^2 E_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

つぎに一般の非対称断面梁の場合につき、第 n 次振動

の振動数方程式の第一近似を示せば、つぎのとおりである。

(c) 相似境界の場合 (C/F または S/F の場合)

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 + \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} - \lambda^2 & 0 & -y_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} \right) \\ 0 & \mu_n^4 + \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} - \lambda^2 & x_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} \right) \\ -y_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} \right) & x_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} \right) & \nu_n^4 + GK A_{nn} + \frac{1}{2} r_s^2 \Omega^2 E_{nn} - r_s^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (61)$$

(d) 非相似境界の場合 (P/F の場合)

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 + \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} - \lambda^2 & 0 & -y_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \Psi_{nn} \right) \\ 0 & \mu_n^4 + \frac{1}{2} \Omega^2 E_{nn} - \lambda^2 & x_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \Phi_{nn} \right) \\ -y_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \Psi_{nn} \right) & x_0 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \Phi_{nn} \right) & \nu_n^4 + GK A_{nn} + \frac{1}{2} r_s^2 \Omega^2 \Phi_{nn} - r_s^2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (62)$$

(61), (62)式に現われる E_{nn} , Ψ_{nn} , Φ_{nn} の諸数値は、つぎの第 5 表を用いればよい。また、 Θ_{mn} はすでに第 4 表 (a) で与えてある。

第 5 表 $\Psi_{nn} = \int_0^L (L^2 - z^2) \frac{d u_n}{dz} \frac{d v_n}{dz} dz$ の値

n \ B.C.	1	2	3
C/F	2.38661	12.988985	36.156222
S/F	2.000000	12.795066	35.8152411
P/F	1.970468	10.188999	-31.6723137

($u_n(z) = v_n(z)$) の場合には E_{nn} または Φ_{nn} は Ψ_{nn} に一致する

さて、(60)式を用い 2 軸対称断面の場合について、純曲げ振動および、純振り振動の基本振動数の第一近似を求めてみると、つぎの結果が得られる。

(e) 曲げ振動

片持梁 (C/F) $p^2 = 12.362 \left(\frac{EI_{xx}}{mAL^4} \right) + 1.1933\omega^2$

支持自由梁 (S/F) $p^2 = \omega^2$

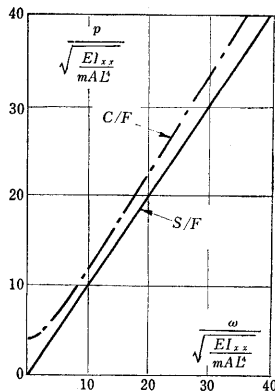
(f) 振り振動

片持梁 (C/F)

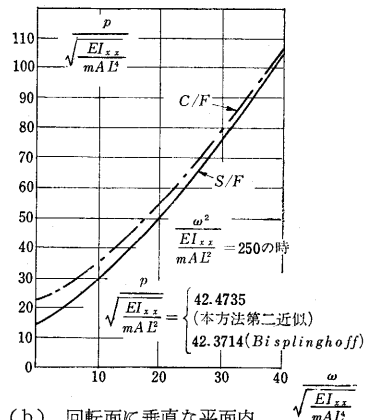
$p^2 = 12.362 \left(\frac{EI_{\omega}}{mI_0L^4} \right) + 4.64778 \left(\frac{GK}{mI_0L^2} \right) + 1.1933\omega^2$

支持自由梁 (S/F) $p^2 = 3 \left(\frac{GK}{mI_0L^2} \right) + \omega^2$

以上に得られた結果、その他を含めて回転する薄肉梁の独立な曲げ振動、あるいは振り振動数と回転速度との関係をグラフに示せば、第 23 図のようになる (第 23 図参照)。

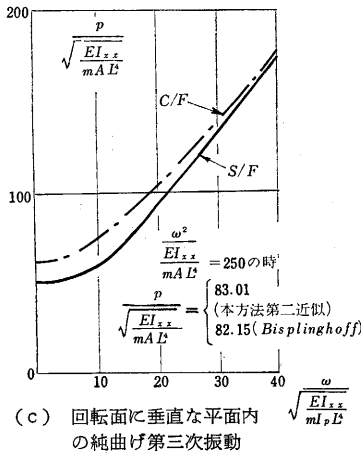


(a) 回転面に垂直な平面内の純曲げ第一次振動

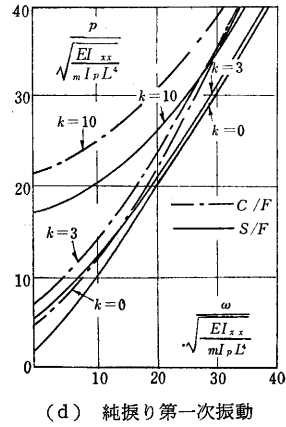


(b) 回転面に垂直な平面内の純曲げ第二次振動

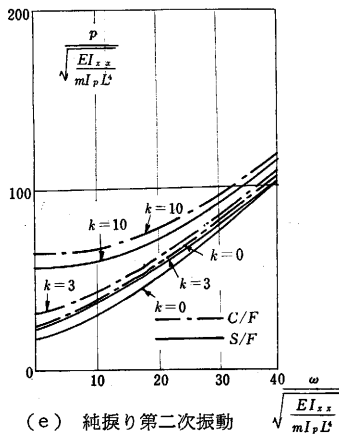
第 23 図 一樣な角速度で回転する梁の純曲げおよび振り振動数と回転速度との関係



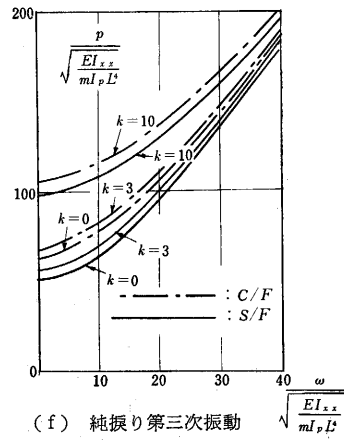
(c) 回転面に垂直な平面内の純曲げ第三次振動



(d) 純振り第一次振動



(e) 純振り第二次振動



(f) 純振り第三次振動

第 23 図 一樣な角速度で回転する梁の純曲げおよび振り振動数と回転速度との関係(つづき)

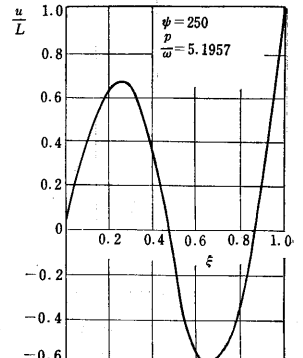
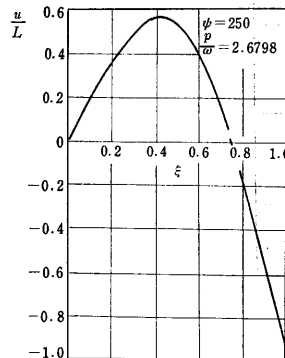
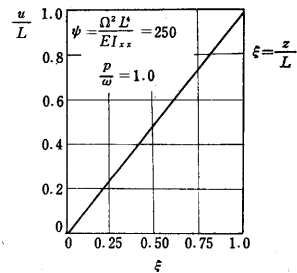
第 24 図は、ある回転速度に対する支持-自由梁の曲げ振動のモードを、二三画いたものである。一般に回転する梁の固有振動数は、遠心力によって高くなるが、その利き方は、振動の形や境界条件によって変化することがわかるであろう。

プロペラ翼や、タービンブレードなどは、断面に比して長さが長いものが少なくなく、ここで述べた振動理論が十分適用できると思われるが、実際のものの変断面で、しかも初期振りを伴ったものが多いから、これらの状態を考慮に入れて、解析する必要がある。

また、タービンブレードの振動などでは、ブレードが翼車の外周に沿って固定されており、翼車とともに回転する。そのような場合には、 a を翼車の半径とすれば、(53)式中の $(L^2 - z^2)$ の項が $(L - z)(L + 2a + z)$ となり遠心力の影響が当然のことながら大きくなる。

8. む す び

以上、前号で求めた薄肉開断面梁の平衡方程式を基にして組み立てられた振動理論と、その工学



第 24 図 一定の角速度で回転する支持自由梁の曲げ振動モード

的応用について概説した。そして 1 本の梁でも、断面が薄肉になるとその振動も相当複雑なものとなり、従来の梁の振動論程度の知識では不十分であることを述べた。

第 4 号では、薄肉開断面材が任意の外力（軸力、端部モーメントあるいは横荷重）の作用を受けて座屈変形を起こした場合の基礎方程式とその解法について解説する予定である。（1963 年 12 月 12 日受理）

参 考 文 献 (つづき)

8. J. M. Gere and Y. K. Lin: "Coupled Vibration of Thin Walled Beams of Open Cross Section", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 80, 1958
9. Dana Young, Robert P. Felgar, Jr.: "Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam", The University of Texas Publication No. 4913, July 1, 1949
10. R. E. D. Bishop and D. C. Johnson: "Vibration Analysis Tables", Cambridge University Press, 1956
11. J. M. Gere: "Torsional Vibration of Beams of Thin Walled Open Section", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 76, 1954
12. 川井, 埴 "薄肉開断面梁の振動について"航空技術研究所報告 TR-12, May, 1961
13. Dana Young: "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz's Method", Journal of Applied Mechanics, Dec., 1950
14. T. Kawai and T. Hanawa "On the Forced Vibration of a Thin Walled Beam of Open Cross Section", Proceedings of the 10th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1960
15. Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley and Robert L. Halfman: "Aeroelasticity" Ashley-Wesley Publishing Company, 1955
16. 川井, 泉他 "翼の固有振動数に関する一解析法"航空宇宙技術研究所報告 TR-46, June, 1963
17. 川井, 戸川, 林 "変断面梁の曲げ自由振動について"航空技術研究所報告 TR-22, Feb., 1962
18. 川井, 小川 "一定の角度で回転する梁の自由振動について"日本機械学会第 39 期全国大会前刷
19. 川井 "薄肉開断面材の安定に関する一般的理論"東京大学提出学位論文, 昭和 36 年 3 月
20. 山内恭彦 "一般力学" 岩波書店

東京大学生産技術研究所報告予告

第 13 卷 第 5 号

菊池真一・本多健一 著

Contribution à l'étude voltammétrique avec une microélectrode de platine

「微小白金電極を用いるボルタンメトリーの研究」(仏文)

酸化還元反応中、電極還元反応については滴下水銀電極ポーラログラフィーが広く用いられ、大きな発展をとげているが、電極酸化反応に関しては、酸素過電圧が大きき、また陽極として安定な金属を用いる必要があり、この分野の進歩は著しく遅れている。このため微小白金電極を用いるボルタンメトリーについて、まず基礎的諸条件の検討を行ない、本法の実用性を確立し、ついでいくつかの無機有機電極反応の応用を行ない、この方法が特に酸化反応の研究に好適であることを示した。

すなわち、まず電極の形状、回転の有無、電極表面の前処理等の基本的事項から検討し、再現性、信頼度の最も高い条件を定め、これに基づいて、加電方向速度、電解液の濃度、温度、電極回転の速度等の諸因子の影響を調べ、固体回転電極の場合の限界電流について実験的に一般式を導き、本法による定量の基礎を示した、また各種の無関係塩溶液の残余電流曲線より、白金電極について応用が可能である電位の範囲を定めた。

ついで Hg_2^{++} , Cu^{++} , Ag^+ , Pb^{++} , Cd^{++} , Tl^+ 等の還元, Tl^+ , Sn^{++} , 還元性有機化合物の酸化, 等に応用研究を行ない、本法が定量分析や酸化還元挙動の研究に適用可能であり、特に滴下水銀電極ポーラログラフィーが応用出来ないような対象に対し有用であることを示した。

有機化合物としてはヒドロキノン、フェニドン等の還元剤を取り上げてその酸化挙動を追求し、これより写真現像主薬の反応機構の解明に応用する途を開いた。（1964 年 2 月発行予定）