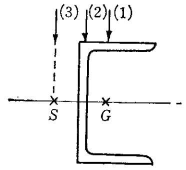
薄肉開断面材の弾性力学（I）

川　井　忠　彦

戦後，構造の軽量化の線に沿って，薄肉開断面の形材が，航空機，船舶，車輛はもとより，陸上建築，橋梁，その他ほとんどあらゆる構造物の構造要素としてとり入れられつつある．このような梁や柱の構造力学的諸問題を取り扱うには，従来の Bernouilli-Euler の梁の曲げ理論や，Saint Venant の棒の振り理論より高度な，薄肉開断面材の曲げ振り理論が必要になってきたが，その理論の概要と，最近の研究の動向について述べる．

1.　曲げと振りの相関性

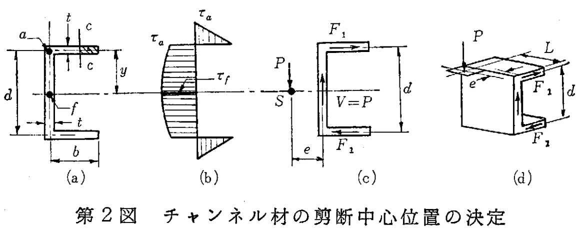
Bach が，1910 年の VDI に発表した実験によると，チャンネル材の梁の曲げ試験をして，第1図に示した図心 G(1) の上に荷重を加えてみると，梁は真直ぐに曲がらないで，捩れを伴い，また曲げ応力の分布も，中立軸からの距離に比例しないという結果が得られた．そこで，荷重の場所を変えて，振りの起こらないようにするため，図の第(2)の位置まで，荷重点を移したが完全に振りはとれなかった．もっと図心を離れて，断面の外側に荷重をかけて，はじめて振りがなくなり，応力の分布も中立軸からの距離に比例することになつたのである（荷重点の位置(3)）．これが注目をひいて，つぎに述べるような，剪断中心の考えが出てくることになり，剪断応力の分布についてもはっきりした考え方をしなければならぬことが，わかってきたのである．そこでこのチャンネル材を例にとり，良く知られた Bernouilli-Euler の梁の曲げ理論を適用してみると，どのような結果が得られるか考えてみよう．ただしこのチャンネル材の肉厚は十分薄くて，肉厚の中心線の寸法で，すべての計算は行なうことができるものとする．このチャンネルの曲げは，水平軸のまわりに起こり，また断面は，鉛直軸に関しては対称軸は存在しないけれども，曲げ応力は普通の材料力学における曲げの公式により与えられるものと仮定しよう．またこのチャンネルは，鉛直方向の剪断力に抵抗し，曲げモーメントは梁の長さの方向に沿って変化しているものと仮定する．いま任意の断面（たとえば第2図 (a) の c–c 断面）について，その剪断応力 τ は，普通の方法で容易に求めることができる．チャンネル材の水平脚（フランジ部）に沿っては，剪断応力 τ は，自由端からの距離に比例し，ウェブでは放物線分布となることは，I 形梁の場合と同じである．剪断応力の変化の様子は，第2図 (b) に示してあるが，すべて中心線にそって画かれている．さて平均剪断応力 $\frac{\tau_a}{2}$ に，フランジの面積を掛けると，力 $F_1=(\tau_a/2)bt$ が得られ，垂直剪断力 V は，ウェブにおける剪断応力の和として，次式で与えられる．



第1図　Bach の実験

$$V=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau t dy$$

ただし，チャンネル材の肉厚 t は，簡単のため一定とする．すなわちある断面内に働く剪断力は，第2図 (c) に示してあるが，それは一つの力 V と一つのモーメント F_1d がチャンネル材の考えている断面に働いていることを物語っている．物理的に考えると，チャンネル材は，ある縦軸のまわりに捩れようとする傾向があることを示している．振りを防ぎ，初めに仮定した曲げ応力分布の状態を，実現するためには，外力をその内部モーメント F_1d とつり合うように加えなければならない．たとえば第2図 (d) に示すように，重量の無視できる片持梁が，ウェブの中心線から，ある距離 e だけ離れた位置において，ウェブの面に平行に，一つの鉛直力 P を受ける場合を考える．この外力が平衡状態にあるためには，大きさが等しく，方向が反対な剪断力 V が，ウェブ内に発生していなければならない．同様に，チャンネル材が振れないためには，偶力 Pe が，偶力 F_1d に等しくなければならない．また同一断面内において，曲げモーメント PL は，普通の曲げ応力（図に示してはないが）によって，保たれていなければならないことはもちろんであ



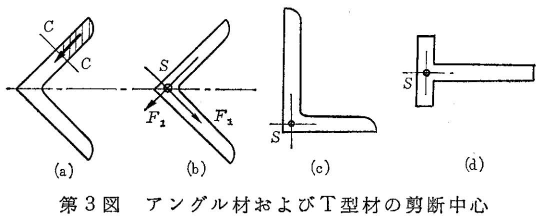
第2図　チャンネル材の剪断中心位置の決定

る．チャンネル材に振りが起こらないように，加えるべき外力 P の作用面を決定する距離 e の式は，これより容易に求められる．すなわち $F_1d=Pe$ であり $P=V$ であることに注意すれば，

$$e=\frac{F_1d}{P}=\frac{(1/2)\tau_a btd}{P}=\frac{btd}{2P}\frac{VQ}{It}$$
$$=\frac{btd}{2P}\frac{Vbt(d/2)}{It}=\frac{b^2d^2t}{4I} \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

(Q は各フランジの中立軸に関する静的モーメントを表わす)．

この距離 e は，外力 P の大きさに無関係であり，また梁の長さの方向に沿って一定である．すなわち，距離 e は断面常数であり，ウェブの中心から，外側の方向に測った外力の距離を示している．同じように，チャンネルに振りを生ぜしめないように，水平力を加えるべき作用面の位置を決定することができる．この場合は，断面の対称性からして，この平面は，前の場合の中立面に一致することは，容易にわかる．このチャンネル材の断面に垂直で，かつ互いに直交している２平面の交線を，剪断中心線 (shear center line) または剪断中心軸 (shear center axis or elastic axis) と呼び，この交線と梁の断面の交点を，剪断中心 (shear center) と呼ぶ．剪断中心は第２図 (c) において，文字 S で示されている．剪断中心を通り作用する横方向の力は，すべて梁に振りを生ぜしめない．この問題の詳細な研究によると，任意断面の部材が振られる時，その振りは，剪断中心のまわりに起こり，曲げを生じない．このことから剪断中心は，しばしば回転中心 (center of twist) とも呼ばれる．一つの対称軸を有する断面材では，剪断中心は常にその対称軸上に存在する．また２軸対称の断面材では，剪断中心は断面の図心に一致する．肉厚の厚い非対称断面材の剪断中心の位置を，正確に決定することは困難で，求められているのは二三の場合しかない．もし肉厚が薄ければ，これまで述べてきた方法と同じようにして，断面の剪断中心の位置を，比較的簡単に決定することができる．普通の方法は，ある断面における剪断力 (F_1 や V のごとき) を決定し，これらの力がつり合うために，必要な外力の位置を見出すという方法である．同じような解析を行なうと，等脚アングル材の剪断中心は，第３図 (a) および (b) に示すように，中心線の交点にあることがわかる．それは，どの断面をとっても (たとえば c–c 断面のように) 剪断応力の流れは，脚の中心線の方向に沿っているからである．これらの剪断応力の合力は，脚に作用する二つの等しい力 F_1 となる．そしてこれらの力の鉛直成分は，S を通る垂直剪断力に等しい．同じようなことが，第３図 (c) および (d) に示されたＴ型材，または不等辺アングル材についてもいえる．いろいろな形材の剪断中心の，位置を知っておくことは，特に航空機構造の場合に重要である[1),2)]．



第３図　アングル材およびＴ型材の剪断中心

2. Ｉ型梁の振り

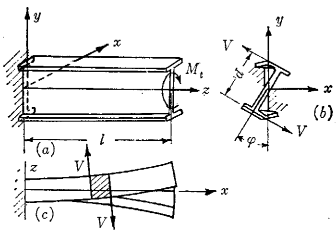
材料力学で良く知られている Saint Venant の棒の振り理論は，つぎのような仮定に立って，組み立てられたものである．

（１） 振りに対して，断面のそりは起こらない (たとえば，円形断面や円筒) か，または長さに比し，断面寸法が小さい．

（２） アングル材，十字形，またはＹ形断面材のように，一点に断面要素が交わり，断面のそりに対して抵抗がない．

（３） 外力として加えられる振れモーメントが一定であり，断面の振り角の長手方向の変化がない (一様な振れ)．

このような Saint Venant の理論を，振りモーメントが，変化するときとか，断面のそりが制限されているような場合に適用すると，あまりにも事実に反する結果が生ずる．たとえば，第４図のように，片持Ｉ形梁を振った場合を考えてみよう．この場合，梁の固定端面は回転のみならず，フランジのそりを拘束しているので，上下のフランジは，曲げを受けることになる．端部に加えたトルクは，いずれの断面においても，振れによる剪断応力と，フランジ部の曲げによる剪断応力との合力とつり合っているわけである．この梁の任意断面の振れ角を φ とすると，梁の単位長さ当たりの振れ角は，$\theta=\dfrac{d\varphi}{dz}$ となる．端部に加わるトルクを M_z とし，このトルクのうち，振れのために生ずる剪断応力とつり合う部分を $M_z^{(s)}$ (Saint Venant の振り) とすれば，良く知られているように，



第４図　片持Ｉ型梁の振り

$$M_z^{(s)}=GK\theta \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに GK は，断面のねじり剛性である．またフランジが第４図(c) のように曲がるが，これに伴う剪断応力につり合うトルクを $M_z^{(w)}$ とする．上下フランジの各図心間の距離を d とすれば，任意断面の上部フランジのたわみ u_F は，つぎのようになる．

$$u_F=\frac{d\varphi}{2} \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

各フランジを一つの梁と見なし，その受ける曲げモーメントおよび剪断力をおのおの M_F, V_F とすれば

$$M_F=-EI_f\frac{d^2u_F}{dz^2},\quad V_F=-EI_f\frac{d^3u_F}{dz^3} \quad (4)$$

ここに EI_f は，フランジ1枚のその平面内における曲げ剛性を表わす．したがって上下のフランジのそりによる付加振りモーメント $M_z^{(w)}$ は，

$$M_z^{(w)}=V_Fd=-EI_fd\frac{d^3u_F}{dz^3}=-\frac{EI_fd^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dz^3} \quad \cdots\cdots(5)$$

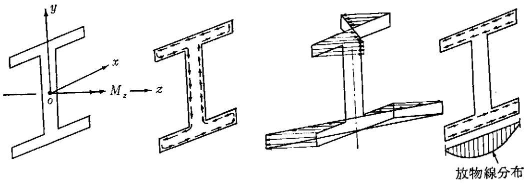
したがって全トルク M_z は

$$M_z=M_z^{(S)}+M_z^{(w)}=GK\frac{d\varphi}{dz}-\frac{EI_fd^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dz^3} \quad \cdots\cdots(6)$$

となり，梁の長さ L に沿い一定である．ゆえに途中に分布振りモーメント m_z が働く場合には，

$$\frac{EI_fd^2}{2}\frac{d^4\varphi}{dz^4}-GK\frac{d^2\varphi}{dz^2}=m_z \quad \cdots\cdots(7)$$

となる．さてI形梁が以上に述べたようなトルク M_z により曲げ振りを生ずる場合，任意の断面内に生ずる応力分布は，つぎのようになる．



(a) St. Venant の振り剪断応力　(b) 曲げ振り応力 σ_w　(c) 曲げ振り剪断応力 τ_w

第5図　I 型梁の振りにおいて断面に生ずる内部応力

Saint Venant の振りによる剪断応力 τ_{st} は良く知られているように，

$$\tau_{st}=\frac{M_z^{(S)}t}{K}=Gt\frac{d\varphi}{dz} \quad \cdots\cdots(8)$$

で与えられる．またフランジの曲げ振り応力 σ_w は，各フランジを，その平面内での曲げを受ける梁と見なして，梁の理論を適用すれば，(4) 式より

$$\sigma_w=\frac{M_Fx}{I_f}=-Ex\frac{d^2u_F}{dz^2}=-\frac{Exd}{2}\frac{d^2\varphi}{dz^2} \quad (9)$$

この σ_w に対応して，フランジの断面内に生ずる曲げ剪断応力が τ_w であるから，梁の理論より

$$\tau_w=\frac{V_FQ}{I_ft}=-\frac{EQ}{t}\frac{d^3u_F}{dz^3}=-\frac{Ed}{4}\frac{d^3\varphi}{dz^3}\left(\frac{b^2}{4}-x^2\right) \quad \cdots\cdots(10)$$

となる．つぎに境界条件について考えてみると，実際に起こり得る場合は，つぎの4種の条件より二つをとり出して，組み合わせたものとなるであろう．すなわち

(a) 断面の回転がない　$u_F=0 \rightarrow \varphi=0$

(b) 断面の回転角の傾斜がない　$\frac{du_F}{dz}=0 \rightarrow \frac{d\varphi}{dz}=0$

(c) フランジの曲げが自由である　$M_F=0 \rightarrow \frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$

(d) フランジの剪断力が零である　$V_F=0 \rightarrow \frac{d^3\varphi}{dz^3}=0$

これらの4種の条件を組み合わせ，工学上重要と思われるのは，だいたい，つぎの三つの場合であると考えてよい．

(1) 固定端：断面の回転ならびに，そり(warping)が完全に拘束されている．

$$\varphi=0,\quad \frac{d\varphi}{dz}=0$$

(2) 支持端：断面の回転は拘束されるが，フランジのそりは自由である．

$$\varphi=0,\quad \frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$$

(3) 自由端：断面に外力が作用していない．すなわち $M_z=0$ で断面のそりが自由

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0,\quad EI_w\frac{d^3\varphi}{dz^3}-GK\frac{d\varphi}{dz}=0$$

(11)

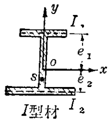
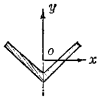
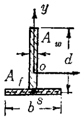
上に述べたI型梁の振りの場合には，断面が2軸対称であることから，梁の剪断中心は，図心に一致し，断面が図心のまわりに回転すると結論しえたのであって，したがって，フランジの曲げだけを考えればよかったのである．またフランジとウェブとの結合部で，フランジの曲げ応力が0となるため，このフランジの曲げは，ウェブの単純振りとは，互いに干渉しないこともわかる．ところが，非対称断面あるいは，対称軸が一つだけの場合には，振りに伴ってフランジの曲げのほかに，ウェブの曲げまでも起こるので，問題はいっそう複雑になる．

このような場合をも含めて H. Wagner は，薄肉開断面材の振り理論を初めて構成した[3),4)]．その詳細は，紙面の都合で割愛するが，任意の薄肉開断面材の場合にも(7)式と同じような方程式が得られる．すなわち，任意の薄肉開断面材がその剪断中心線に沿う分布振りモーメント m_z によって振られる場合，つぎのような平衡方程式が成り立つ．

$$EI_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}-GK\frac{d^2\varphi}{dz^2}=m_z \quad \cdots\cdots(12)$$

ここに EI_w は，梁の曲げ振り剛性 (Warping Torsional Rigidity) と名づける．断面形状によって EI_w の項は，その振り剛性 GK に比し，極めて大きくなり，振りの問題を考えるときに，実際に近い結果を出すためには，この曲げ振り剛性は無視できないものとなる ((12)式はさらに断面の閉じた，また隔壁を有する薄肉梁の振りの場合にも成立することが，拡張された Wagner の理論より証明される．この場合にも剪断中心が開断面梁の場合と同様に，決定されるが曲げ振り剛性 EI_w は振り剛性 GK に比してはるかに小さく一般に EI_w の項は無視することができる)．つぎに二三の断面の曲げ振り剛性を示す (第1表)．

第 1 表　断面の剪断中心と曲げ振り剛性

 I型材	$y_s=\dfrac{e_1I_1-e_2I_2}{I_1+I_2}$, $x_s=o$ $I_w=(e_1+e_2)^2\dfrac{I_1I_2}{I_1+I_2}$ I_1, I_2はy軸まわりのフランジの断面慣性率
 等辺山型材	剪断中心は角の点 $I_w=\dfrac{A^3}{144}$ Aは断面積
 T型材	剪断中心フランジとウエップの交点 $I_w=\dfrac{A_f^3}{144}+\dfrac{A_w^3}{36}$ A_f, A_wはそれぞれフランジ，ウエップの断面積

さてはじめに戻って，片持I型梁の振りの問題を，もっと具体的に考えてみよう(第5図参照)．この場合トルク $M_z=M_t$ は，梁の全長 L にわたって一定であり，振りに対する境界条件は (12) 式より

$$(\varphi)_{z=0},\qquad \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0}=0,\qquad \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_{z=L}=0$$

であるから (6) 式の解は，

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{M_t}{GK}\left(1-\frac{\cosh k\left(1-\frac{z}{L}\right)}{\cosh k}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

ここに $k^2=\dfrac{GKL^2}{EI_w}$ であり，梁の断面形状やその長さによって変化する常数である．

(13) 式の第2項のために単位長さ当たりの振り角は，トルク M_t が一定であるにもかかわらず，梁に沿って変化する．このようにI型梁の振りは，フランジの曲げに依存し，曲げ振り (warping torsion) あるいは一様でない振り (nonuniform torsion) と呼ばれ，いわゆる一様な振り (Saint Venant の振り) と区別されているゆえんである．さて $\dfrac{d\varphi}{dz}$ が決まれは，(2) あるいは (5) 式より $M_z^{(S)}$ および $M_z^{(w)}$ はそれぞれ容易に求められる．すなわち固定端 $z=0$ では $\dfrac{d\varphi}{dz}=0$ であるから，(2)式より $M_z^{(S)}=0$ である．したがってこの点では全トルクは，フランジに働く剪断力の作るモーメントとつり合い $V_F=-\dfrac{M_t}{d}$ である．

断面 $z=L$ では，(13) 式より

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{M_t}{GK}\left(1-\frac{1}{\cosh k}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

となる．もし梁の長さが断面の寸法に比して，十分大きければ，k は大きくなり，したがって (14) 式の第2項は無視できる．ゆえに $\dfrac{d\varphi}{dz}$ は $\dfrac{M_t}{GK}$ に近づく．

フランジの曲げモーメント M_F は (4) 式より $M_F=-\dfrac{EI_fd}{2}\dfrac{d^2\varphi}{dz^2}$ であり，また (7) 式から $I_w=\dfrac{I_fd^2}{2}$ であることに注意すると

$$M_F=\frac{M_tL}{kd}\left(\frac{\sinh k\left(1-\frac{z}{L}\right)}{\cosh k}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

したがって固定端における曲げモーメントは，

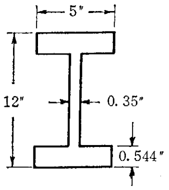
$$M_{F^{(\max)}}=\frac{M_tL}{kd}\tanh k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

となり，k が3ないし4以上になれば，$\tanh k$ は1に近づき

$$M_{F^{(\max)}}\doteqdot\frac{M_tL}{kd}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

とおくことができる．また非常に短い梁の場合には k が小さく $\tanh k$ は k に近づくから，

$$M_{\max}\doteqdot\frac{M_tL}{d}$$



第6図　12 I 31.8 の等価断面

となる．1例としてアメリカで使用されている I 型鋼，12 I 31.8 の梁について，以上の理論を適用してみる．

この梁の断面積は 9.26 in² で，断面を実際の面積に，おのおの等しい三つの矩形断面からなるものとする．

St. Venant の振り剛性は，

$$GK=(10.91\times0.35^3+2\times5\times0.544^3)G/3$$
$$=0.692G$$

一つのフランジの曲げ剛性 EI_f は，ウェブの断面の慣性能率を無視して，標準断面の鉛直主軸の周りの慣性能率の半分に E を掛けて得られ

$$EI_f=\left(\frac{9.5}{2}\right)E=4.75E$$

となるから，

$$\frac{k}{L}=\frac{1}{d}\sqrt{\frac{2GK}{EI_f}}=\frac{1}{d}\sqrt{\frac{0.692\times2}{4.75\times2.6}}=\frac{0.334}{d}$$

したがってこの梁が，第4図のような荷重を受ける場合には，梁が十分長くて k したがって，L/d が大きければ (16) 式より，フランジの最大曲げモーメントは，トルク M_t の約3倍になる．たとえば，もし $k=2$ したがって $L\sim6d$ であれば $\tanh k=0.96$ となり，上の計算の誤差は約 4% である．

また (13) 式を積分して振り角を求めてみると，つぎのようになる．

$$\varphi=\frac{M_t}{GK}\left(z+\frac{\frac{L}{k}\sinh k\left(1-\frac{z}{L}\right)}{\cosh k}-\frac{L}{k}\tanh k\right)\ (18)$$

したがって

$$(\varphi)_{z=L}=\frac{M_tL}{GK}\left(1-\frac{1}{k}\tanh k\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

が得られる．( ) 内の第2項は，フランジの曲げが，振れ角に及ぼす影響を示す項である．長い梁では $\tanh k\sim1$ で (19) 式は

$$(\varphi)_{z=L}=\frac{M_t}{GK}\left(L-\frac{L}{k}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

となり，フランジの曲げが振り角に及ぼす影響は，梁の長さを L から L/k だけ短くした場合の Saint Venant の振りに等しくなることがわかる．

3. 薄肉開断面材の曲げ振りに対する基礎方程式

Timoshenko[5]， Kappus, Bleich[6]，Goodier その他の人々は，Bernouilli-Euler の梁の曲げ理論と H. Wagner の梁の曲げ振り理論を基にして，つぎのような薄肉開断面材の曲げ振りに関する工学的理論を展開した．

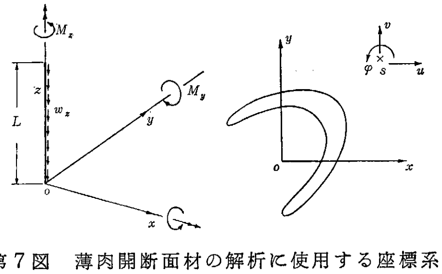
$$\left\{\begin{aligned} &EI_{xx}\frac{d^2u}{dz^2}=M_x, \quad EI_{yy}\frac{d^2v}{dz^2}=M_y \\ &GK\frac{d\varphi}{dz}-EI_w\frac{d^3\varphi}{dz^3}=M_z \end{aligned}\right. \cdots\cdots\cdots (21)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dM_x}{dz}=V_y, \quad \frac{dM_y}{dz}=-V_x, \quad \frac{dM_z}{dz}=-m_z \\ &\frac{dV_y}{dz}=-q_y, \quad \frac{dV_x}{dz}=-q_x, \quad \frac{dp}{dz}=-w_z \end{aligned}\right. \qquad (22)$$

（9）式と（10）式より，

$$\left\{\begin{aligned} &EI_{xx}\frac{d^4u}{dz^4}=q_x, \quad EI_{yy}\frac{d^4v}{dz^4}=q_y \\ &EI_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}-GK\frac{d^2\varphi}{dz^4}=m_z \end{aligned}\right. \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

ここに梁の断面は一様で，その中心軸は真直であり，断面の肉厚は，他の寸法に比べて十分小さいが，荷重により断面の形状は変化しないものとし，梁の撓み u, v および振り φ は，微小であるとする．



第7図　薄肉開断面材の解析に使用する座標系および諸記号

第7図のように，梁の一端における断面の図心を原点とし，梁の長さ方向に z 軸を，また x, y 軸を断面の主軸方向にとる．

断面の剪断中心 S の座標を x_0, y_0 とし，断面の変位および回転は，剪断中心の変位 u, v および回転 φ をもって表わすことにする．

つぎに (21)，(22) および (23) 式に現われる諸量を定義する．

EI_{xx}, EI_{yy}: 断面の y 軸および x 軸周りの主慣性能率

EI_w: 断面の曲げ振り剛性

M_x, M_y, M_z: ある断面 z 上に生ずる静的曲げモーメントおよび，振りモーメント

V_x, V_y: 断面の x 方向および y 方向の剪断力

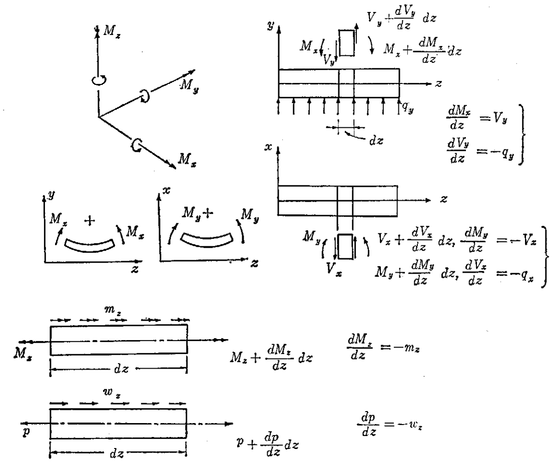
p: 断面 z における直応力

q_x, q_y: 梁に働く分布横荷重の強さ

m_z: 分布した振りモーメントの強さ

w_z: 分布軸力の強さ

上に定義した M_x, M_y, M_z, V_x, V_y, p, q_x, q_y, m_z, w_z の符号は，つぎの第8図に示すような規約に従うものとする．



第8図　断面力および外荷重についての符号規約

ここで部材両端における境界条件について，若干考察を加えることにする．梁の変形は撓み (u, v) および振り φ の三つの量で，一般に表わされ，振れに対する境界条件は 2. ですでに考察した．撓み (u, v) に対する境界条件は材料力学で，良く知られているように，たとえば撓み u について考えると，つぎの3種類の場合が代表的である．

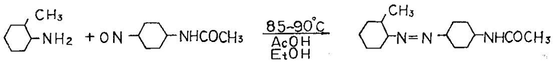
$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \text{固定端}: u=0, \quad \frac{du}{dz}=0 \\ &\text{(ii)} \quad \text{単純支持端}: u=0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}=0 \\ &\text{(iii)} \quad \text{自由端}: \frac{d^2u}{dz^2}=0, \quad \frac{d^3u}{dz^3}=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (24)$$

したがって一般に薄肉開断面材の曲げ振りの問題を考えるときには，u, v, φ のおのおのにつき両端で，それぞれ二つの条件式，したがって全体で $2\times2\times3=12$ の条件式の下に，基礎方程式を解かなければならないことになる．しかしながら，そのような場合は，後に述べる梁の曲げ振り振動や，曲げ振り座屈の場合が主で，静的な問題では，変形が大きくなって，曲げと振りの連成した状態を考慮しなければならない場合に限られる．

薄肉材に任意の横方向の力が加わって撓み，かつ振れる一般的な場合を取り扱うには，まず各外力を剪断中心軸を通り，それに平行な力とトルクに分解して考えることである．このようにすると梁は，剪断中心軸に沿って

(28 ページへつづく)

3. o′-メチル-p-アセチルアミノアゾベンゼン (III) の合成[4),5)]

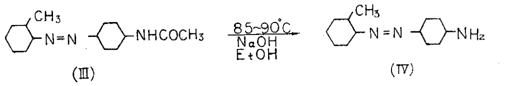


(IIIa) (IIIb) (III)

実験例

o-トルイジン (IIIa) 677mg (6.3/1000モル), p-ニトロソアセトアニリド (IIIb) 865mg (5.3/1000 モル), エタノール10m*l*, 酢酸 40m*l* の混合物を, 温浴上で 85~90℃ に1~1.5 時間加熱する. 後, 減圧濃縮し (約 10 m*l* に), 一夜放置して, 析出した結晶をロ過し, 含水メタノールで洗い乾燥する. かっ色針状結晶の o′-メチル-p-アセチルアミノアゾベンゼン (III) を得る. 収量 1054 mg, 収率71.5%, m.p 151.5-7.0℃ (補正). アルミナ-ベンゼン系のカラムクロマトで精製後, ベンゼンで再結晶して, 橙色針状結晶で m.p 159.0-160.5℃ (補正) のものを得る.

4. o′-メチル-p-アミノアゾベンゼン (IV) の合成[4),5)]



(III) (IV)

実験例

o′-メチル-p-アセチルアミノアゾベンゼン (III) 190mg (0.75/1000モル), エタノール 3 m*l*, 50%水酸化ナトリウム水溶液 1.4m*l* の混合物を, 温浴上で 85~90℃ に2.5 時間加熱する. 後, 反応液に水 10m*l* を加え, 生成した黒かっ色油状の o′-メチル-p-アミノアゾベンゼン (IV) をエーテル抽出する. エーテル留去後, 塩酸を滴下して, IVの塩酸塩を得る.

塩酸塩の収量 178mg, 収率 95.9%. 少量の塩酸を含むエタノールで再結晶して, 紫色粉状結晶で m.p 167.5℃ (変色) (補正) のものを得る.

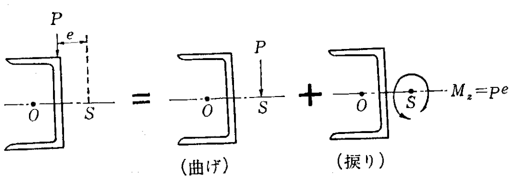
なお, すべての新化合物の確認は, C, H, N 分析, 赤外線吸収スペクトル, 可視線吸収スペクトルで行なった.

文 献

1) 永井ら, 生産研究, **15**, 369 (1963)
2) P. Ruggli et al., Helv. Chim. Acta, **27**, 1371 (1944)
3) K. Ueno, J. A. C. S., **74**, 4508—11 (1952)
4) J. C. Cain, J. C. S., **93**, 682 (1908)
5) P. Ruggli et al., Helv. Chim. Acta, **28**, 787 (1945)

(18 ページよりつづく)

横方向の力を受け, またいくつかの断面において, 集中トルクを受ける状態になる. 前にも述べたように, 剪断中心軸を通って作用する横方向の力は, 曲げ変形しか起こさせないから, 曲げと捩りは互いに独立して (23) 式の第1式および第2式を解いて曲げ変形が決まり, 第3式を解けば, 捩りの問題が解明されることになる.



第9図 薄肉材の曲げ捩り問題の分解

この第3式は, 形式的には軸方向に引張り力を受ける梁の曲げの問題と同じであり, その解析は, 曲げの場合に比べて面倒になる. このような薄肉開断面材の曲げ捩りのさらに複雑な二三の例題を Timoshenko が, その教科書で取り扱っている[7)].

4. む す び

以上において薄肉開断面材が荷重を受けて変形するとき, 捩りは剪断中心のまわりに起こり, 従来の Saint Venant の捩りに断面のゆがみ (warping) を考慮した曲げ捩りの基礎式 (7) を用いて, 論ずべきことをチャンネル材やI型梁の場合を例に説明した. 次号において, このような梁に起こる曲げ捩り連成振動について説明する予定である.

(1963 年 11 月 5 日受理)

文 献

1) Bruhn, E. E.,: Analysis and Design of Airplane Structures, Cincinnati, Ohio, Tri-State Offset Co., 1950.
2) 長柱研究委員会編: 弾性安定要覧, コロナ社版 1960.
3) Wagner, H.,: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift Fünf und Zwanzig Jahre, Technische Hochschule Danzig, p.329~343, 1904~1929.
4) Wagner, H., und Pretschner, W.,: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Luftfahrt-Forschung, Band XI, 1934.
5) Timoshenko, S.,: Collected Papers, McGraw-Hill Book Co., Inc. 1953.
6) Bleich, H.,: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., Inc. 1952.
7) Timoshenko, S.,: Strength of Materials, Part II, Advanced Theory and Problems, 3 rd ed., Van Nostrand Co., Inc. 1956.