

“近距離音場の近似計算”について

Note on “Approximate Calculations on the Near Field Produced by a Circular Piston like Source”

鳥 飼 安 生

前速報 “近距離音場の近似計算”¹⁾ において、同速報中の第 3 図の曲線に関する積分 (6) 式の近似式として、つぎの D_n を用いて (13), (14) 式を得た。

$$D_n \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\zeta^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right]^n \cos \zeta d\zeta \quad (1)$$

この D_n の計算を直接数値積分法により、有効数字 9 桁まで正しい値を $n=20$ まで求めると第 1 表のようになり、 n が大きくなると前速報の第 1 表とかなり、くい

第 1 表

n	D_n	$D_n/n!$
0	2	2
1	-4	-4
2	8.52158241	4.26079121
3	-18.7769663	-3.12949438
4	42.2543444	1.76059768
5	-96.4664067	-8.03886723 $\times 10^{-1}$
6	222.555790	3.09105264 $\times 10^{-1}$
7	-517.572308	-1.02692918 $\times 10^{-1}$
8	1211.24801	3.00408732 $\times 10^{-2}$
9	-2849.04737	-7.85121079 $\times 10^{-3}$
10	6729.51937	1.85447513 $\times 10^{-3}$
11	-15951.1927	-3.99611007 $\times 10^{-4}$
12	37922.7332	7.91703686 $\times 10^{-5}$
13	-90390.6424	-1.45158729 $\times 10^{-5}$
14	215933.370	2.47691675 $\times 10^{-6}$
15	-516856.619	-3.95248719 $\times 10^{-7}$
16	1239299.91	5.92320584 $\times 10^{-8}$
17	-2976163.13	-8.36735541 $\times 10^{-9}$
18	7157175.29	1.11789402 $\times 10^{-9}$
19	-17233441.5	-1.41669836 $\times 10^{-10}$
20	41542910.6	1.70754558 $\times 10^{-11}$

ちがってくる。このくいちがいの原因は、前速報中で D_n の計算途次のつぎの関数 $A_n(\xi)$ の $\xi=\pi/2$ における値の計算に存する。

$$A_n(\xi) \equiv \xi^{2n} - 2n(2n-1)\xi^{2n-2} + \dots + (-1)^n (2n)! \quad (2)$$

上式から $(-1)^n A_n(\xi)/(2n)!$ はつぎのようになり、

$$(-1)^n \frac{A_n(\xi)}{(2n)!} = 1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{(2n)!}$$

$n \rightarrow \infty$ のときこれは $\cos \xi$ に一致する。よって n が大きくなると、

$$|A_n(\pi/2)/(2n)!| \ll 1$$

となる。すなわち

$$|A_n(\pi/2)| \ll (2n)!$$

となるので、(2) において $\xi=\pi/2$ とおいて $A_n(\pi/2)$ を求めたとき、 n が大きくなると数値計算の誤差が急速に増してくる。有効数字 10 桁の計算では、 $n=8$ で D_n の値の誤差が真値の数十倍に達した。

正しい第 1 表の数値を用いて、前速報の (19), (20) 式に代わる近似式を $n=11$ までとって示すとつぎのようになる。

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} \cos 2\pi(y-y_1) d\theta \doteq \frac{2A}{\pi} \left[4 \left(\frac{2C}{\pi} \right) - 3.12949438 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^3 + 0.80388672 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^5 - 0.10269292 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^7 + 0.00785121 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^9 - 0.00039961 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^{11} \right] \quad (3)$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} \sin 2\pi(y-y_1) d\theta \doteq \frac{2A}{\pi} \left[2 - 4.26079121 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^2 + 1.76059768 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^4 - 0.30910526 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^6 + 0.03004087 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^8 - 0.00185448 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^{10} \right] \quad (4)$$

もっとも、新しく (3), (4) を近似式として用い、前速報第 2 表と同じ定数で計算した結果は同表と一致した。

終わりに本計算に使用した Adaptive Integration の Subroutine を提供いただいた本所 渡辺教授に感謝の意を表する。
(1963 年 11 月 7 日受理)

文 献

1) 鳥飼：生産研究 15, 10, 421 (1963)