

バックラッシュのある制御系の数学的取扱いと補償対策

藤 堂 勇 雄

制御系に期待する要求が高度になるにつれて、系に存する従来無視していたような非線形要素の存在が問題になり、それに対する解析法および、それが制御系に悪影響を及ぼすことがわかったら、その補償対策が必要となってくる。制御系にとって有害な非線形要素はたくさんあるが、中でもしばしば直面する非線形要素であるバックラッシュを例に上げて、これがいかに数学的に取り扱われ、どのような補償方法があるかを解説する。

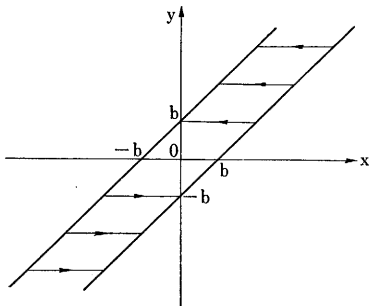
1. はし が き

いかなる制御系でも大なり小なりの非線形要素が存在している。リレー要素などのように非線形特性を積極的に利用していることもあるが、制御系にとって具合の悪い非線形要素も多いのである。制御系に期待する要求が高度になると、これらの具合の悪い非線形要素の存在が問題となり、これに対して各種の数学的取扱いがなされ、補償対策が考えられている。具合の悪い非線形要素の代表的な例としては、Zero-Memory 形非線形要素では、不感帯、飽和要素（もちろん、積極的に利用していることもある）があり、Memory 形非線形要素では、バックラッシュ（ヒステリシスと呼ばれることもあるが、ヒステリシスの方が意味が広い）がある。一般の非線形要素について述べるのは限られた紙面では不可能と思われる。とりわけ数学的取扱いが困難であり、しばしば問題となるバックラッシュを例に上げて、これがいかに数学的に取り扱われ、どんな補償対策が講じられているかを文献を紹介しながら解説してみよう。

バックラッシュはサーボ系で、モータ軸とを連絡する歯車に存在するほか、摩擦（クーロン摩擦および静止摩擦）や慣性などによっても生ずる。

2. 数学的取扱い

非線形制御系を解析する方法は大別して、位相面ないしは位相空間を用いる図式的方法と数式による解析的方法がある。記述関数法 (Describing Function Method) および Kryloff-Bogoliuboff の方法は、後者に属する。



第1図 バックラッシュ特性

うのはきわめて困難である。バックラッシュは第1図に示すように

$$\begin{cases} y = x - b \cdot \dot{y} / |\dot{y}| & (0 < |\dot{y}|) \\ \dot{y} = 0 & (|y - x| < b) \end{cases} \quad (1)$$

で表わされる特性をもっているものとして話を進めよう。

(1) 記述関数法

非線形要素への入力信号として $A \sin \omega t$ なる正弦波が印加したときの出力信号の基本調波を

$$F(A, \omega) \sin(\omega t + \phi(A, \omega)) \quad (2)$$

とすると、非線形要素に対する記述関数は

$$\left| \frac{F(A, \omega)}{A} \right| \angle \phi(A, \omega) \quad (3)$$

で与えられる。すなわち、出力信号 $y(t)$ は一般に

$$\begin{aligned} y(t) = & A_0/2 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + A_2 \cos 2\omega t \\ & + B_2 \sin 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t \\ & + B_3 \sin 3\omega t + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

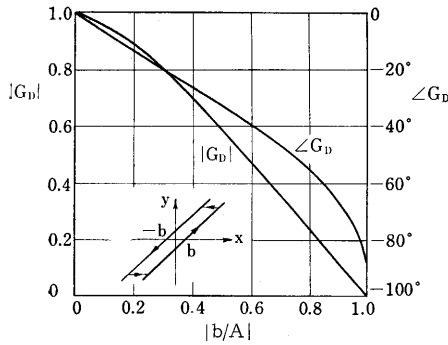
のようなフーリエ級数に展開でき、入力信号と同じ基本周期をもつ高調波を含んだものとなるが、その高調波の振幅は基本調波のそれとくらべると比較的小さいので無視し、基本調波 $\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \angle \tan^{-1}(A_1/B_1)$ のみに着目しようというのである。これによって線形制御理論における周波数伝達関数と類似の取扱いができる。

L. C. Goldfarb¹⁾ は 1947 年にバックラッシュのある制御系を記述関数法によって解析している。その後、N. B. Nichols²⁾, H. D. Greif³⁾, C. H. Thomas⁴⁾, K. N. Satyendra⁵⁾ らによっても行なわれた。

第1図に示すバックラッシュの記述関数は、つぎのとおりである。

$$\begin{aligned} G_D(R) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(1-2R) \right]^2 + 4R(1-R) \right. \\ & \left. + [\pi + 2 \sin^{-1}(1-2R)] 2R(1-2R) \sqrt{\frac{1-R}{R}} \right\}^{1/2} \\ & \angle \tan^{-1} \frac{4R(R-1)}{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(1-2R) + 2R(1-2R) \sqrt{\frac{1-R}{R}}} \end{aligned} \quad (5)$$

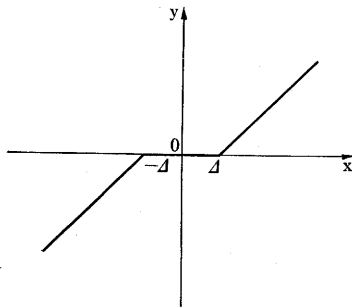
ただし、 $R \triangleq |b/A|$ 、 A は入力信号の振幅である。この関係を図示すると第2図になる。入力振幅が小さくなるにしたがって、位相遅れ $\angle G_D$ が大きくなるのがこれからわかる。



第 2 図 バックラッシュの記述関数

R. Sridhar⁶⁾ は非線形要素を断片的線形非線形要素 (Piecewise Linear Type Nonlinearity) と多項式形非線形要素 (Polynomial Type Nonlinearity) とに大別して、記述関数表を作成し、前者の中では複雑な形をしたバックラッシュも扱っている。

実際の制御系ではバックラッシュ単独で存在する場合もあるが、別の非線形要素もまた同時に存在する場合がある。このようなとき、これらを合成し一つの非線形要素で置き換えるのが可能なこともある。A. D. Gronner⁷⁾



第 3 図 不感帯

は第 1 図のバックラッシュと第 3 図の不感帯とがカスケードにある場合に、これらを合成して記述関数を誘導し b/Δ をパラメータにして数表を作成した。

さらに、バックラッシュと不感帯とのそれぞれの記述関数の相乗積で記述関数を近似的に算出し前者との誤差を検討している。丸橋⁸⁾ はバックラッシュと飽和要素とがある場合に、これを一つの非線形要素とみて記述関数を算出し、サーボ系の解析を行なっている。

非線形要素が複雑になると、記述関数を式で表わすのもたいへんな上、数値計算はさらにやっかいなことが多い。記述関数の図式算法が種々考案されている。もっとも、バックラッシュなどでは、一度なんらかの方法で計算して数表でも作っておけば十分用がたりだが、以下紹介する二つの方法は、非線形要素と記述関数との関係をやや定性的につかむのに、なんらかの助けになるものと思われる。得られた数値の精度はあまり期待できないのはもちろんであるが、妙な非線形要素に直面したとき、その記述関数を容易に略算できよう。

B. L. Deekshatulu の提案した方法⁹⁾ は一般の非線形要素の記述関数を算出するのに適用できるが、ここではバックラッシュについてのみ考えよう。これは正弦波入

力に対する非線形要素の出力波形を求めなくとも、非線形要素の形状から直接に記述関数を求めようとする方法である。非線形要素を $y=f(x)$ とし、入力信号を $x=A \sin \theta$ とおくと、出力信号は $F(\theta)=f(A \sin \theta)$ となる。そこで、これをフーリエ級数に展開すると (4) 式で $\omega t=\theta$ とおいた式になり、基本調波成分の係数は

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos \theta d\theta \\ B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

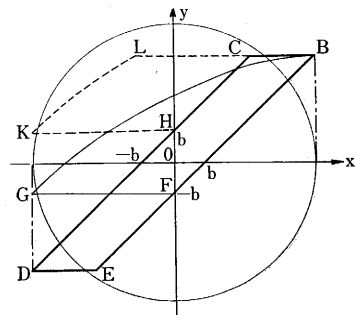
で与えられる。(6) 式はそれぞれ次式のように変形される。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi A} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^A f(x) dx + \int_A^0 f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-A} f(x) dx + \int_{-A}^0 f(x) dx \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^A f(x) \cdot \frac{xdx}{\sqrt{A^2-x^2}} + \int_A^0 f(x) \cdot \frac{xdx}{\sqrt{A^2-x^2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-A} f(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} + \int_{-A}^0 f(x) \cdot \frac{xdx}{\sqrt{A^2-x^2}} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi A} \left\{ - \left[f(x) \sqrt{A^2-x^2} \right]_0^A + \int_0^A f'(x) \sqrt{A^2-x^2} dx \right. \\ &\quad - \left[f(x) \sqrt{A^2-x^2} \right]_A^0 + \int_A^0 f'(x) \sqrt{A^2-x^2} dx \\ &\quad - \left[f(x) \sqrt{A^2-x^2} \right]_0^{-A} + \int_0^{-A} f'(x) \sqrt{A^2-x^2} dx \\ &\quad \left. - \left[f(x) \sqrt{A^2-x^2} \right]_{-A}^0 + \int_{-A}^0 f'(x) \sqrt{A^2-x^2} dx \right\} \quad (8)' \end{aligned}$$

非線形要素 $y=f(x)$ が第 4 図の BCDE に示すバック



第 4 図 記述関数の Deekshatulu による図式法

ラッシュのときには、(7)、(8)' 式はそれぞれ次式のようになる。

$$A_1 = \frac{1}{\pi A} (\text{面積 BCDE}) \quad (8)''$$

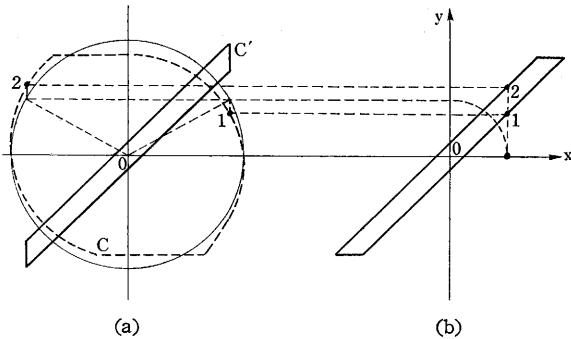
$$B_1 = \frac{1}{\pi A} \left[-\left(\frac{b}{A}\right) + \int_F^B \sqrt{A^2 - x^2} dy - \left(\frac{b}{A}\right) + \int_B^H \sqrt{A^2 - x^2} dy - \left(-\frac{b}{A}\right) + \int_H^D \sqrt{A^2 - x^2} dy - \left(-\frac{b}{A}\right) + \int_D^F \sqrt{A^2 - x^2} dy \right]$$

$$= \frac{1}{\pi A} \left[2 \int_F^B \sqrt{A^2 - x^2} dy + 2 \int_B^H \sqrt{A^2 - x^2} dy \right] \quad (9)''$$

$$= \frac{1}{\pi A} (\text{面積 FGB} + \text{面積 BCLKH}) \quad (9)'''$$

したがって、BCDE, FGB, BCLKH の面積を求めれば (8)'', (9)''' 式から A_1, B_1 が求まり記述関数 $(\sqrt{A_1^2 + B_1^2} / A) \tan^{-1}(A_1/B_1)$ が算出できるわけである。

つぎに、Y. H. Ku と C. F. Chen による方法¹⁰⁾ を述べる。これは、B. L. Deekshatulu のものと比較すると興味深い点がある。第5図 (b) はバックラッシュの入出力関係を表わしており、入力信号としては説明の便宜



第5図 記述関数の Ku-Chen による図式法

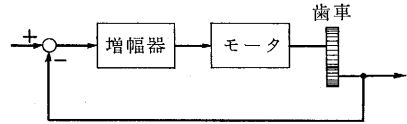
上、振幅1の正弦波を考える。(これは第5図 (a) の単位円で表わしてある)。図示したような作図をすると、C, C' の面積はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos \theta d\theta \\ b_1 &= \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

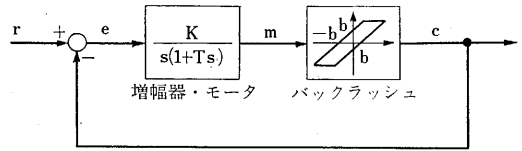
を表わし、 a_1, b_1 は B. L. Deekshatulu による方法の A_1, B_1 に対応する。

さて、第6図に示すような、増幅器、サーボ・モータ、歯車からなる制御系を考え、これに記述関数を適用して自励振動の存在を調べてみよう¹¹⁾。第7図はこの制御系のブロック線図である。サーボモータの伝達関数を

$$G(s) = \frac{5}{s(1+s)} \quad (11)$$



第6図 バックラッシュのあるサーボ系



第7図 第6図のサーボ系のブロック線図

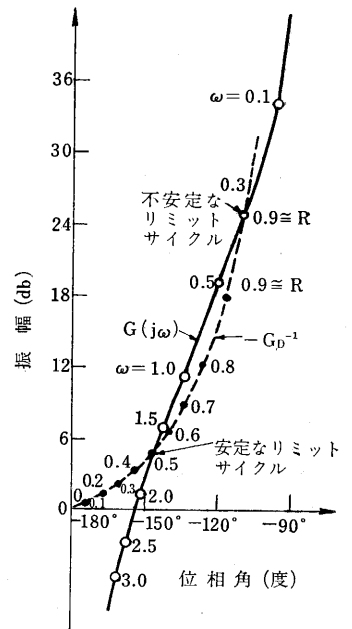
とし、バックラッシュの記述関数 G_D は (5) 式で表わされるものとする。この系の特性方程式は

$$1 + G_D \cdot G(j\omega) = 0 \quad (12)$$

$$\text{すなわち、} G(j\omega) = -G_D^{-1} \quad (13)$$

である。 $G(j\omega)$ と $-G_D^{-1}$ をそれぞれ第8図のように

ニコルズ線図にプロットするとき、これらの二曲線の交点が、リミット・サイクルの存在する条件をみたしている。この例では、二つの交点があり、一つは安定なリミット・サイクル ($\omega=1.5, R=0.5$)、あとの一つは不安定なリミット・サイクルである。図からわかるように、ループ・ゲインを下げると交点はなくなくなるが、リミット・サイクルが存在しないとはいえない。これは、記述関数を誘導するときに無視した高調波がリミット・サイクルを生ずる原因になるかもしれないからである。



第8図 第7図の制御系の記述関数による解析

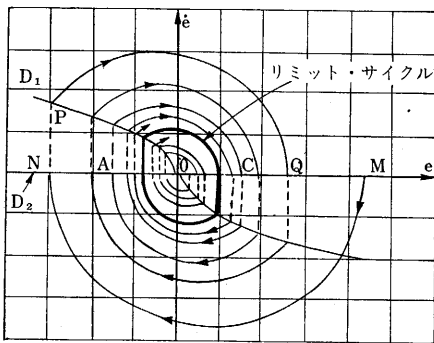
記述関数法は入力信号のない制御系 (オートノーム系) に生ずる自励振動の振幅と周波数を求めるのには、有効な方法であるが、正弦波のような入力信号をうける制御系 (非オートノーム系) にまで拡張するのは一般には不可能である。また、安定化信号を制御系に加えて非線形制御系の信号安定化を行なう手法があるが、この解析にも従来の記述関数を用いることはできない。以上の

点から, Zero-Memory 形 の非線形要素に関して各種の記述関数が提案されている. たとえば, 2 入力記述関数 (Dual Input Describing Function, 略して DIDF) と もいうべきものが, J. C. West-V. L. Douce-R. K. Livesley¹²⁾, R. Oldenburger-R. C. Boyer¹³⁾, J. E. Gibson-R. Sridhar¹⁴⁾ らによって, それぞれ異なる形で提案されている. 今日のところ, ほとんど Zero-Memory 形非線形要素への適用のみ考えられているが, これらの記述関数はバックラッシュなどの Memory 形非線形要素へも拡張可能であると筆者は考えている.

(2) 位相面解析法

記述関数法が定常状態における制御系の解析をするのに対し, 位相面解析法は制御系の過渡応答をもとめるのに有効な方法といえる. これは, たとえば偏差信号 e についての微分方程式が与えられたとき, $e, \dot{e}, \dots, e^{(n)}$ の値を $(n+1)$ 次元空間座標に一つの点としてプロットし, 時間の経過とともに変化してゆく軌跡を描く方法である. ただし, この方法は 3 次形以上の制御系に対しては, もはや位相平面ではなく位相空間となり取扱いが困難となる.

再び, 第 7 図の制御系を例に上げて考えよう. ステップ入力に対する位相軌跡は第 9 図のようになる¹⁵⁾. 曲線 D_2 で二つの歯車が離れ, モータが逆転して再び曲線 D_1 で歯車がかみ合う. 図は大きなステップ入力に対しても, 小さなステップ入力に対してもある一つのリミット・サイクルを示している.



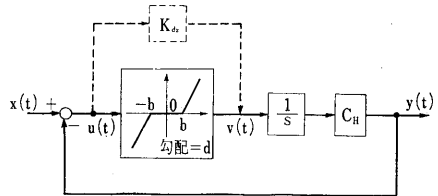
第 9 図 バックラッシュのあるサーボ系の位相面軌跡

(3) 統計的手法

(1) で述べた記述関数法による解析は非線形要素への入力信号として正弦波を考えているが, 実際には特定の入力信号のみでは不十分で, 入力信号の統計的性質を考慮し, 統計的手法を導入する必要がある場合がある. Zero-Memory 形非線形要素に対するこの理論体系は着々と確立しつつあると思われるが¹⁶⁾, 一方, Memory 形非線形要素に対しては, ほとんどといってよいくらい手がつけられていないのが現状である. これは, 統計的手法

の導入が必要であるにもかかわらず, 数学的取扱いの困難なことに起因している. H. R. Leland の論文¹⁷⁾ からバックラッシュのある制御系の相互相関関数を求める方法を紹介しよう. これは (1) の記述関数法のところで述べるべきであったかもしれない.

第 1 図に示すバックラッシュ特性をアナログ計算機で第 10 図のように不感帯, 積分器および増幅器により構



第 10 図 バックラッシュの等価変換

成することがある. 第 10 図において, 不感帯の入力信号を $u(t)$, 出力信号を $v(t)$ とすれば, $v(t)$ は不感帯の等価ゲイン K_{az} を用いて

$$v(t) = K_{azu}(t) + e_1(t) \tag{14}$$

と表わされる. ただし, $e_1(t)$ は不感帯を等価ゲイン K_{az} で表わしたときの誤差である. $e_1(t)$ の 2 乗は

$$e_1^2(t) = [g(u) - K_{az} \cdot u(t)]^2 \tag{15}$$

である. ただし

$$g(u) = \begin{cases} d(u-b) & (u > b) \\ 0 & (-b < u < b) \\ d(u+b) & (u < -b) \end{cases} \tag{16}$$

$u(t)$ が定常性を有し, エルゴード仮説が成立する不規則時間関数で, しかもその大きさがガウス分布をなすとき, これの一次元確率密度関数 $p_1(u)$ は, $u(t)$ の分散を β^2 とすると,

$$p_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta^2} e^{-u^2/2\beta^2} \tag{17}$$

で与えられる. $e_1(t)$ の 2 乗平均値

$$\begin{aligned} \langle e_1^2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(u) p_1(u) du - 2K_{az} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) u p_1(u) du \\ &\quad + K_{az}^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p_1(u) du \end{aligned} \tag{18}$$

が最小になるように K_{az} をきめる. すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle e_1^2(t) \rangle}{\partial K_{az}} &= 2K_{az}\beta^2 + 4db \int_b^{\infty} u p_1(u) du \\ &\quad - 4d \int_{-\infty}^b u^2 p_1(u) du = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

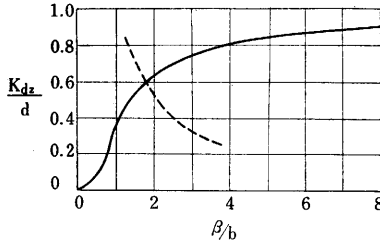
から, K_{az} は次式で与えられる.

$$K_{az} = d[1 - E_2(b/\sqrt{2}\beta^2)] \tag{20}$$

ただし, $E_2(\)$ は誤差関数である. (20) 式を用いて, K_{az} と β/b の関係を示すと第 11 図の実線になる. 第 10 図の伝達関数は

$$\frac{y}{x}(s) = \frac{K_{dz}C_H}{s + K_{dz}C_H} \quad (21)$$

で表わされるので、この関係を用いてバックラッシュのある制御系の入・出力信号間の相互相関関数(Cross-Correlation Function)を求めることができるわけである。\$K_{dz}\$ と \$C_H\$ をきめるには、まず \$C_H\$ を適当に選び不感帯への入力信号 \$u(t)\$ の2乗平均 \$\phi_{uu}(0)\$ を計算し、これも同時に第11図(破線で示してある)に記入し、\$K_{dz}\$ 曲線との交点から \$K_{dz}\$ を決定する。H. R. Leland は簡単な例についてアナログ計算機で検討を行ない、ほぼ一致することを確かめた。

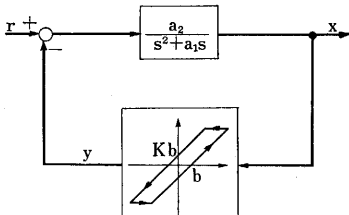


第11図 不感帯の等価ゲイン

(4) Kryloff-Bogoliuboff の方法

これはもっぱら非線形振動の解析に用いられた方法であり、前述した記述関数法のバックグラウンドとなっている。

L. M. Vallese^{18),19)} はバックラッシュのある制御系に Kryloff-Bogoliuboff の方法^{20),21)} を適用して時間領域で



第12図 バックラッシュのある制御系

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2y = a_2r(t) \quad (22)$$

となる。解析便宜上、バックラッシュの入・出力関係を

$$y = Kx + f(x) \quad (23)$$

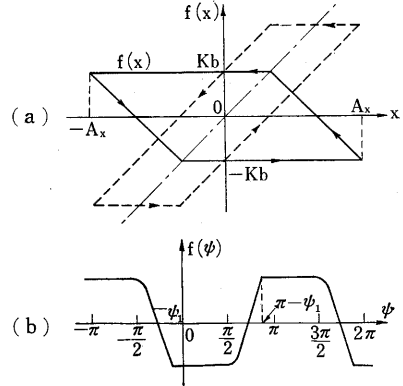
で表わそう。正弦波入力 \$x = A_x \sin \Omega t\$ に対しては

$$f(x) = \begin{cases} -Kb & (-\phi_1 \le \psi \le \pi/2) \\ K(A_x - b - x) & (\pi/2 \le \psi \le \pi - \phi_1) \\ Kb & (\pi - \phi_1 \le \psi \le 3\pi/2) \\ -K(A_x - b + x) & (3\pi/2 \le \psi \le 2\pi - \phi_1) \end{cases} \quad (24)$$

なる関係がある。ただし、\$\phi_1\$ は

$$\sin \phi_1 = 1 - 2b/A_x \quad (25)$$

を満足するものである(第13図(a)参照)。第13図(b)は \$\psi\$ と \$f(\psi)\$ との関係を示している。\$f(\psi)\$ は周期性があり、奇数次の周波数成分をもつフーリエ級数で表わ



第13図 \$f(x)\$ と \$f(\psi)\$ のグラフ

される。すなわち、\$f(\psi) = -f(\psi + \pi)\$ であるから、

$$f(\psi) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (f_n(A_x) \cos n\psi + g_n(A_x) \sin n\psi) \quad (26)$$

となる。(22)式は(23)式を用いると次式になる。

$$\ddot{x} + a_2Kx = -a_1\dot{x} - a_2f(x) \quad (27)$$

さて、ここで(27)式右辺の \$a_1\dot{x} + a_2f(x)\$ が小さいと仮定し、Kryloff-Bogoliuboff の方法の常道にしたがって

$$\left. \begin{aligned} x &= A_x(t) \sin(\omega t + \varphi(t)) = A_x \sin \psi \\ \dot{x} &= A_x \omega \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とおこう。\$A_x\$ および \$\psi\$ が時間とともにゆっくり変化するものとする、第一近似として、

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{-1}{2\pi\omega} \int_{-\phi_1}^{2\pi-\phi_1} [a_1\omega A_x \cos \psi + a_2f(A_x \sin \psi)] \cos \psi d\psi \quad (29)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \Omega = \omega + \frac{1}{2\pi\omega A_x} \int_{-\phi_1}^{2\pi-\phi_1} [a_1\omega A_x \cos \psi + a_2f(A_x \sin \psi)] \sin \psi d\psi \quad (30)$$

の両式を得る。これらに(24)式の関係代入し、簡単化すると

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{1}{2\pi\Omega A_x} [-\Omega a_1\pi A_x^2 + 4Ka_2b(A_x - b)] \quad (31)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{Ka_2}{4\pi\omega} (\sin 2\psi_1 + 2\psi_1 - \pi) \quad (32)$$

と変形できる。ただし、(31)式の \$\omega = \sqrt{Ka_2}\$ は \$\Omega\$ で置き換えてある。自動振動の存在を調べるために、\$dA_x/dt = 0\$ を解くと

$$\frac{A_x}{b} = \frac{2\rho}{\pi\Omega^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\pi\Omega^2}{\rho}} \right) \quad (31)'$$

$$\Omega^2 = \sqrt{\rho} \left(\frac{3}{4} + \frac{2\psi_1 + \sin 2\psi_1}{4\pi} \right) \quad (32)'$$

の関係が得られる。ただし、\$\rho = Ka_2/a_1^2\$、\$\Omega^2 = \Omega/\omega\$ である。この方法は、実際には \$A_x/b\$ の小さなところを解析するには適していない。

(5) Ritz-Garlerkin の方法

尾形と C. P. Atkinson²²⁾ はバックラッシュのあるサーボ系に生ずる自動振動の解析に Ritz-Garlerkin の方

法を適用した。解析例として、第 6 図のサーボ系（したがって、このブロック線図は第 7 図になる）を考えている。

$$F(\dot{m}, \dot{m}, m, t) = 0 \quad (33)$$

で表わされる系の方程式の解を

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t) \quad (34)$$

とすると、Ritz-Galerkin の方法は

$$\int_0^{2a} F(\dot{m}, \dot{m}, m, t) \sin n\omega t dt = 0 \quad (35)$$

$$\int_0^{2a} F(\dot{m}, \dot{m}, m, t) \cos n\omega t dt = 0 \quad (36)$$

の積分を計算するにある。ただし、 $a = \pi/\omega$ である。

さて、第 7 図のサーボ系を表わす方程式は

$$T\dot{m} + \dot{m} = Ke \quad (37)$$

ただし、 $e = r - c$

で与えられる。目標値 $r(t)$ を

$$r(t) = R \cos \omega t \quad (38)$$

とし、 ϕ をモータの位相遅れ角とすると、(35)、(36) 式に対応する式はそれぞれ

$$\int_{\phi/\omega}^{2a+\phi/\omega} [T\dot{m} + \dot{m} - KR \cos \omega t + Kc(t)] \sin \omega t dt = 0 \quad (39)$$

$$\int_{\phi/\omega}^{2a+\phi/\omega} [T\dot{m} + \dot{m} - KR \cos \omega t + Kc(t)] \cos \omega t dt = 0 \quad (40)$$

となる。自励振動が生じているときには、1 周期中になされる仕事は 0 である。すなわち、

$$\int_0^{2a} F(\dot{m}, m) dm = 0 \quad (41)$$

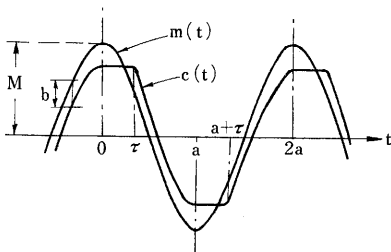
この式で、 $F(\dot{m}, m)$ は力に相当し、 dm は変位に相当している。(37) 式を用いると、(41) 式は

$$\int_0^{2a} [\dot{m} + Kc(t)] \sin \omega t dt = 0 \quad (42)$$

と書け、変形すると

$$\frac{\pi}{K} - \frac{4b}{\omega M} \left(1 - \frac{b}{M}\right) = 0 \quad (43)$$

になる。 $m(t)$ が自励振動の解ならば、 $m(t)$ は (43) 式と (40) 式で $R=0$ のおいた式とを満足すべきである。



第 14 図 $m(t)$ と $c(t)$ との関係

そこで、 $m(t) = M \cos \omega t$ と仮定すると、(40) 式は

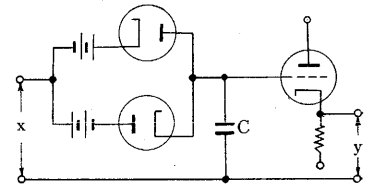
$$\left(1 - \frac{T\omega^2}{K}\right)\pi = \omega\tau - \frac{1}{2}\sin 2\omega\tau \quad (44)$$

$$\text{ただし、} \quad \omega\tau = \cos^{-1}(1 - 2b/M) \quad (45)$$

と変形できる (第 14 図参照)。(43) 式と (44) 式が自励振動の振幅と周波数を決定するものである。(39) 式を使用していないように思われるが、実は (39) 式は (42) 式と同一なのである。

(6) 計算機による方法

計算機により解析するのも一つの方法である。今日、デジタル計算機の活躍はめざましく、非線形制御系の過渡応答、自励振動の解析など従来数値計算がたいへんとされていた研究も容易に行なわれるようになった。一方、アナログ計算機による非線形制御系の解析も、今日では普通のこととなり、各種の非線形要素が計算機に内蔵されているが、バックラッシュに関してはあまり精度の高いものを期待できないように思われる。普通、バックラッシュは第



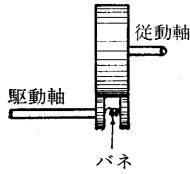
第 15 図 バックラッシュのアナログ回路

10 図あるいは第 15 図 (原理図) でシミュレートされる。すなわち、第 15 図では、入力信号が増加から減少へ、あるいは減少から増加へと移るときに、二極管の入力側と電圧保持コンデンサ側との電圧差による不感域の間だけ両方の二極管とも非導通になることを利用して、コンデンサ C に充放電を起こさせるようになってい。ところが出力波形がなまるため、保持コンデンサの容量を入力信号の周波数により調整しなければならず、周波数の変化するものや、不規則信号を入力信号として用いるときには、ひどく誤差が生ずるという欠点がある。第 10 図も、第 15 図の保持コンデンサのかわりに積分器を用いただけであって、同じことがいえる。

3. 補償対策

バックラッシュの補償対策としては、まずバックラッシュが存在する原因を考え、それをなくすることができないか検討するのが先決問題であることはいうまでもない。たとえば、サーボ系の歯車によって生ずるものに対しては、歯車なしですませる方法がないかを考えるのである。また、どうしても歯車が必要ならば、バックラッシュをできるだけ少なくするよう工夫すべきである。摩擦によって生ずるものならば、摩擦を少なくするように努力すべきである。初めの設計が不備のため、大きなバックラッシュが生じ、その補償対策として高級な制御装置をつけても無意味というものである。

(1) 機械的補償



第 16 図 機械的補償の一例

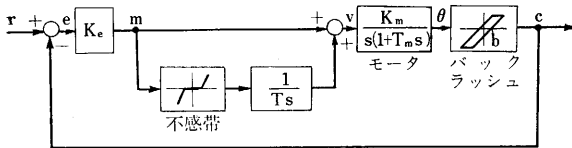
歯車によって生ずるバックラッシュを除去するのに、たとえば、第 16 図に示すように、駆動軸側に歯車を二つ用い中間にバネを介して従動軸側の歯車をしめつける方式がある。この外各種の機械的補償法が考えられているが²³⁾、が

いして摩擦の原因になるようである。

(2) 非線形補償

バックラッシュのある制御系に位相進み回路で補償するのが線形補償による唯一の方法であるが、これは微分動作を働かすことになるので好ましくない。そこで、バックラッシュに対して別の非線形要素を導入して制御系の安定化を行なう方法が考えられている。

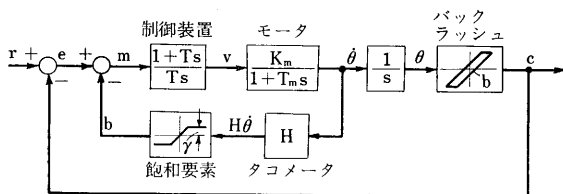
C. N. Shen-H. A. Miller-N. B. Nichols²⁴⁾ は第 17 図



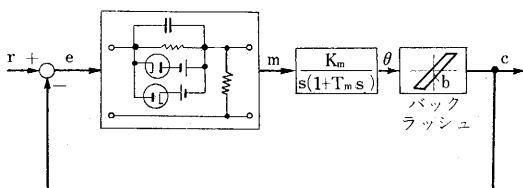
第 17 図 Shen-Miller-Nichols の制御系

に示すように、不感帯を導入し非線形積分補償を行なう方法を提案した。不感帯があるため、制御系 c にオフセットが生ずる。この点からすれば、不感帯はできるだけ小さく選ぶべきであるが、系の安定性を補償するだけの大きさは必要である。さらに、C. N. Shen²⁵⁾は上述の方法の欠点を改良し、第 18 図の制御系を考えた。サーボ・モータの速度信号 $\dot{\theta}$ を飽和要素を通してフィードバックしている。 γ/b を適切に選ぶ必要がある。

A. K. Mahalanabis²⁶⁾ は非線形な位相進み回路を用いた第 19 図の制御系を示している。以上のほかに、バックラッシュ $g(x)$ に対して、非線形要素 $x-g(x)$ を導



第 18 図 Shen の制御系



第 19 図 非線形の位相進み回路を用いた制御系

入する方法が D. Schulkind²⁷⁾ および筆者²⁸⁾ によって、それぞれ異なった立場から検討されている。

4. あとがき

バックラッシュのある制御系が数学的にいかに取り扱われ、どのような補償対策が考えられているかを略述した。紙数の制限と能力の限界を顧みず間口を広げたため、単なるら列に終わってしまい、はなはだまとまりの悪いものになった。また、補償対策に関してはほとんど割愛した。非線形補償についても、でたために補償用に別の非線形要素を導入するのではなく、ある程度の規則性が見出される。安定化信号を用いて制御系の信号安定化をはかる方法も、摩擦などによって生ずるバックラッシュに対しては有効な方法と思われる。これに関して、筆者は若干の実験的検討を行なっているが、別の機会にゆずる。

おわりに、本文を草するに当たりご教示いただいた森政弘助教授にお礼申し上げる。(1963年9月11日受理)

参考文献

- 1) L. C. Goldfarb: On Some Nonlinear Phenomena in Regulatory Systems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 8, 5, pp. 349~383. Sept.~Oct. (1957) Reprinted in "Frequency Response," The Macmillan Company, New York, (1956)
- 2) N. B. Nichols: Backlash in a Velocity-Lag Servomechanism. *Trans. AIEE, (Appl. & Ind.)*, 72, pt II, pp. 462~467. (1953)
- 3) H. D. Greif: Describing function Method of Servomechanism Analysis Applied to Most Commonly Encountered Nonlinearities, *Trans. AIEE, (Appl. & Ind.)*, 72, pt II, pp. 243~248. Sept. (1953)
- 4) C. H. Thomas: Stability Characteristics of Closed Loop Systems with Dead Band, *Trans. ASME*, 76, p. 1365. (1954)
- 5) K. N. Satyendra: Describing Functions Representing the Effect of Inertia, Backlash, and Coulomb Friction on the Stability of an Automatic Control System, I, *Trans. AIEE, (Appl. & Ind.)*, 75, pt. II, pp. 243~249. Sept. (1956)
- 6) R. Sridhar: A General Method for Deriving the Describing Functions for a Certain Class of Nonlinearities, *Trans. IRE, AC-5*, 2, pp. 135~141. June (1960)
- 7) A. D. Gronner: The Describing Function of Backlash Followed by a Dead Zone, *Trans. AIEE, (Appl. & Ind.)*, 77, pt. II, pp. 403~409. Nov. (1958)
- 8) 丸橋, 久保, 井川: 飽和とバックラッシュを伴うサーボ系の解析, *電気学会雑誌*, 83, 892, pp. 11~18. Jan. (1963)
- 9) B. L. Deekshatulu: A Graphical Method of Evaluating the Describing Function, *Trans. AIEE (Appl. & Ind.)*, 61, pp. 101~106. July (1962)
- 10) Y. H. Ku, C. F. Chen: A New Method of Evaluating the Describing Function of Hysteresis-Type Nonlinearities, *Journal of Franklin Institute, Philadelphia, Pa.*, 273, 3, pp. 226~241. Mar. (1962)
- 11) G. J. Thaler, M. P. Pastel: *Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems*, McGraw-Hill p. 164. (1962)
- 12) J. C. West, J. L. Douce, R. K. Livesley: *The*

- Dual-Input Describing Function and Its Use in the Analysis of Nonlinear Feedback Systems. Proc. IEE, **103**, pt. B, pp. 463~474. (1956)
- 13) R. Oldenburger, R.C. Boyer: Effects of Extra Sinusoidal Inputs to Nonlinear Systems, Trans. ASME, **84**, 4, pp. 559~570. Dec. (1962)
- 14) J.E. Gibson, R. Sridhar: A New Dual-Input Describing Function and an Application to the Stability of Forced Nonlinear Systems, IEEE Trans. on Appl. & Ind. **66**, pp. 65~70. May (1963)
- 15) M.P. Pastel, G.J. Thaler: Instrument Servomechanisms with Backlash, Coulomb Friction, and Stiction, Trans. AIEE (Appl. & Ind.), **49**, pp. 215~219. July, (1960)
- 16) たとえば, 榎木: 統計学的非線形制御理論の展望, 機械学会誌, **65**, 530, pp. 309~318. Mar. (1963)
- 17) H.R. Leland: Input-Output Cross-Correlation Functions for Some Memory-Type Nonlinear Systems with Gaussian Inputs, Trans. AIEE (Appl. & Ind.), **49**, pp. 219~223. July (1960)
- 18) L.M. Vallese: Analysis of Backlash in Feedback Control Systems With One Degree of Freedom, Trans. AIEE (Appl. & Ind.), **74**, pp. 1~4. Mar. (1955)
- 19) L.M. Vallese: Comparison of Backlash and Hysteresis Effects in Second-Order Feedback Systems, Trans. AIEE (Appl. & Ind.), **75**, pp. 240~243. Sept. (1956)
- 20) N. Minorsky: Introduction to Nonlinear Mechanics, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1949)
- 21) J.E. Gibson: Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill, pp. 203~205. (1963)
- 22) K. Ogata, C.P. Atkinson: An Analysis of a Servomechanism with Backlash by the Ritz-Galerkin Method, Trans. AIEE (Appl. & Ind.), pp. 82~85. May (1958)
- 23) D.C. McDonald: Backlash Compensation Improve Servo-System Operation, Instruments and Automation, **28**, 10, pp. 1728~1731. Oct. (1955)
- 24) C.N. Shen, H.A. Miller, N.B. Nichols: Nonlinear Integral Compensation of a Velocity-Lag Servomechanism With Backlash, Trans. ASME, **79**, pp. 585~592. (1957)
- 25) C.N. Shen: Synthesis of Compensating Servomechanism with Backlash by Incorporating Nonlinear Saturable Velocity Feedback, Automatic and Remote Control, IFAC. (Moscow) **1**, pp. 178~183. (1960)
- 26) A.K. Mahalanabis: On Stabilization of Feedback Systems Affected by Hysteresis Nonlinearities, Trans. AIEE (Appl. & Ind.), **57**, pp. 277~285. Nov. (1961)
- 27) D.Schulkind: Accuracy Requirements of Nonlinear Compensation for Backlash, IRE Trans. on AC. pp. 79~85. June, (1960)
- 28) 筆者: バックラッシュのある制御系の補償法, 第6回自動制御連合講演会 (前刷) pp. 45~46. (1963)

東京大学生産技術研究所報告予告

第 13 卷 第 3 号 山下 忠・森 政 弘 著

Engineering Approaches to Function of Fingers

「指の機能の工学的研究」

制御工学は相当進歩してきているが, 手足にあたる操作部の研究, 発達が遅れているのが現状である. このことは制御工学の今後の飛躍に対して一つの障壁となっているので, 新しい操作部の研究, 開発が望まれている. この操作部の比類のない手本として考えられるのが人間の手であり, とくにその中で大切なのは指であり, 人間の指の機能を明らかにするのが, まず必要である. 一方, 手は人間にとって不可欠の器官であり, いままでに医学, 生理学などの分野で研究が行なわれてはいるが, 手の機能と構造とが十分に関連づけて研究されているとはいえない.

本報告では操作要素としての指の機能を調べ, また指のもつ各種の機能を実現させるにはどのような構造にする必要があるかという工学的観点より研究している. さらに, 新しい人工の指を試作し, 高度の機能をもつ指の実現可能性をも示した. おもな内容は以下のとおりである. 指の機能の解析法として筆者らはいままでに例をみない定量的評価法を創案し, 指の機能を, 指の本数およびその配置, 合計自由度数および各指への自由度の分配法より解析し, 指の機能を明らかにするとともに人工の指を設計するための基礎資料を得た. この筆者らの理論は複雑, 多様な仕事を行なっている指の機能を対象物に与える運動の次元の多様で一律に評価するものであり, 情報理論での情報量の計量の仕方にも本質的なところで類似した考えにとづいて創られているといえる. また, 手の構造と機能との関係を求める他の一つの方法として, 手にできるこの発生場所に注目して手の使用状況を統計的に調べた. 新しい人工の指として, 1本に3つの自由度がある指3本よりなる装置を試作した. この指は簡単な感覚機能をもち, 機械による制御が可能であり, もちかえるなどの高級な仕事を自動的に行なうことができる. しかし, このための制御回路は相当複雑であり, 人間の手の優秀性は格段なものであることを裏書きしているともいえる.

(1963年11月発行予定)