

近距離音場の近似計算

Approximate Calculations on the Near Field Produced by a Circular Piston-like Source

鳥 飼 安 生

無限にひろがったバツフル内の円形ピストン音源により、一様で吸収のない流体中に生ずる音場はよく知られた Rayleigh¹⁾の式によって与えられ、音圧分布はつぎのようになる。

$$p = \frac{i\sigma c w_0 e^{i\omega t}}{A} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF \quad (1)$$

ただし、 p は観察点 P における音圧、 σ は媒体の密度、 c は音速、 w_0 は音源の速度振幅、 A は音波の波長、 $\omega = 2\pi f$ で f は周波数、 $k = 2\pi/\lambda$ 、 dF は音源表面の面積素片、 r は P と dF との距離で、積分は音源の表面全部にわたっておこなわれる。

(1) 式の解はすでに Stenzel²⁾、King³⁾等によって与えられているが、複雑な関数が用いられているため具体的な数値計算は非常に厄介で、従来わずかに音源の大きさと波長とが同程度のものについてのみ結果が得られているにすぎない。

円孔による光の回折を扱った Lommel⁴⁾の計算は、現在の問題において、音源の半径を a 、観察点 P と音源平面との距離を z 、中心軸との距離を x としたとき、 $z \gg a$ 、 $z \gg x$ の場合に適用できて、その結果 (1) 式はつぎのようになる (以下 $x \leq a$ の場合のみ考える)。

$$p = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - e^{-\frac{kz^2 + x^2}{2z}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a} \right)^n J_n \left(\frac{kax}{z} \right) \right] \quad (2)$$

$$(2) \text{式でさらに } X = kax/z, \quad Y = x/a, \quad Z = \left(\frac{z}{a} \right) \left(\frac{a}{\lambda} \right)$$

$= 2\pi Y/X$ とおくと、

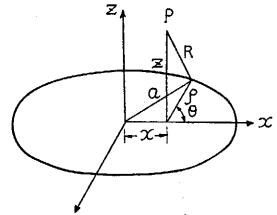
$$p = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - e^{-\frac{X}{2} \left(Y + \frac{1}{Y} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} (iY)^n J_n(X) \right] \\ = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - e^{-\frac{\pi}{Z} (1+Y^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (iY)^n J_n \left(2\pi \frac{Y}{Z} \right) \right] \quad (3)$$

となり、任意の音源について $Z = \text{const}$ の平面を考えたとき、その音源の a/λ の値いかにかわらず、その面上の音圧分布はすべて互いに相似となるという簡単な関係が得られる。

筆者は X 、 Y あるいは Z の値を種々に変えて (3) 式の括弧内の値を電子計算機を用いて計算し、Lommel の仮定 ($z \gg a$) の成立する場合の音場の模様を、くわしく知ることを得たが⁵⁾、 $z \gg a$ の仮定が成立しない場合には上の結果からずれてきて、 $Z = \text{const}$ においても a/λ

の値によって音圧分布に相違を生ずる。以下この場合の近似計算について述べる。

第 1 図のように P より音源に下した垂線の足を、原点とする円筒座標 (ρ, θ, z) であらわしたとき、Schoch⁶⁾によると Rayleigh の面積分は、つぎの線積分であらわされる。



第 1 図

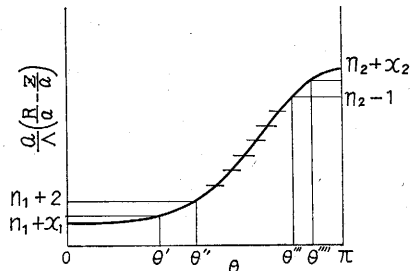
$$p = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik(R-r)} d\theta \right] \quad (4)$$

ただし、 R は P から音源の周辺にいたる距離で θ の関数である。

(4) 式右辺の括弧内を I としたとき、

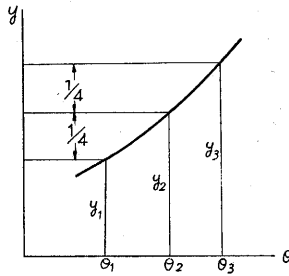
$$I = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{R}{a} - \frac{z}{a} \right) d\theta \\ + i \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{R}{a} - \frac{z}{a} \right) d\theta \quad (5)$$

と導かれ、かつ第 1 図の関係から R/a は z/a 、 x/a 、 θ の関数としてあらわせるので、けっきょく I は a/λ 、 z/a 、 x/a の関数となる。



第 2 図

$a/\lambda (R/a - z/a)$ の値を θ の関数としてあらわすと、一般に第 2 図に例を示したような形をしている。図のようにその値が整数値をとる点で区切り、その各区间について数値積分法を適用することにより I を求めることができるが、 $a \gg \lambda$ となるとその区間数が x/a の値の増加とともに増大して、計算に膨大な時間を必要とするに至る。そこで第 2 図の曲線の形に注目すると、これを整数値をとる点で区切った場合、各区間内の曲線の形は $\theta = 0$ および π 付近を除き直線に近いので、この区間の



第 3 図

対する近似法を適用する
ことができる。

積分に対して以下述べる
ような近似法を適用する
ことができる。

第 3 図に示すように、
直線に近い曲線 y が θ
の関数であるとし、その
大きさが互いに $1/4$ ずつ
隔った値 y_1, y_2, y_3 に
対応する θ の値が $\theta_1,$

θ_2, θ_3 であるとしたとき、積分

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} \frac{\cos 2\pi y}{\sin 2\pi y} d\theta$$

に対する近似式を求めるものとする。ここでさらに y_1
が整数かまたは半整数 (整数 $+1/2$) であるとする、

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} \frac{\cos 2\pi y}{\sin 2\pi y} d\theta = \pm \int_{\theta_1}^{\theta_3} \frac{\cos 2\pi(y-y_1)}{\sin 2\pi(y-y_1)} d\theta \quad (6)$$

となるので、左辺の代わりに右辺の積分について計算を
行なえばよい。

第 3 図の y を二次曲線で近似すると

$$y = y_1 \frac{(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)}{(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3)} + y_2 \frac{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_3)}{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_3)} + y_3 \frac{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)}{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)} = y_1 + \frac{1}{4(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)} \times [(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3)\theta^2 + (\theta_1^2 + \theta_3^2 - 2\theta_2^2)\theta + \theta_1^2(\theta_1 + \theta_3 - 2\theta_2) + \theta_1(2\theta_2^2 - \theta_1^2 - \theta_3^2)] \quad (7)$$

となる。

$\theta_2 - \theta_1 = \Delta + \varepsilon, \theta_3 - \theta_2 = \Delta - \varepsilon$ とおくと

$$\Delta = \frac{\theta_3 - \theta_1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3}{2} \quad (8)$$

となり、曲線の形が直線に近いときは $\varepsilon/\Delta \ll 1$ となる。

$\theta - \theta_1 = \xi$ において座標を変換し、(8) を用いて(7)

を書き直すと、

$$y - y_1 = \frac{1}{4\Delta(\Delta^2 - \varepsilon^2)} [\varepsilon\xi^2 + (\Delta^2 - \varepsilon^2 - 2\Delta\xi)\xi] = \frac{1}{4\Delta}\xi + \frac{\xi}{4}\left(\frac{\xi}{\Delta^2} - \frac{2}{\Delta}\right)\frac{\varepsilon/\Delta}{1 - (\varepsilon/\Delta)^2} = A + B\xi \quad (9)$$

ただし、

$$A \equiv \frac{C}{2\Delta} \left(\frac{1}{2\Delta}\xi^2 - \xi\right), \quad C \equiv \frac{\varepsilon/\Delta}{1 - (\varepsilon/\Delta)^2}, \quad B \equiv \frac{1}{4\Delta}.$$

$$\cos 2\pi(y - y_1) = \cos 2\pi A \cos 2\pi B\xi - \sin 2\pi A \sin 2\pi B\xi$$

$$\sin 2\pi(y - y_1) = \sin 2\pi A \cos 2\pi B\xi + \cos 2\pi A \sin 2\pi B\xi$$

であり、 A は微小量となるので $\cos 2\pi A, \sin 2\pi A$ は $2\pi A$ で展開されるとすると、求める積分はつぎの形の積分の組合せとなる。

$$\int_0^{2\Delta} (2\pi A)^n \frac{\cos 2\pi B\xi d\xi}{\sin 2\pi B\xi d\xi} \quad (10)$$

$\xi = \eta/2\pi B = \frac{2\Delta}{\pi} \cdot \eta$ および $\eta - \pi/2 = \zeta$ に従って順次に
変数変換を行なうことにより、(10)の積分はそれぞれつぎのようになる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\Delta} (2\pi A)^n \cos 2\pi B\xi d\xi \\ &= \left(\frac{2\pi C}{2\Delta}\right)^n \int_0^{2\Delta} \left(\frac{1}{2\Delta}\xi^2 - \xi\right)^n \cos 2\pi B\xi d\xi \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left(\frac{2C}{\pi}\right)^n \int_0^\pi \eta^n (\eta - \pi)^n \cos \eta d\eta \\ &= -\frac{2\Delta}{\pi} \left(\frac{2C}{\pi}\right)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\zeta^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^n \sin \zeta d\zeta \\ &= 0 \\ & \int_0^{2\Delta} (2\pi A)^n \sin 2\pi B\xi d\xi \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left(\frac{2C}{\pi}\right)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\zeta^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^n \cos \zeta d\zeta \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left(\frac{2C}{\pi}\right)^n D_n \end{aligned} \quad (11)$$

ただし

$$D_n \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\zeta^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^n \cos \zeta d\zeta \quad (12)$$

D_n を用いると求める積分はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_3} \cos 2\pi(y - y_1) d\theta &= -\int_0^{2\Delta} \sin 2\pi A \sin 2\pi B\xi d\xi \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left[-\frac{2C}{\pi} D_1 + \left(\frac{2C}{\pi}\right)^3 \frac{D_3}{3!} - \left(\frac{2C}{\pi}\right)^5 \frac{D_5}{5!} + \dots \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_3} \sin 2\pi(y - y_1) d\theta &= \int_0^{2\Delta} \cos 2\pi A \sin 2\pi B\xi d\xi \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left[D_0 - \left(\frac{2C}{\pi}\right)^2 \frac{D_2}{2!} + \left(\frac{2C}{\pi}\right)^4 \frac{D_4}{4!} - \left(\frac{2C}{\pi}\right)^6 \frac{D_6}{6!} + \dots \right] \end{aligned} \quad (14)$$

ここで D_n の計算であるが、まずつぎの定積分は容易に計算される。

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \zeta^{2n} \cos \zeta d\zeta = 2A_n \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (15)$$

ただし

$$A_n(\xi) \equiv \xi^{2n} - 2n(2n-1)\xi^{2n-2} + \dots + (-1)^n(2n)! \quad (16)$$

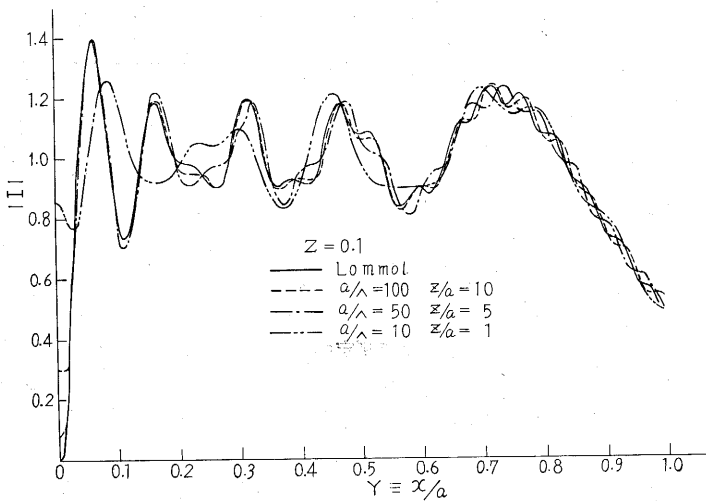
つぎに二項定理により、

第 1 表

n	D_n	$D_n/n!$
0	2	2
1	-4	-4
2	8.521582374	4.260791187
3	-18.77696585	-3.129494308
4	42.25434690	1.1760597788
5	-96.45554708	-0.8037962257
6	221.7386806	0.3079703897
7	-436.2060828	-0.08654882595

$$\left[\xi^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right]^n = {}_n C_0 \xi^{2n} - {}_n C_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \xi^{2(n-1)} + \dots + (-1)^n {}_n C_n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n} \quad (17)$$

(16) と (17) とを組み合わせることにより D_n はつき



第 4 図

のように求められる。

$$D_n = 2 \left[{}_n C_0 A_n \left(\frac{\pi}{2} \right) - {}_n C_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 A_{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \dots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n} \right] \quad (18)$$

電子計算機を用いて、 D_n および $D_n/n!$ を $n=0 \sim 7$ にわたって計算した結果は第 1 表のとおりである。第 1 表の数値を (13), (14) に代入するとつぎの近似式が得られる。

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos 2\pi(y-y_1) d\theta \doteq \frac{2A}{\pi} \left[4 \left(\frac{2C}{\pi} \right) - 3.129494 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^3 + 0.803796 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^5 - 0.0865488 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^7 \right] \quad (19)$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin 2\pi(y-y_1) d\theta \doteq \frac{2A}{\pi} \left[2 - 4.260791 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^2 + 1.760598 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^4 - 0.307970 \left(\frac{2C}{\pi} \right)^6 \right] \quad (20)$$

第 2 表

$Z=0.1, a/\Lambda=100, z/a=10$

x/a	$ I $ (全区域 Simpson)	$ I $ (近似式を含む)
0.35	0.932194	0.932194
0.36	0.892439	0.892438
0.37	0.893426	0.893420
0.38	0.911872	0.911868
0.39	0.927365	0.927364
0.40	0.930299	0.930300
0.41	0.923701	0.923703
0.42	0.925765	0.925768
0.43	0.961190	0.961191
0.44	1.035055	1.035056

積分 I の近似計算には、先に述べたような第 2 図の各区間の中、 $\theta=0$ から始まる 2 区間 (第 2 図 $\theta=0 \sim \theta''$) と $\theta=\pi$ に終わる 2 区間 (第 2 図 $\theta=\theta''' \sim \pi$) については、その直線からのずれが甚だしいため Simpson の積分公式を適用し、その間の各区間 (第 2 図 $\theta=\theta'' \sim \theta'''$) については近似式 (19), (20) を適用して計算を行なえばよい。

$Z=0.1, a/\Lambda=100, z/a=10, x/a=0.35 \sim 0.44$ の場合につき、積分の全区間に Simpson の公式を適用したときと、(19), (20) 式を適用した近似計算を含めた場合とで結果を比較すると第 2 表となる (Simpson 公式適用の場合の各区間の等分数は 40 等分)。計算期間は前者に比べて後者は数分の 1 ですむが、結果を比較してみると、小数点以下 6 桁目で最高 6 の差が生ずるのみで、(19), (20) はこの場合の積分の近似式

として満足すべきものといえることができる。

$Z=0.1$ において、 $a/\Lambda=100, 50, 10$ とかえた場合の計算結果を Lommel の式によるものと比較して第 4 図に示す。この場合 z/a はそれぞれ 10, 5, 1 となるが、図から $z/a \geq 10$ においては、Lommel の近似式が適用できることが示される。 (1963 年 8 月 7 日受理)

参考文献

- 1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound* (Dover Publ. New York, 1945) Vol. II, p. 107
- 2) H. Stenzel, *Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen* (Verlag. Julius Springer, Berlin, 1939) S. 67
- 3) L. V. King, *Can. J. Research* 11, p. 135 (1934)
- 4) E. Lommel, *Abh. der K. Bayer Akad. der Wissen.* 15, p. 233 (1886)
- 5) 計算結果は近く生研報告に報告の予定
- 6) A. Schoch, *Akust. Z.* 6, p. 318 (1941)