

## 2次元問題における調和曲線座標の応用について

佐 武 正 雄

境界値問題やベクトル・テンソル場の解析においては、問題に即応した適切な曲線座標を用いることが必要である。この観点から、2次元問題において便利に应用できる調和曲線座標の導入法や、それによる表現などについて述べ、一例として平板の問題に应用した。

### 1. ま え が き

工学において曲線座標の応用が重要であることはあらためて述べるまでもないが、その効用はだいたいつぎの2点にあると考えられる（以下、2次元の場合について述べる）。

#### 1) 境界条件の取扱いの単純化

境界をつくる曲線  $C$  が  $\dot{p}=a$  であらわされるような曲線座標  $\dot{p}(x, y) = \dot{C}(k=1, 2)$  を導入すれば、境界  $C$  上に与えられた量  $\Phi$  の値は  $\dot{p}$  だけの函数  $\Phi(a, \dot{p})$  となり、境界条件の取扱いを単純化することができる（むしろ、このようにしなければ、境界条件の取扱いは不可能な場合が多い）。さらに、量  $\Phi$  が境界曲線  $C$  と同一の方向性をもつような場合には、その成分の表現も同時に単純化されることになり、境界条件の取扱いは著しく簡易化されることになる。ここで注意すべきことは、境界曲線をただ一つ与えただけではそれを含む曲線群の数は無数に存在し、一意的に定められないことで、曲線群をただ一通りに定めるためにはさらに条件を付け加えることが必要である。（たとえば第2図に示すように、円板の問題でその円周を含む円群のとり方は無数にあるが、もう一つの境界曲線として集中荷重の作用点という特異点を与えることにより初めて円群が一意的に決定される）。

#### 2) ベクトル・テンソルの表現の単純化

ベクトル・テンソル場の解析においては、それらの量の0でない成分の数をできるだけ少なくすることが望ましい。ベクトル場  $\mathbf{v}$  において、自然標構  $\mathbf{e}_1$  が  $\mathbf{v}$  と同じ方向をもつような曲線座標を導入すれば、 $\mathbf{v}$  の反変成分は  $(v^1, 0)$  とかける。また、対称テンソル場  $\mathbf{T}$  において、自然標構  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  が  $\mathbf{T}$  の二つの固有ベクトルと同一方向となるような曲線座標を導入すれば、 $\mathbf{T}$  の反変成分は  $\begin{pmatrix} T^{11} & 0 \\ 0 & T^{22} \end{pmatrix}$  となる。このように適当な曲線座標を用いることにより、ベクトルやテンソルの表現を単純化し、取扱いを簡単に行うことができる（ただし、境界をもつベクトル・テンソル場の場合、2) によって導入した曲線座標が 1) で述べたような与えられた境界曲線を含む曲線座標と一致しているとは限らない）。

曲線座標の効用については上記のとおりであるが、2) の場合、これから述べる調和曲線座標を用いれば、その導入操作を系統的に行なうことができる。しかも 1), 2) いずれの場合でも、調和曲線座標によれば各種の表現が極めて単純化されるので、微分演算なども公式として与えることができ、非常に便利であると考えられる。

ここにいう調和曲線座標 (harmonic curvilinear coordinates) とは、一つの解析函数

$$p(z) = \dot{p}(x, y) + i\dot{p}^2(x, y) \quad (1.1)$$

の実部、虚部にあらわれる共役な二つの調和函数  $\dot{p}(x, y), \dot{p}^2(x, y)$  を用いて  $xy$  平面上に画くことのできる2組の互いに直交する曲線群

$$\dot{p}(x, y) = \dot{C}, \quad \dot{p}^2(x, y) = \dot{C}^2 \quad (1.2)$$

のつくる直交曲線座標のことを言い、 $p(z)$  をこの調和曲線座標の基函数という。

本文は、まず 2, 3 において、2次元のいろいろの場でつねに定めることのできる一つの標構に対し調和曲線座標がただ一通り設定されることを述べる。つぎに 4 では、調和曲線座標における微分演算などの表現を示し、5 は、平板問題への応用として調和曲線座標による平板諸量の表式などについて述べることにする。

### 2. 2次元の場における標構

平面内の一つの領域  $R$  が、ある量  $\Phi$  の場であるとき、 $R$  にまず一つの標構を導入する仕方について述べる。

#### 1) スカラー場

$R$  の各点  $(x, y)$  に一つの一価連続で  $R$  内で極値をとらないスカラー函数  $\varphi(x, y)$  の値が配置されているとき、 $C$  をパラメータとする曲線群

$$\varphi(x, y) = C \quad (2.1)$$

を考えれば、この曲線群は隙間なくしかも互いに交わることなく  $R$  をおおう。これはいわゆるスカラー場の等位線群で、1点を通る等位線はただ1本である。 $\varphi$  が微分可能で  $\partial_x \varphi, \partial_y \varphi$  も一価であれば、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x \varphi}{\partial_y \varphi}$  から、

1点における切線ベクトル  $\mathbf{t}$  が一意的に定まる。

$$\mathbf{t} \approx \left( \frac{\partial_y \varphi}{\sqrt{(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2}}, \frac{-\partial_x \varphi}{\sqrt{(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2}} \right)^* \quad (2.2)$$

また、法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial_x \varphi}{\sqrt{(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2}}, \frac{\partial_y \varphi}{\sqrt{(\partial_x \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2}} \right) \quad (2.3)$$

となる。このように一つのスカラー場に対し、その等位線群の切線、法線ベクトルとして各点に互いに直交する単位長のベクトルの組すなわち標構を与えることができる。これは等位線群の Frenet 標構と呼ばれるものである。微分演算子  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$  はベクトル的に取り扱うことができるので、

$$\mathbf{t} = -\frac{\widehat{\nabla} \varphi}{|\widehat{\nabla} \varphi|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \quad (2.4)$$

というように記すこともできる。 $\nabla \varphi$  は通常  $\varphi$  の gradient と呼ばれている。

$\varphi(x, y)$  の代わりに、 $\psi(x, y) = f(\varphi(x, y))$  とかけるような函数  $\psi(x, y)$  から出発しても、等位線群は個々の等位線についてパラメータが異なるだけで全体としては同一の曲線群である。

$$\nabla \psi = f' \nabla \varphi$$

であるから、当然

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= -\frac{\widehat{\nabla} \psi}{|\widehat{\nabla} \psi|} = -\frac{\widehat{\nabla} \varphi}{|\nabla \varphi|}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \end{aligned} \right\}$$

となり、同一の Frenet 標構を与える。

### 2) ベクトル場

領域  $R$  に一価連続で 0 とならないベクトル場  $\mathbf{v}$  が与えられているとする。ベクトル線（流線）の方程式は

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0 \quad (d\mathbf{r} \text{ は微小線素}) \quad (2.5)$$

で、ベクトル線は  $R$  を隙間なく互いに交わることなくおおう。脚註\*\*に述べたように、2次元の場合には一つのベクトル場  $\mathbf{v}$  に対してこれと直交するベクトル場  $\hat{\mathbf{v}}$  を一意的に定義することができ、そのベクトル線の方程式は

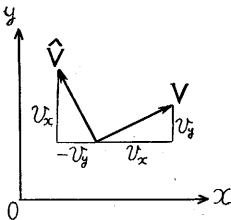
$$d\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{v}} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

である。いま

\* 記号  $\hat{\mathbf{v}}$  は、一つの基準デカルト座標に対するベクトルまたはテンソルの成分を示す。一般の成分の場合には共変、反変の区別もあるので別の表現を用いる。

\*\* 一つのベクトル  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  に対し  $\hat{\mathbf{v}} = (-v_y, v_x)$  と定義すれば、 $\hat{\mathbf{v}}$  もベクトルで、 $\mathbf{v}$  をちょうど  $\frac{\pi}{2}$  回転したものに相当する。

\*\*\*  $\text{tr} \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}$ ,  $|\mathbf{T}| = \frac{1}{2} \mathbf{T} \times \mathbf{T}$  で、これらはテンソル  $\mathbf{T}$  に付随して定まるスカラー量である。 $\mathbf{T} = (T_{ij})$  とすれば、 $\text{tr} \mathbf{T} = T_{11} + T_{22}$ ,  $|\mathbf{T}| = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}$  である。



$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \hat{\mathbf{i}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{|\mathbf{v}|} \quad (2.7)$$

とおけば、 $R$  に一つの標構が導入される。

$\mathbf{v}$  が無渦の場合、すなわち

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.8)$$

の場合には、 $\mathbf{v}$  は一つのスカラー函数  $\varphi$  の gradient として  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  とおくことができる。この場合、(2.6)式は積分可能で(2.1)式が得られる。 $\mu$  をスカラー係数として  $\mathbf{w} = \mu \mathbf{v}$  とおけば、ベクトル場  $\mathbf{w}$  も  $\mathbf{v}$  と同一の流線をもち、同一の標構を与える。一般のベクトル場において(2.8)式が成り立つとは限らないが、係数  $\mu$  を適当に定め  $\mathbf{w}$  について(2.8)式を満足させることは可能である。 $\mu$  は積分因数と呼ばれ、

$$\nabla \times (\mu \mathbf{v}) = 0$$

すなわち

$$(\nabla \log \mu) \times \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.9)$$

から求めることができる。しかし、一意的には定まらない。

### 3) テンソル場

$R$  に一価連続な対称テンソル場  $\mathbf{T}$  が与えられている場合、そのトレース  $\text{tr} \mathbf{T}$  を用いて

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{T}) \mathbf{E} \quad (2.10)$$

( $\mathbf{E}$  は単位テンソル)

と分解し、 $\mathbf{T}_0$  を  $\mathbf{T}$  の偏差テンソルと呼ぶ。 $R$  において  $\mathbf{T}_0$  は 0 にならないとする。 $\mathbf{T}$  のもつ方向性はすべて  $\mathbf{T}_0$  に起因し、 $\mathbf{T}$  の固有値を  $\lambda$  とすれば、

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{T} \pm \sqrt{-|\mathbf{T}_0|} \quad (2.11)$$

また、固有ベクトル（主軸の方向）を  $\mathbf{i}, \hat{\mathbf{i}}$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= \sqrt{-|\mathbf{T}_0|} (\hat{\mathbf{i}} - \mathbf{i}), \\ \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{i} \end{aligned} \right\}$$

から、

$$\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{T}_0}{\sqrt{-|\mathbf{T}_0|}} \right) \quad (2.12)$$

が得られる。いま、一つのデカルト座標によって

$$\mathbf{T}_0 = \sqrt{-|\mathbf{T}_0|} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

とおくならば、

$$\mathbf{i} = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.14)$$

とかくことができる。 $\mathbf{i}, \hat{\mathbf{i}}$  はテンソル場  $\mathbf{T}$  (本質的には  $\mathbf{T}_0$ ) に付随した標構で、各点における  $\mathbf{T}$  の主軸の方向を与えるものであるからテンソル場  $\mathbf{T}$  の主軸標構と称する。二つのテンソル場  $\mathbf{S}, \mathbf{T}$  において、スカラー係数  $\mu$  を用い  $\mathbf{S}_0 = \mu \mathbf{T}_0$  とかけるならば、両者は明らかに同一の主軸標構を与える。

### 3. 標構から定まる調和曲線座標

前節において、2次元の各種の場の一つの標構を導入したが、さらにこの標構に対し、一つの調和曲線座標を一意的に導入することができる。

いま、一つの標構  $\mathbf{i}, \hat{\mathbf{i}}$  が与えられているとする。  $\mu, \nu$  を積分因数として

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\mu} \nabla \dot{p}, \quad \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{\nu} \nabla \dot{p}^2$$

とおくことができるが、この表現は一意的ではない。しかし、もし同一の積分因数  $\mu$  をもつ場合、すなわち

$$\mu \hat{\mathbf{i}} = \nabla \dot{p} = -\widehat{\nabla} \dot{p}^2 \quad (3.1)$$

とかける場合には、この表現は一意的となる。(3.1)式は成分についてみれば、 $\dot{p}, \dot{p}^2$  に関する Cauchy-Riemann の方程式

$$\partial_x \dot{p} = \partial_y \dot{p}^2, \quad \partial_y \dot{p} = -\partial_x \dot{p}^2 \quad (3.2)$$

であるから、 $\dot{p}, \dot{p}^2$  は共役な調和関数で、(1.1)式のようにおくことができる。その  $p(z)$  を用いれば、(3.1)式より

$$\mu = |p'(z)| \quad (3.3)$$

である。また、(3.1)式から

$$\begin{cases} \nabla \times (\mu \hat{\mathbf{i}}) = 0, \\ \nabla \cdot (\mu \hat{\mathbf{i}}) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (\nabla \log \mu) \times \mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{i} = 0, \\ (\nabla \log \mu) \cdot \mathbf{i} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \end{cases}$$

となるから、これを解いて

$$\begin{aligned} \nabla \log \mu &= -(\nabla \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\nabla \times \mathbf{i}) \hat{\mathbf{i}} \\ &= -\nabla \log |\mathbf{i}| + \widehat{\nabla} \arg \mathbf{i} = \widehat{\nabla} \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

を得る(ただし、 $\theta = \arg \mathbf{i}$  とおく)。これから  $\mu$  が求められるためには、この式の右辺の rotation が 0 とならなければならない。 $\nabla \times \widehat{\nabla} = \Delta$  であるから

$$\Delta \theta = 0, \quad (3.5)$$

すなわち、 $\theta$  は一つの調和関数で、一つの解析函数  $\Phi(z)$  により

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\theta(x, y) \quad (3.6)$$

とおくことができる。この場合、(3.4)式の右辺は  $-\nabla \varphi$  とかけるから

$$\mu = e^{-\varphi}, \quad (3.7)$$

したがって

$$\begin{aligned} \mu \hat{\mathbf{i}} &= e^{-\varphi} (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= (R_e(e^{-\varphi}), -I_m(e^{-\varphi})), \end{aligned}$$

しかるに、(3.1)式より

$$\mu \hat{\mathbf{i}} = (R_e(p'), -I_m(p'))$$

であるから、

$$p'(z) = e^{-\varphi(z)}$$

$$\therefore p(z) = \int e^{-\varphi(z)} dz \quad (3.8)$$

となる。このように、(3.5)式が成立する場合には、(3.1)式の  $\dot{p}$  を(3.8)式および(3.6)式によって求めることができるのである。

いま、 $p(z)$  を基函数とする調和曲線座標を考えれば、その自然標構  $\mathbf{e}$ 、逆標構  $\hat{\mathbf{e}}$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \partial_x \mathbf{r}, \quad \hat{\mathbf{e}} = \nabla \dot{p} \\ & \quad (\mathbf{r} \text{ は位置ベクトル}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

であるから、

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \nabla \dot{p} = \mu \mathbf{i} = |p'| \mathbf{i}, \\ \hat{\mathbf{e}} = \nabla \dot{p}^2 = \mu \hat{\mathbf{i}} = |p'| \hat{\mathbf{i}} \end{cases} \quad (3.10)$$

また、

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{|p'|} \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{|p'|} \hat{\mathbf{i}} \quad (3.11)$$

をうる。すなわち、(3.8)式の  $p(z)$  を基函数とする調和曲線座標は、ちょうど与えられた標構  $\mathbf{i}, \hat{\mathbf{i}}$  の方向と一致する自然標構、逆標構をもち、1の2)で述べたような要求を満たす曲線座標である。しかも、自然標構(または逆標構)をつくる二つのベクトルは等しい長さ  $\frac{1}{|p'|}$  (または  $|p'|$ ) をもち、かつ互いに直交している。

このことは調和曲線座標の大きな特徴で、このため次節に示すように微分演算などの表現が著しく単純化されるのである。

次に例題として、2次元弾性論における主応力線座標を調和曲線座標によって導いてみよう。応力テンソル  $\mathbf{S}$  の偏差テンソルを  $\mathbf{S}_0$  とすれば、応力函数  $\varphi, \psi^*$  を用いて

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} -R_e(z\varphi'' + \psi''), & I_m(z\varphi'' + \psi'') \\ I_m(z\varphi'' + \psi''), & R_e(z\varphi'' + \psi'') \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

とかくことができるから、応力テンソル  $\mathbf{S}$  の主方向  $\mathbf{i}$  は、(2.14)式より

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &\simeq \left( \cos \left\{ \frac{1}{2} \arg(z\varphi'' + \psi'') \right\}, \right. \\ & \quad \left. -\sin \left\{ \frac{1}{2} \arg(z\varphi'' + \psi'') \right\} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\therefore \arg \mathbf{i} = -\frac{1}{2} \arg(z\varphi'' + \psi'') \quad (3.14)$$

となる。したがって、(3.5)式より応力函数  $\varphi, \psi$  が

$$\Delta \arg(z\varphi'' + \psi'') = 0 \quad (3.15)$$

の条件を満足する場合には主応力線座標となる調和曲線座標  $\dot{p}$  をつぎのようにして導入することができる。すなわち、(3.6)式の  $\theta(x, y)$  として  $-\frac{1}{2} \arg(z\varphi'' + \psi'')$  を用い、(3.8)式によって  $p(z)$  を求めればよい。

### 4. 調和曲線座標における微分演算

調和曲線座標における計量テンソルの成分は、(3.10)式、(3.11)式により

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} |p'|^2 & 0 \\ 0 & |p'|^2 \end{pmatrix}$$

\* 森口繁一：2次元弾性論(岩波講座現代応用数学) p. 10 参照

$$(g_{\kappa\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ |p'|^2 & 0 \\ 0 & 1 \\ & |p'|^2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

となるから、これらを用いて接続係数  $\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \lambda\mu \end{smallmatrix} \right\}$  を計算すれば、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} = -\frac{1}{|p'|} \partial_1 |p'|, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 12 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 21 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{11} \partial_2 g_{11} = -\frac{1}{|p'|} \partial_2 |p'|, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} &= -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{|p'|} \partial_1 |p'|, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} &= -\frac{1}{2} g^{22} \partial_2 g_{11} = \frac{1}{|p'|} \partial_2 |p'|, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 21 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = -\frac{1}{|p'|} \partial_1 |p'|, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{22} \partial_2 g_{22} = -\frac{1}{|p'|} \partial_2 |p'| \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

標構  $\mathbf{i} = |p'| \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{j} = |p'| \mathbf{e}_2$  に対する成分を座標  $\dot{p}$  における anholonomic 成分\*と称し、 $(\kappa)$  などと指標に括弧をつけて示すことにすれば、スカラー  $s$ , ベクトル  $\mathbf{v}$  に微分演算  $\nabla$  をほどこしたものの anholonomic 成分は

$$\left. \begin{aligned} \nabla s &\doteq |p'| (\partial_1 s, \partial_2 s)^{**}, \\ \nabla \mathbf{v} &\doteq |p'| \begin{pmatrix} \partial_1 v_{(1)}, \partial_1 v_{(2)} \\ \partial_2 v_{(1)}, \partial_2 v_{(2)} \\ -(\partial_2 |p'|) v_{(2)}, -(\partial_2 |p'|) v_{(1)} \\ -(\partial_1 |p'|) v_{(2)}, (\partial_1 |p'|) v_{(1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

となる。ここに、たとえば  $(\nabla v)_{(1)}$  はつぎのようにして計算される。

$$\begin{aligned} (\nabla v)_{(1)} &= |p'|^2 (\nabla v)_{11} = |p'|^2 \left[ \partial_1 v_1 - \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} v_\kappa \right] \\ &= |p'|^2 \left[ \partial_1 \frac{v_{(1)}}{|p'|} - \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ 11 \end{smallmatrix} \right\} \frac{v_{(\kappa)}}{|p'|} \right] \\ &= |p'| \partial_1 v_{(1)} - (\partial_2 |p'|) v_{(2)} \end{aligned}$$

微分演算  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$  については

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= (\nabla v)_{(11)} + (\nabla v)_{(22)} \\ &= |p'| (\partial_1 v_{(1)} + \partial_2 v_{(2)}) \end{aligned} \right\}$$

\*  $dr = d\dot{p} \mathbf{e}_r = d\dot{p} \mathbf{e}$  であるから、 $dr$  の自然標構に対する成分  $(dr)^\kappa$  については  $(dr)^\kappa = d\dot{p}^\kappa$  となる。しかし、anholonomic 成分については  $(dr)_{(\kappa)} = d(r_{(\kappa)})$  となるようなスカラー函数  $r_{(\kappa)}$  は一般には存在しない。anholonomic 成分は、共変、反変の区別がないので、指標は右下につける。調和曲線座標における anholonomic 成分と一般成分との間には、

$$\begin{aligned} v_{(\kappa)} &= \frac{1}{|p'|} v^\kappa = |p'| v_\kappa, \\ T_{(\kappa)\lambda} &= \frac{1}{|p'|^2} T^{\kappa\lambda} = |p'|^2 T_{\kappa\lambda} = T^\kappa_\lambda = T_\lambda^\kappa \end{aligned}$$

の関係がある。

\*\* 記号  $\doteq$  は、右辺が左辺の量の座標  $\dot{p}$  における anholonomic 成分であることを示す。

$$\left. \begin{aligned} &-\{(\partial_1 |p'|) v_{(1)} + (\partial_2 |p'|) v_{(2)}\}, \\ \nabla \times \mathbf{v} &= (\nabla v)_{(12)} - (\nabla v)_{(21)} \\ &= |p'| (\partial_1 v_{(2)} - \partial_2 v_{(1)}) \\ &\quad + \{(\partial_2 |p'|) v_{(1)} - (\partial_1 |p'|) v_{(2)}\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

である。テンソル  $\mathbf{T}$  に対しても同様に

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{T})_{(\kappa)} &= (\nabla T)_{(11\kappa)} + (\nabla T)_{(22\kappa)}, \\ (\nabla \times \mathbf{T})_{(\kappa)} &= (\nabla T)_{(12\kappa)} - (\nabla T)_{(21\kappa)} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

により  $\nabla \cdot \mathbf{T}$ ,  $\nabla \times \mathbf{T}$  (いずれもベクトル) を定義すれば、

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &\doteq |p'| \begin{pmatrix} \partial_1 T_{(11)} + \partial_2 T_{(21)}, \\ \partial_1 T_{(12)} + \partial_2 T_{(22)}, \\ -(\partial_1 |p'|) (T_{(11)} - T_{(22)}), \\ T_{(12)} + T_{(21)}, \\ -(\partial_2 |p'|) (T_{(12)} + T_{(21)}), \\ -T_{(11)} + T_{(22)} \end{pmatrix}, \\ \nabla \times \mathbf{T} &\doteq |p'| \begin{pmatrix} \partial_1 T_{(21)} - \partial_2 T_{(11)}, \\ \partial_1 T_{(22)} - \partial_2 T_{(12)}, \\ -(\partial_1 |p'|) (T_{(12)} + T_{(21)}), \\ -T_{(11)} + T_{(22)}, \\ +(\partial_2 |p'|) (T_{(11)} - T_{(22)}), \\ T_{(12)} + T_{(21)} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

となる。2階微分についてはこれらの演算を連続して行なえばよく、そのおもなものを記せば、

$$\begin{aligned} \nabla \nabla s &= \nabla (\nabla s) \\ &\doteq |p'|^2 \begin{pmatrix} \partial_{11} s, \partial_{12} s \\ \partial_{12} s, \partial_{22} s \end{pmatrix} \\ &\quad + |p'| (\partial_1 |p'|) \begin{pmatrix} \partial_{1s}, \partial_{2s} \\ \partial_{2s}, -\partial_{1s} \end{pmatrix} \\ &\quad + |p'| (\partial_2 |p'|) \begin{pmatrix} -\partial_{2s}, \partial_{1s} \\ \partial_{1s}, \partial_{2s} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta s & 0 \\ 0 & \Delta s \end{pmatrix} \\ &\quad + |p'| \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial_{11} - \partial_{22}}{2} & \partial_{12} \\ \partial_{12} & -\frac{\partial_{11} - \partial_{22}}{2} \end{pmatrix} (|p'| s) \right. \\ &\quad \left. - s \begin{pmatrix} \frac{\partial_{11} - \partial_{22}}{2} & \partial_{12} \\ \partial_{12} & -\frac{\partial_{11} - \partial_{22}}{2} \end{pmatrix} |p'| \right\}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= \nabla \cdot (\nabla s) \\ &= |p'|^2 (\partial_{11} + \partial_{22}) s, \\ \Delta \mathbf{v} &= \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) \\ &\doteq |p'|^2 (\partial_{11} + \partial_{22}) \begin{pmatrix} v_{(1)} \\ v_{(2)} \end{pmatrix} \\ &\quad + 2 |p'| (\partial_2 |p'| \partial_1 - \partial_1 |p'| \partial_2) \begin{pmatrix} -v_{(2)} \\ v_{(1)} \end{pmatrix} \\ &\quad - \{(\partial_1 |p'|)^2 + (\partial_2 |p'|)^2\} \begin{pmatrix} v_{(1)} \\ v_{(2)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \nabla\nabla\cdot\mathbf{T} &= \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T}) \\ &= |\mathbf{p}'|^2(\partial_{11}\mathbf{T}_{(11)}+\partial_{12}\mathbf{T}_{(12)} \\ &\quad +\partial_{12}\mathbf{T}_{(21)}+\partial_{22}\mathbf{T}_{(22)}) \\ &\quad +\{(\partial_1|\mathbf{p}'|)^2-(\partial_2|\mathbf{p}'|)^2 \\ &\quad -|\mathbf{p}'|(\partial_{11}-\partial_{22})|\mathbf{p}'|-|\mathbf{p}'|(\partial_1|\mathbf{p}'|\partial_1 \\ &\quad -\partial_2|\mathbf{p}'|\partial_2)\}(\mathbf{T}_{(11)}-\mathbf{T}_{(22)}) \\ &\quad +\{2\partial_1|\mathbf{p}'|\partial_2|\mathbf{p}'|-2|\mathbf{p}'|\partial_{12}|\mathbf{p}'| \\ &\quad -|\mathbf{p}'|(\partial_1|\mathbf{p}'|\partial_2+\partial_2|\mathbf{p}'|\partial_1)\}(\mathbf{T}_{(12)}+\mathbf{T}_{(21)}), \\ \nabla\nabla\times\mathbf{T} &= \nabla\times(\nabla\times\mathbf{T})=\Delta\text{tr}\mathbf{T}-\nabla\nabla\cdot\mathbf{T} \end{aligned}$$

などである。

5. 平板の問題

微小変形の平板の曲げの問題において、撓みを  $w$  とするとき、平板の諸量はつぎのように示すことができる。

$$\begin{aligned} \text{撓み角 (ベクトル): } & \mathbf{d}=\nabla w, \\ \text{断面モーメント (テンソル):} & \\ \mathbf{M} &= -D\{(1-\nu)\nabla\nabla w+\nu\Delta w\mathbf{E}\}, \\ & (\mathbf{E} \text{ は単位テンソル}) \\ \text{断面モーメントのトレース (スカラー):} & \\ \text{tr } \mathbf{M} &= -D(1+\nu)\Delta w, \\ \text{断面シヤ (ベクトル): } & \mathbf{s}=-D\nabla\Delta w, \\ \text{分布荷重 (スカラー): } & q=D\Delta^2 w \end{aligned} \tag{5.1}$$

ここに、 $D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  は板の曲げ剛度、 $E$  はヤング率、 $\nu$  はポアソン比である。前節の(4.3)式、(4.7)式を用いて、これらの量の調和曲線座標  $\dot{p}$  に関する anholonomic 成分を求めれば、

$$\begin{aligned} d_{(\kappa)} &= |\mathbf{p}'|\partial_{\kappa}w, \quad (\kappa=1,2) \\ M_{(11)} &= -D|\mathbf{p}'|\{|\mathbf{p}'|(\partial_{11}+\nu\partial_{22}) \\ &\quad + (1-\nu)(\partial_1|\mathbf{p}'|\partial_1-\partial_2|\mathbf{p}'|\partial_2)\}w \\ &= -D\left[\frac{1+\nu}{2}\Delta w \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu)|\mathbf{p}'|\left\{\frac{\partial_{11}-\partial_{22}}{2}(|\mathbf{p}'|w) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -\left(\frac{\partial_{11}-\partial_{22}}{2}|\mathbf{p}'|\right)w\right\}\right], \\ M_{(22)} &= -D|\mathbf{p}'|\{|\mathbf{p}'|(\nu\partial_{11}+\partial_{22}) \\ &\quad - (1-\nu)(\partial_1|\mathbf{p}'|\partial_1-\partial_2|\mathbf{p}'|\partial_2)\}w \\ &= -D\left[\frac{1+\nu}{2}\Delta w \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu)|\mathbf{p}'|\left\{\frac{\partial_{11}-\partial_{22}}{2}(|\mathbf{p}'|w) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -\left(\frac{\partial_{11}-\partial_{22}}{2}|\mathbf{p}'|\right)w\right\}\right], \\ M_{(12)} &= -D(1-\nu)|\mathbf{p}'|(|\mathbf{p}'|\partial_{12} \\ &\quad +\partial_2|\mathbf{p}'|\partial_1+\partial_1|\mathbf{p}'|\partial_2)w. \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} &= -D(1-\nu)|\mathbf{p}'|\{\partial_{12}(|\mathbf{p}'|w)-(\partial_{12}|\mathbf{p}'|)w\}, \\ \text{tr } \mathbf{M} &= -D(1+\nu)\Delta w, \\ s_{(\kappa)} &= -D|\mathbf{p}'|\partial_{\kappa}\Delta w, \quad (\kappa=1,2) \\ q &= D\Delta^2 w \end{aligned}$$

ただし、

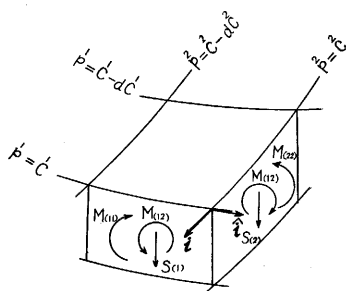
$$\Delta w = |\mathbf{p}'|^2(\partial_{11}+\partial_{22})w$$

などとなる (これらの成分の正の向きは第1図に示すとおりである)。また、換算断面シヤ成分は

$$v_{(1)}=s_{(1)}+|\mathbf{p}'|\partial_2 M_{(12)}^* \tag{5.3}$$

で、 $M_{(12)}=0$ , すなわち標構がテンソル  $\mathbf{M}$  の主方向と一致するような場合には、 $v_{(1)}=s_{(1)}$  となり簡単である。

平板の問題は、偏微分方程式  $\Delta^2 w = -\frac{q}{D}$  を与えられ



第1図

た境界条件で解くことであり、このため与えられた境界曲線に依り、1の1)で述べたような曲線座標を導入することになる。いま、一つの調和曲線座標  $\dot{p}$  が導入され、これに関して

$$\Delta^2 w=0 \tag{5.4}$$

の一般解を分離型に求める問題を考えてみよう。いうまでもなく、解が分離型で求められれば境界条件の取扱いが容易であるからである。こういう解が求められる場合には  $w=|\mathbf{p}'|^n f(\dot{p})g(\dot{p})$  という形をもつであろうが、これを一般的に求めることは難かしい。しかし、たとえば円板の問題においては、

$$w=\frac{1}{|\mathbf{p}'|}f(\dot{p})g(\dot{p}) \tag{5.5}$$

とおき、つぎに示すようにして  $f(\dot{p})$ ,  $g(\dot{p})$  を求めることができる。

まず、(5.5)式を(5.4)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Delta^2 w &= |\mathbf{p}'|^2\{|\mathbf{p}'|(f'''g+2f''g'+fg''') \\ &\quad -2(f''g-fg'')(\partial_{11}-\partial_{22})|\mathbf{p}'| \\ &\quad -8f'g'\partial_{12}|\mathbf{p}'|+fg(\partial_{111}+2\partial_{112}+\partial_{222})|\mathbf{p}'|\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

をうる (ここに ' はそれぞれの引数に関する微分を示す)。しかるに、円板の問題で用いられる調和曲線座標の基函数は

$$\begin{aligned} \text{i) } & p=\log z, \\ \text{ii) } & p=\log\frac{c+z}{c-z}=2\text{tanh}^{-1}\frac{z}{c}, \\ \text{iii) } & p=\frac{1}{z} \end{aligned} \tag{5.7}$$

であり(第2図)、それぞれの場合、

\*  $v$  というようなベクトル量は存在しないのであるが、便宜上  $v_{(1)}$  という記号を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \text{i)} \quad & |p'| = e^{-\frac{1}{p}}, \\ \text{ii)} \quad & |p'| = \frac{1}{c} (\cosh \frac{1}{p} + \cos \frac{2}{p}), \\ \text{iii)} \quad & |p'| = -(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3}) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

となる。したがって、i), ii) の場合には  
 $(\partial_{11} - \partial_{22}) |p'| = |p'|,$   
 $\partial_{12} |p'| = 0$

また、iii) の場合には

$$(\partial_{11} - \partial_{22}) |p'| = \partial_{12} |p'| = 0$$

であるから、(5.6)式は i), ii) の場合、

$$\left. \begin{aligned} f''''g + 2f''g'' + fg'''' \\ - 2(f''g - fg'') + fg = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

ii) の場合、

$$f''''g + 2f''g'' + fg'''' = 0 \quad (5.10)$$

となる。いま、 $g(\frac{1}{p})$  を

$$g_n(\frac{1}{p}) = \frac{\cos n\frac{1}{p}}{\sin n\frac{1}{p}} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (5.11)$$

とおき、これに対応する  $f(\frac{1}{p})$  を  $f_n(\frac{1}{p})$  とおけば、 $f_n(\frac{1}{p})$  は i), ii) の場合 (5.11) 式を (5.9) 式に代入することにより、

$$f_n'''' - 2(n^2+1)f_n'' + (n^2-1)^2 f_n = 0$$

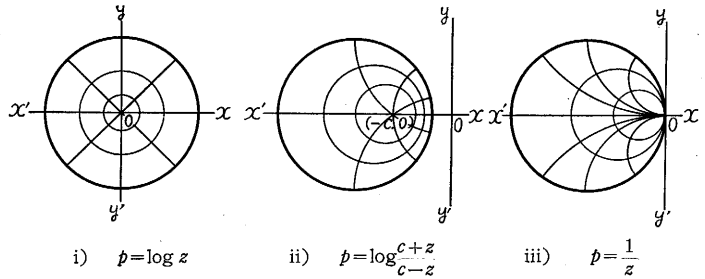
を満足しなければならない。したがって、その一般解として

$$\left. \begin{aligned} f_0(\frac{1}{p}) &= (A_0 \frac{1}{p} + B_0) e^{\frac{1}{p}} + (C_0 \frac{1}{p} + D_0) e^{-\frac{1}{p}}, \\ f_1(\frac{1}{p}) &= A_1 e^{2\frac{1}{p}} + B_1 e^{-2\frac{1}{p}} + C_1 \frac{1}{p} + D_1, \\ n \geq 2: \\ f_n(\frac{1}{p}) &= A_n e^{(n+1)\frac{1}{p}} + B_n e^{-(n+1)\frac{1}{p}} \\ &\quad + C_n e^{(n-1)\frac{1}{p}} + D_n e^{-(n-1)\frac{1}{p}} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

をうる。同様に、iii) の場合 (5.10) 式に (5.11) 式を代入すれば、

$$f_n'''' - 2n^2 f_n'' + n^4 f_n = 0$$

となり、



第 2 図

$$\left. \begin{aligned} f_0(\frac{1}{p}) &= A_0 \frac{1}{p^3} + B_0 \frac{1}{p^2} + C_0 \frac{1}{p} + D_0, \\ n \geq 1: \\ f_n(\frac{1}{p}) &= (A_n \frac{1}{p} + B_n) e^{n\frac{1}{p}} + (C_n \frac{1}{p} + D_n) e^{-n\frac{1}{p}} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

をうる。以上求められた (5.12) 式または (5.13) 式を用いれば、(5.4) 式的一般解として

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n, \\ w_n &= \frac{1}{|p'|} f_n(\frac{1}{p}) \cos n\frac{2}{p}, \\ \bar{w}_n &= \frac{1}{|p'|} \bar{f}_n(\frac{1}{p}) \sin n\frac{2}{p} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

が得られることになる。 $(\bar{f}_n(\frac{1}{p}))$  は、(5.12) 式または (5.13) 式において、 $A_1$  等の代わりにこれらと異なる係数  $\bar{A}_1$  等を用いたものである。以上の結果を用いて、偏心荷重をうける円板の問題等を解くことができるのであるが、これらについてはまた別に述べることにしたい。

### 6. あとがき

以上、調和曲線座標の応用に関連したことがらについて述べたのであるが、個々の曲線座標としてでなく調和曲線座標としての表現を用いれば、統一的な議論ができるので応用上便利であると思う。調和曲線座標は物体の変形の理論や弾塑性論の 2 次元問題などに広く利用することができる。  
 (1963年 6 月 5 日受理)

### 参考文献

- 1) 矢野健太郎：幾何学（岩波講座，現代応用数学）
- 2) 坪井善勝：平面構造論（丸善，1955）

## 次号予告 (9月号)

### 研究解説

客車暖房のカスケード制御装置.....	沢井善三郎
	横田和丸
	川瀬太郎
界面動電ポテンシャル.....	妹尾学
トリクレン，塩化アリの活性炭に対する吸着平衡.....	福田義民
	河添邦太
	竹内雅

### 研究速報

過ラウリン酸のポーラログラフィーとその応用.....	早野茂夫
	野村弘子
	丹波
メタクロレインの選択的オレフィン重合.....	中島利誠
	永井芳男