

# デジタル計算機による性能計算

渡 辺 勝・岡 本 通 子

## 1. 緒 言

デジタル計算機を用いて、ロケットのトラジェクトリを求めるには、ロケットの運動方程式を時間の刻みに対して、ステップバイステップに解けばよく、微分方程式の求解に帰着されるので原理的な問題はない。Runge-Kutta 法による積分の基本的なプログラムについては、前報告<sup>1)</sup>に説明しておいた。しかし精度のよい解を適当な時間内に計算するには、技術的にいろいろな、くふうが必要である。

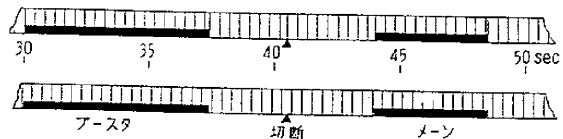
昨年来われわれは手近に計算機を利用できる便宜が得られるようになったので前報告に予想しておいた計算精度向上のための具体案を実行する機会に恵まれ、それらの結果は、ロケットの性能計算に大いに寄与してきている。今回は前報告以後に改良された諸点につき説明する。

なお参考までに使用機種と計算時間の点にふれておこう。前回報告の計算に使用したのは、航空宇宙技術研究所のデータロン B-205 で、これは記憶装置にドラムを用いているのでやや遅く、浮動小数点装置を用いても尙一時間を要している。今回使用した OKITAC では記憶装置が磁心であり、計算速度はかなり早くなっているので、浮動小数点装置を用いなくても、同程度の時間で完了している。

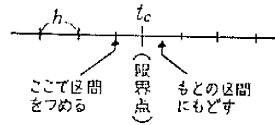
## 2. 限界時間に対する区間制御

運動方程式を積分する際の、時間の刻み方(積分の区間)の問題から始めよう。刻みを伸縮する(これを区間の制御ともいう。実際には区間は2倍または1/2に変えられるので、halving-doubling method ともいわれる)ことの理由は、解の精度あるいは相対誤差を一定の許容値以下におさめるために行なうものである。すなわちロケットの発射直後の速度の小さいところでは刻みを小さくして、姿勢角の急速な変化に応じうるようにしておく。ロケットの速度が増すにつれ刻みは大きく、特に燃焼後は誤差の影響は小さいので、刻みを大きくして計算時間を早めるようにしている。これを“誤差による区間制御”(error control)と称し、必要な精度の解を最小時間で得るといふ、計算の optimization の役割を演じる。このような制御については前回の報告で論じておいた。

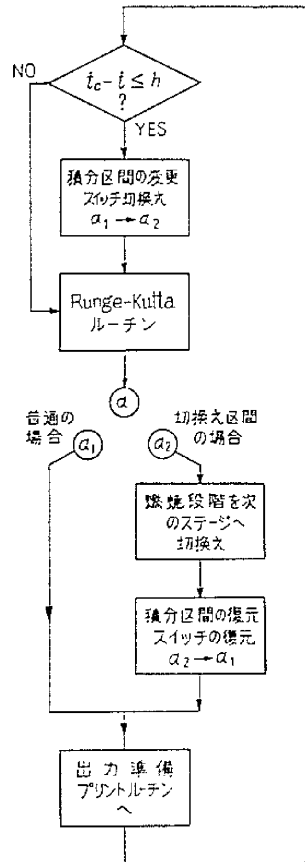
以上は特にロケットの運動に限らず、一般の微分方程式にも適用されるものであるが、ロケットの特に燃焼段階に関しては、以下のような特殊な制御が必要である。すなわち燃焼の開始、完了時期あるいはブースタの切斷時期などには推進力、抵抗、重量などに不連続な変化が



(上) 区間制御を行なったもの (下) 区間制御を行なわないもの  
第 1 図 積分区間と thrust 計画秒時の対照



第 2 図 区間制御のさいの刻みの変更



第 3 図 区間制御ルーチンのフローチャート

伴う。これらの時点に特別の考慮をはらわずに、上記の誤差による区間制御のみを行なったのでは、これらの不連続のおこる時点が積分区間の中にもれてしまい、その時点の前後で変化する量、たとえば thrust などが正確に計算されない欠陥がある。第 1 図(下)には 9L-1 号機の計算例について、積分の刻みと燃焼の時点との関係、その両者のズレが示されている。

このようないく違ひがあると、どのような誤差が生ずるかは後にのべることにするが、この誤差を除くためには、不連続のおこる時点において、積分区間を変更してちょうど刻み点が、不連続点に合致するようにすればよい(第 2 図)。これを“限界時間による区間制御”と呼ぼう。この際、積分区間の変更を

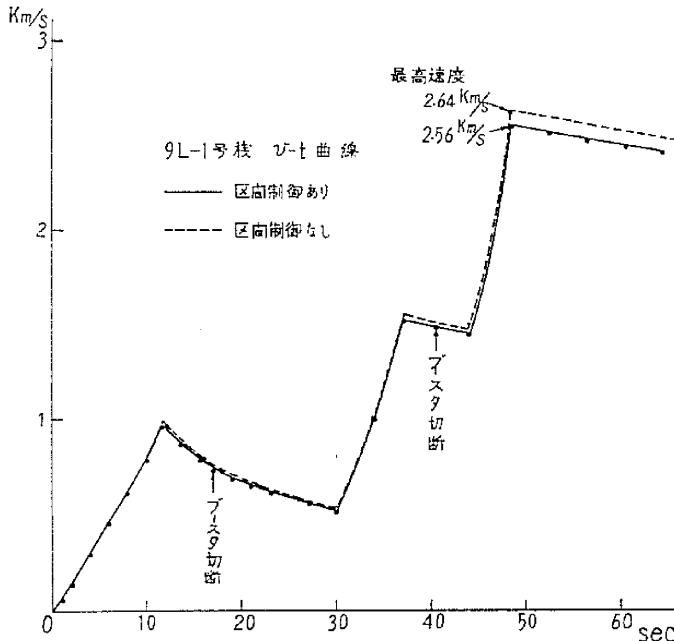
行なうばかりでなく、その時点を境目として、それ以前の区間の積分と、それ以後の積分の場合とで、同じ時点における変数の量を切り替えて用いる必要があることに注意しなければならな

い。以上の点をフローチャートに整理したものが第3図である。

区間制御を行なった場合と行なわない場合の計算結果を比較したものが第4図である。誤差の大きいのは、メインの燃焼完了期でも示されている。この場合最高速度の誤差は 0.08 km/s でほぼ 3%、また最高高度はその2倍のほぼ6%で、20 km の差があることも注意しておこう。このように大きな誤差が必ず出るといっても過言ではなく、もっと一致のよい計算例もある。それで誤差の大きな定量的議論をしておこう。その対象として、影響の一番大きい、矩形化スラストの場合のメインの燃焼完了時期を取りあげる。

燃焼完了時間  $t_c$  が積分点  $t_{n-1}$  と  $t_n$  の間に入ったとする。Runge-Kutta 法によれば、 $(t_{n-1}, t_n)$  の間におけるスラスト  $T$  として次式を用いる。

$$\frac{1}{6} \left\{ T(t_{n-1}) + 4T\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + T(t_n) \right\}$$



第4図 区間制御による精度向上の例

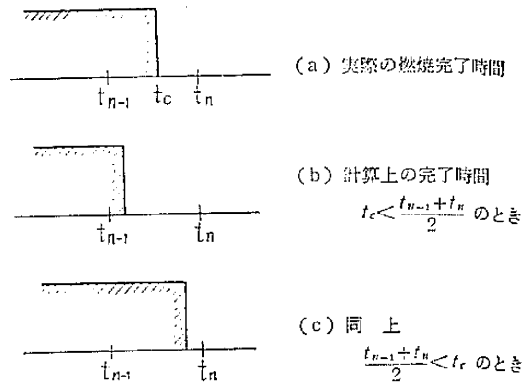
したがってこの区間の有効スラストは

$$t_{n-1} \leq t_c < \frac{t_{n-1}+t_n}{2} \text{ のときは } \frac{1}{6} T$$

$$\frac{t_{n-1}+t_n}{2} \leq t_c < t_n \text{ のときは } \frac{5}{6} T$$

となり、見かけ上の燃焼完了時期はそれぞれ第5図(b)、(c)のように変化する。この燃焼時間のズレが誤差の原因となる。これを実際の完了時間  $t_c$  の積分区間に対する相対時刻関係について図示したものが第6図であり、誤差のあらわれ方がよく分かる。

以上の議論は矩形化スラストに対して、区間制御した場合であるが、スラストの実測値を用いた場合にも区間

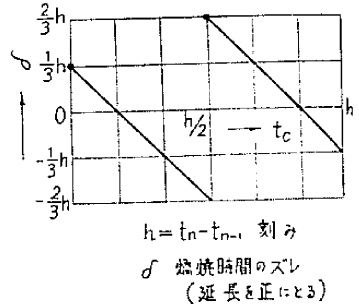


第5図 区間制御しない時の見掛け燃焼完了時刻

制御を適用できる。この場合、重量の変化は

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{I_{sp}}$$

の式を積分して得られる ( $T$  スラスト,  $I_{sp}$  比インパルス)。ブースタ切斷時期に重量  $m$  が不連続に



第6図 区間制御しない時の見かけの燃焼完了時間と実際の完了時間のズレ

変化することを区間制御の際考慮する必要がある。

微分方程式の刻みを不連続点または設定点において制御する一般的方法をカリフォルニア工大のジェット推進研究所の Lesh が提案して、IBM 704 に対するプログラムを発表している<sup>3)</sup>。彼はこれを Automatic Interruption と称している。この方法に対し、われ

われの方法は

- (1) スラストスケジュールにきめられた燃焼秒時に応じて、いわば dynamic な刻み変更を行なっている。
- (2) 誤差による制御と組み合わせて、両者を併用している。

などの点が有利であり、プログラムが簡単で、小型計算機むきで作ったところが特徴ともいえよう。

### 3. スラストの正規化

スラストを矩形化して計算するのは、簡便迅速な点でよく用いられるが、燃焼末期が不正確になり、加速度的大きさなどを精密に知りたい時は、適当ではない。それ

には燃焼秒時に対し、推力を実験的に測定したデータが用意されているので、これを用いて計算すればよい (第 7 図)。この曲線を積分して得られる total impulse を燃料重量で割った量は、specific impulse  $I_{sp}$  として燃料に特有な量であることは周知のとおりであるが、実際に計算担当者の手もとにくるものは、なんらかの誤差のため、指定された  $I_{sp}$  と一致していないことがしばしばある。この場合、計算に先立って、これを校正しておく必要がある。この操作をスラストの正規化と呼んでおく。われわれはその方法として、“なま”のデータのままだのスラストをテーブルの形で記憶装置に格納しておき、これを梯形則に従って積分したものを、すなわち

$$\left\{ \frac{1}{2} T(t_0) + T(t_1) + T(t_2) + \dots + T(t_{n-1}) + \frac{1}{2} T(t_n) \right\} \times h$$

( $T$  はスラスト、 $t_0, t_1, \dots, t_n$  は刻み  $h$  ごとの秒時) を計算し、これを燃料重量で割ったものが、指定された  $I_{sp}$  になるように、スラスト  $T$  を比例的に縮小 (拡大) し、これを再格納する。この手順、すなわち正規化を行なって計算した結果と、正規化しない“なま”のデータについて計算したものととの比較を第 8 図に示す。これは特に誤差の大きい例と思われるが、最高高度について 10% もくい違っており、正規化操作の必要性がよく分かる。

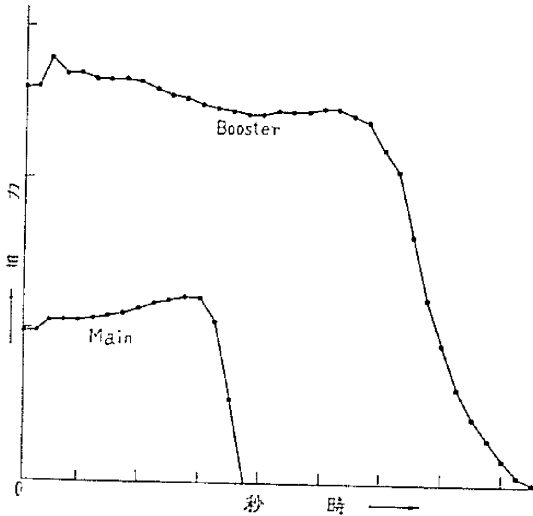
4. アナログ計算機の解のチェック

アナログ計算機は演算速度が早く、トラジェクトリがグラフィカルに描かれるので直観的であるなど有利な点もあるが、反面、演算器に固有の誤差があって精度が十分でない欠点がある。これを補うには同じ式をデジタル計算機で解いて、精度をチェックしておけば安心できる。このようなチェックを行なう際、第一にアナログ計算機自体の精度により生ずる誤差、第二に演算装置が足りないために式を簡略にしたり、データをはしょるために出てくる誤差の両方が考えられる。

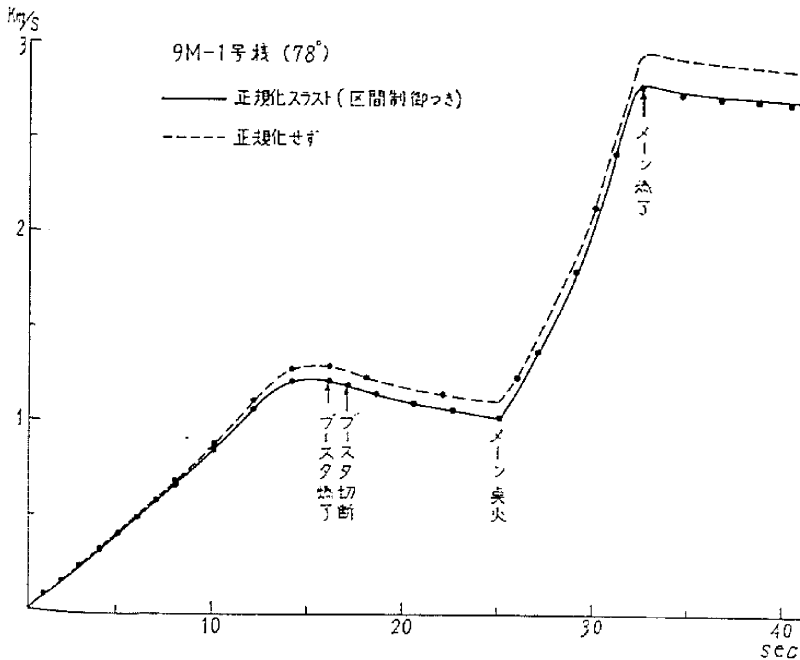
これらを分けて検討するため、アナログ計算機で解いているのと、まったく同じ式、同じデータを用いた計算を行なって、はじめにのべた演算要素に固有な誤差を明らかにした。すなわちこれをアナログ計算機の解と比較してみればよいわけである。この解はアナログ計算機の精度を向上する場合の指標として役立つであろう。

つぎに式の簡略化やデータの不十分のために生ずる誤差である。これは純数学的な問題であるから、デジタル計算機上でシミュレートすることにより明らかにできる。すなわちまず正確な式を正確なデータで解いたものを求める。ついで式やデータの不十分な箇所を一つ一つ別個に置いて計算し、そのおのおのどのような誤差を生ずるかを調べてみた。アナログ計算機で解いている式は

- (1) 重力の高さによる変化を考えず、その代わりに金飛しょう行程の平均値を重力加速度としてい



第 7 図 9M-1 推力曲線 (実測)



第 8 図 スラスト正規化操作の効果

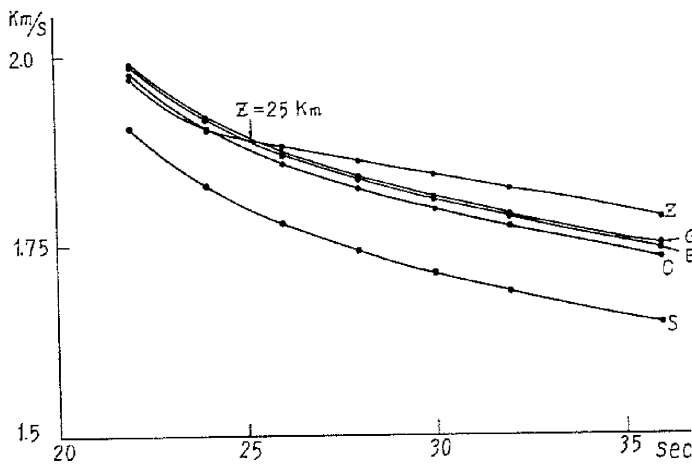
またデータの相違として

- (2) 空気密度は 25 km 以上はゼロとする。
- (3) 抵抗係数は  $C_D \times M^2$  ( $M$ : マッハ数) の形でいれる。もっともこの点はたんに演算操作の相違にすぎず、数値的な違いではない。しかしこの量と(2)の空気密度はアナログ関数発生装置を用いているため、それによる微細な凹凸が誤差の原因となり得る。
- (4) なおこのほかに、偶然のことであるが、マッハ数を出す時の音速として、アナログでは 340 m/s を、デジタル計算機では 310 m/s を用いていた。この点はデータの相違として是正できることであるが、後に分かるように、これがもっとも大きな誤差を生じていることが明らかになった。

以上の(1)~(4)の各項を個々に導入した解をそれぞれ、G、Z、C、S と名づけ、これを正確な解 E と比較したものが第 9 図である。この図は誤差の程度を明示するため速度曲線のごく一部、燃焼終了の付近について示してある。G: 重力の影響はもっとも小さい。というよりも重力の高さによる変化は考える必要はあるが、これを平均値でおきかえても、さしつかえないということである。もっともこれは、この程度の高度のロケットについていえることであろう。C: つぎに抵抗係数の違い、あるいは関数装置による不正確さもあまり問題にならない。Z: 空気密度を 25 km 以上で打ち切ったことの誤差はかなり明瞭にあらわれている。S: そしてもっとも大きな誤差は音速を違った値にとったことに基因している。

5. 音速の高度変化の影響

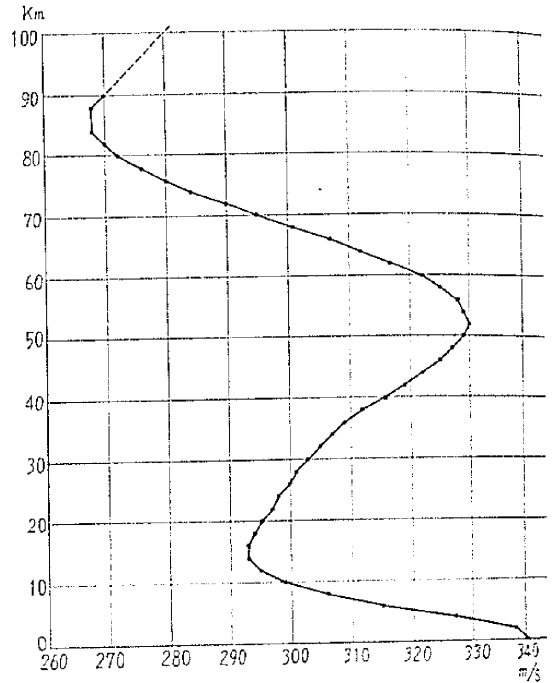
音速のとり方がこれほどに計算結果に影響があることが明らかになったからには、音速の高度変化を考えた計



	Zmax(km)	ΔZmax
E: 正解	193	
G: 重力のみ変えたもの	191.5	-1.5
Z: 空気密度のみ変えたもの	200	7
C: 抵抗係数のみ変えたもの	191	-2
S: 音速(と抵抗係数)を変えたもの	174	-19

第 9 図 誤差の原因の分析 — 燃焼終了後の速度曲線の拡大図 —

算を行なう必要があることはいうまでもない。最近の観測結果にもとづいて COSPAR の国際標準大気 (CIRA) の準備グループによりまとめられた資料<sup>4)</sup>より引用して音速の高度変化を図示したものが第 10 図である。到達高度 450 km、燃焼終了時の高度 52 km の L-2 型機の計算例につき、上記のデータを用いて高度ごとにマッハ数を算定し、それに応ずる抵抗係数を用いて計算した結果と、全高度にわたって音速を 310 m/s として計算した



第 10 図 音速の高度による変化 (CIRA)

ものとでは、意外なほどによく一致している。これは平均の音速のとり方が妥当であったことを示すものであろう。

本研究につき野村教授、秋葉助教授らの助言を得たこと、資料の整理、計算機の使用について鈴木康夫・北坂秋秀・松岡千恵子の諸君の協力に負うところが大きいことを記して感謝の意をあらわしたい。

(1963 年 4 月 27 日受理)

文 献

- 1) 渡辺・樋口・戸川: 生産研究 13, 10 (1961) 57-61.
- 2) 秋葉・広沢・北坂: 生産研究 15, 7(1953)
- 3) F. Lesh: JP DEQ (Differential Equations Solver) 1959, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.
- 4) H. Kallmann-Bijl, R. L. F. Boyd, H. Lagow, S. M. Poloskov and W. Priestler: CIRA (Cospar International Reference Atmosphere) 1961, North-Holland, Amsterdam.
- 5) 野村: アナログ計算機による性能計算