光線追跡から一次元高次収差関数を求める方法

A Method of Obtaining One-Dimensional Higher Order Aberration Function by Means of Ray Tracing

朝　倉　利　光

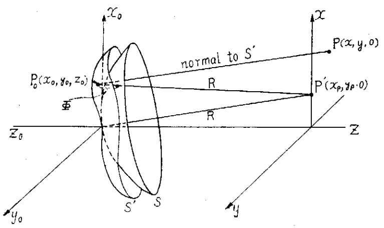
1. 序　論　幾何光学的に完全な光学系においては，点は完全な点の像を作る．このことを波面光学からいうと，球面波は光学系を通った後も球面を保っているということである．光学系の収差を表わす一つの方法は，これを通った後の波面の完全な球面（参照波面という）からの偏差で表わす方法である．したがって偏差を求めることは，収差関数を求めることである．頂点が出射瞳の中心と接する球面を参照波面とすれば，その波面上の一点の座標を (x_0, y_0, z_0) とし，ガウス像面の一点の座標を (x, y, z) とすると，参照波面の式は

$$(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2=R^2 \qquad (1)$$

となる（第1図参照）．

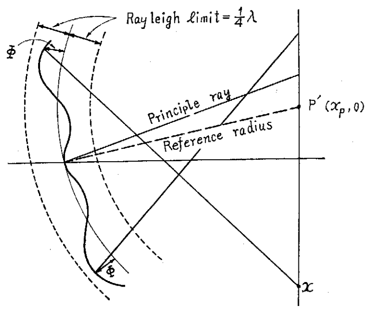
一方，光学系を出た波面の式は，波面収差を Φ として

$$(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2=(R+\Phi)^2 \qquad (2)$$



第 1 図

となる．$|\Phi|$ が Rayleigh Limit に等しいか，またはそれ以下の場合は，収差により像はあまり乱されることなく，十分鮮明なものとされているが，この場合でも像面での像の拡がりはかなり広いので，この広がりを求めておくことは必要である（第2図参照）．



第 2 図

また，従来は高次の収差をあまり考えなかったので，波面関数から収差図形を導く式において，収差が小さいとして総て近似によって行なってきた．しかし高次の収差を考えると，近似の行なわないもっと厳密な方法が必要である．そこで近似のない考慮を行なって一次元高次収差関数を求める方法を，実際的な光線追跡の手段と合わせて求めた．ただし光線追跡の過程では，Φ の展開された係数を知ることはできなかったが，十分に多くの光線を追跡してゆくと，像面 (x, y) に対する多項式が (x_0, y_0) の関数として見出すことができる．したがって収差関数の級数展開の係数を求める問題は，この多項式の係数を（2）式に対する法線の係数に合わせてゆく問題となることを明らかにした．

2. 一次元収差関数　三次元の問題は，$y_0=y$ という切断面を考えることによって，二次元の問題となる．像面は paraxial focal plane に取り，$z=0$ という座標系におく．これにより（1）式は簡単に，

$$(x_0-x)^2+z_0^2=R^2 \qquad (3)$$

となり，（2）式は

$$(x_0-x)^2+z_0^2=(R+\Phi)^2 \qquad (4)$$

となる．収差関数は級数展開として

$$\Phi=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i \qquad (5)$$

とおかれる．ある任意の物体点からの光線による像点を定義する光線追跡の方法により，

$$x=\sum_{K=1}^{n} b_K x_0^K \qquad (6)$$

という係数の判った多項式が求められる．この多項式に対応する式を（4）から導くことは，（4）で表わされる波面に対する法線を求めることである．ある波面 $f(x_0, z_0)=0$ で与えられる曲線への法線は

$$\frac{x_0-x}{f_{x_0}}=\frac{z_0-z}{f_{z_0}}$$

という関係から求められる．ここで $f(x_0, z_0)$ は（4）から

$$f(x_0, z_0)=(x_0-x_p)^2+z_0^2-(R+\Phi)^2 \qquad (7)$$

で与えられ，x_p はガウス像点で，どのような収差をもつ波面に対しても constant である．また f_{x_0}，f_{z_0} は関数 f の x_0，z_0 での微分を示し，これらを求めると

$$f_{x_0}=2(x_0-x_p)-2(R+\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}$$

$$f_{z_0}=2z_0$$

となる．したがって（7）に対する法線は

$$\frac{x_0-x}{2(x_0-x_p)-2(R+\Phi)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_0}}=\frac{z_0-z}{2z_0} \qquad (8)$$

となる．像面 $z=0$ と法線の交点が求める x であるから，x は像面の座標系（この場合は x_0）の関数となる．（8）式を書き換えると

$$x=x_p+(R+\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}$$

となり，（6）式に対する式が（4）から求められたことになる．収差関数は（5）で与えられ，その x_0 についての微分は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}=\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x_0^{i-1}$$

であるから，この関係式を使って

$$\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}=\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_0^{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x_0^{i-1}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_0^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}x_0^{j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}a_i x_0^{i+j}$$

$$=\sum_{K=1}^{\infty} x_0^{K}\sum_{l=1}^{K}(K-l+1)a_l a_{K-l+1}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(m a_m^2+2m\sum_{K=1}^{m-1}a_K a_{2m-K}\right)x_0^{2m-1}+(2m+1)\sum_{K=1}^{m}a_K a_{2m-K+1}x_0^{2m}\right]$$

が求まる．したがって，(9)は

$$x=x_p+Ra_1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[m\left(a_m^2+2\left\{Ra_{2m}+\sum_{K=1}^{m-1}a_K a_{2m-K}\right\}\right)\times x_0^{2m-1}+(2m+1)\left\{Ra_{2m+1}+\sum_{K=1}^{m}a_K a_{2m-K+1}\right\}x_0^{2m}\right] \tag{10}$$

となる．この式の最初の数項を示すと

$$x=x_p+Ra_1+(a_1^2+2Ra_2)x_0+3(Ra_3+a_1a_2)x_0^2+2\{a_2^2+2(Ra_4+a_1a_3)\}x_0^3+5(Ra_5+a_1a_4+a_2a_3)x_0^4+3\{a_3^2+2(Ra_6+a_1a_5+a_2a_4)\}x_0^5+7(Ra_7+a_1a_6+a_2a_5+a_3a_4)x_0^6+\cdots\cdots$$

で表わされる．(10)と(6)を対応させると，b_K が求まり，

$$\begin{aligned}
b_0&=x_p+Ra_1\\
b_1&=a_1^2+2Ra_2\\
b_2&=3(Ra_3+a_1a_2)\\
b_3&=2(a_2^2+2Ra_4+2a_1a_3)\\
b_4&=5(Ra_5+a_1a_4+a_2a_3)\\
b_5&=3(a_3^2+2Ra_6+2a_1a_5+a_2a_4)\\
b_6&=7(Ra_7+a_1a_6+a_2a_5+a_3a_4)\\
&\vdots\\
b_{2m-1}&=m\left\{a_m^2+2\left(Ra_{2m}+\sum_{K=1}^{m-1}a_K a_{2m-K}\right)\right\}\\
b_{2m}&=(2m+1)\left(Ra_{2m+1}+\sum_{K=1}^{m}a_K a_{2m-K+1}\right)\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{11}$$

のように表わされる．これらの式から，収差関数の係数

$$\begin{aligned}
a_1&=\frac{b_0-x_p}{R}\\
a_2&=\frac{b_1-a_2}{2R}\\
a_3&=\frac{b_2}{3R}-\frac{a_1a_2}{R}\\
a_4&=\frac{b_3}{4R}-\frac{a_2}{2R}-\frac{a_1a_3}{R}\\
a_5&=\frac{b_4}{5R}-\frac{a_1a_4}{R}-\frac{a_2a_3}{R}\\
a_6&=\frac{b_5}{6R}-\frac{a_2}{2R}-\frac{a_1a_5}{R}-\frac{a_2a_4}{R}\\
a_7&=\frac{b_6}{7R}-\frac{a_1a_6}{R}-\frac{a_2a_5}{R}-\frac{a_3a_4}{R}
\end{aligned} \tag{12}$$

が求まり，一般に

$$a_{2m}=\frac{b_{2m-1}}{2mR}-\frac{a_m^2}{2R}-\frac{1}{R}\sum_{K=1}^{m-1}a_K a_{2m-K} \tag{13}$$

$$a_{2m+1}=\frac{b_{2m}}{(2m+1)R}-\frac{1}{R}\sum_{K=1}^{m}a_K a_{2m-K+1}$$

となる．以上の式から判るように，R は光学系から求められる常数であり，b_K は光線追跡の方から求められた多項式の常数であるから，収差係数 a_i はその前の収差係数 a_{i-1} が判っていれば求められる．最初の収差係数 a_1 は，すべて既知の量からなるから，これを求めればそれに続く高次の係数は連続的につぎつぎと求めることができる．したがって，光線追跡方法によって多項式（6）を求めることで，一義的に収差係数は (12) により求まり，収差関数（5）が最後に決定される．

3. 結 論 今まで収差論で一次元の場合はほとんど取り扱われてない．これは実用方面から考えて，一次元の光学系はほとんどなく，またあるとしてもそこで収差を論じるほどの重要性がなかったようである．ところが情報論の光学への応用にともなって，レスポンス関数への種々の収差の影響が研究されるようになってきた．レスポンス関数の研究で一次元の問題を詳細に調べることは，もっと復雑な二次元の解析における予測をする場合に，重要な情報を与えてくれる．実際の解析的面から言えば，二次元ではほとんど不可能と思われる積分問題も，一次元の解析では解くことができる場合が非常に多い．したがって，一次元の収差関数がもっと研究されてしかるべきであり，特に光線追跡から求めた収差関数を使って，それのレスポンス関数への影響が重要な問題であることを考えると，この方面にそくした実用的一次元収差関数を導くことが必要である．ここで導いたものは，その意味で意義あるものと思われる．

つぎに，二次元収差関数の中でも，光軸に対し回転対称な球面収差のようなものは一方向の収差成分を求めることで，それで二次元の場合が論じることができるからここで求めた収差関数の展開方法は，高次の球面収差を求める場合にも応用できる．ここで導いた収差関数は，一次元という特別な場合にのみ適用できるものであるが，二次元に直結した方向に一次元収差関数の展開をもって行くことが今後の問題である．また高次の二次元収差関数を求める場合は，ここで行なったような厳密な方法が望まれ，この問題については他の機会に論ずる．

(1963 年 3 月 11 日受理)