

構築工学の研究における電子計算機の利用例

岡本 舜三・伯野 元彦

近年各種の研究において、電子計算機の使用が盛んであるが、筆者らも一二の研究に利用して、かなりの成果をあげることができた。すなわちアーチダムの地震時における減衰常数の推定に、またその基準振動形の推定に、あるいは、大地震時の軟弱地盤の非線形振動性状の研究に利用して満足すべき結果を得た。

1. ま え が き

計数型電子計算機は最近めざましく普及して各方面で利用されている。現在計算機を科学計算用に用いる場合、次の二つの利用方法に分けられていると思う。

一つは今まで人間が手計算で行なっていた計算を計算機に代行させる方法であり、これはたとえば橋やアーチダムの設計において行なわれているが、一つの設計プログラムを作製すれば、大きさが変わっても形状が変化しても同一形式のダムや橋ならば計算機に入れるパラメーターを変えるだけで、その設計計算が完了するといったたぐいのものである。

他の一つは研究的とでもいうべきが、モンテカルロ法等にみられるように計算機自身に数値実験を行なわせ、その結果を判断させ法則なり結果なりを得るというやりかたである。たとえば酔歩の問題は一次元であるとか、簡単な場合しか解析的には解が得られていない。この場合実際に計算機内で、人間にある確率をもって方向、距離を与え酔歩させそれを多数回繰り返して答を得るという方法は、多分に計算機に研究を行なわせるという使用方法である。

構築工学で扱う対象は複雑で、たとえば材料を例にとってもコンクリートは構成材料自身がセメント、砂、砂利と物理的性質、および大きさなどの異なったもので、均質とみなせないことが多い。また構造物の地盤の性質等をとって考えてみても、深さによって性質が無視できない程度に変わり、力学的性質は弾性的な面も塑性的な面も存在するという状態で、これらを現在可能な解析的方法で究明することは不可能ではないにしても、いろいろの困難を伴っている。

これら困難な研究課題を解析的方法で解くということも可能な場合が多々あるが、工学という立場からは、いかなる方法であろうとも結果をできるだけ正しく早く知らねばならず、その場合計算機が大いに真価を発揮するものと思われる。またその時にも前述した二つの利用方法のうち、後者の利用方法を採らざるを得なくなるであろう。著者は二三計算機を構築工学上の研究に利用してみたので、その結果を報告したいと思う。

2. アーチダムの地震時減衰常数の測定

(フーリエ変換)

アーチダムのような可撓性構造物が地震のような不規則な強制外力をうける場合に生ずる弾性振動は、各規準振動を考え、しかも粘性による各規準振動間の連成を無視するならば簡単に次式で決定できる。

$$\ddot{\xi}_n + 2h_n p_n \dot{\xi}_n + p_n^2 \xi_n = f_n(t) \quad (1)$$

ここに

ξ_n : 規準座標 h_n : n 次振動における減衰常数

p_n : n 次振動の固有振動数

$f_n(t)$: n 次振動に対する地震加速度成分

(1)式によって特定の地震に対するアーチダムの応答が計算できるわけであるが、式中の常数 h_n は現在のところ理論的に算定する方法がなく、同種の既設構造物の測定値から推定している。しかるに既設構造物に関する実測値は、通常その構造物に加振機をとりつけて、強制振動を行なわせた場合の共振現象から減衰常数を推定したものであるが、実際の構造物のように地盤を通じて振動エネルギーの大半が逃げてゆき、アーチダムのように貯水への波動エネルギーとして逃げるというように、その逸散機構に多少の非線型性が含まれていると考えられる場合、構造物が地震によって振動する際の減衰常数と、構造物上の一点で強制加振する時の値とは異なることもありうる。

そこで次のように地震時の構造物の減衰常数を測定することとした。

すなわち、アーチダム堤体上と基礎岩盤上に地震計をすえ、地震記録を得た場合、堤体上の記録には基礎岩盤上の記録と比較して、当然堤体の規準振動の影響が大きく入っているわけである。このとき規準振動の増幅の程度を知れば、その減衰常数を求めることができる。

地動が正弦振動であるとき、共振点において堤体における振動振幅と地動の振幅との間には次のような関係がある。

$$\frac{v_d}{v_r} = \frac{c_0 \int c_1 dm}{2h \int c^2 dm} \quad (2)$$

ここに

v_r : 地動振幅, v_d : 堤体の振動振幅

c_0 : 基準振動形における堤体観測点の振幅

c : 基準振動形における各点の変位

c_1 : c の地動方向の成分

dm : 堤体の要素質量

h : 基準振動の減衰常数

したがって減衰常数は次式によって求められる。

$$h = \frac{v_r c_0 \int c_1 dm}{2v_a \int c^2 dm} \quad (3)$$

この場合の v_r , v_a は地震記録からフーリエ積分によって求めなければならない。すなわち

$$v_r = \sqrt{\left[\int_0^T A_r \sin \omega t dt \right]^2 + \left[\int_0^T A_r \cos \omega t dt \right]^2} \quad (4)$$

ここに

A_r : 地動加速度

T : 振動が 0 とみなせるまでの時間

上式を計算するには地震記録を時間領域の標本化定理 (Sampling Theorem) によって適当な時間間隔に分割し、その値を Simpson 則によって計算した。その結果

は第 1 図に示す通りである。図の横軸は振動数、縦軸は振動数成分 v_r , v_a を示す。黒丸が基礎岩盤上の地震記録から得られた値、白丸は堤体上記録から得られた値である。堤体上では 5 cps 強、10 cps 強の振動が増幅されていることが図から知られるが、その増幅率から (3) 式によって減衰常数を求めると第 1 表のようである。この結果強制加振によって求められた減衰常数の値は、地震時にもほとんど変わらないこと、ただ逆対称の場合は地震観測から得られた値の方が大きいことなどが判明した。

(4) 式によるフーリエ解析は計算機 TAC を利用したが、地震記録は近地地震、遠地地震の差によって様子が

第 1 表

振動形	減衰常数	
	起振機による	地震観測による
対称 1 次	2.7%	2~3%
対称 2 次	1.5%	3~4%
逆対称	4.6%	9~11%

おおいに異なるので、標本値の数を一個の記録について決めてしまうことが好ましくなかったので任意の数のデータを処理できるようにした。

1 回の計算では 10 個の振動数成分を同時に演算するよう標本値を 1 個読み込んで計算を行ない、終わると同時に次の標本値を読み込む形式とした。したがって計算の終了は end mark 0 で指示している。また三角関数は標本値を読み込むたびに 8 桁の精度まで計算を行ない、そのため加法定理によるものより誤差は少ないと思われるが演算に時間を要する欠点がある。演算時間は標本値 250 個を 10 個の振動数に分けるのに約 30 分を要した。使用アドレスは命令 183 語であった。

3. アーチダムの上下振動数値計算 (偏微分固有値問題)

前節 (1) 式によってアーチダムの地震応答を求めたり、固有振動に関する種々の性質を調べるには、主として模型振動実験が実施されている。しかし原理的には電子計算機によっても数値的に、固有振動数、固有振動形が求められるはずである。この考えに基づき次のようにアーチダムが地震の上下動をこうむった際見られる上下動共振現象についてその振動数、振動形、振動歪等を求めた。

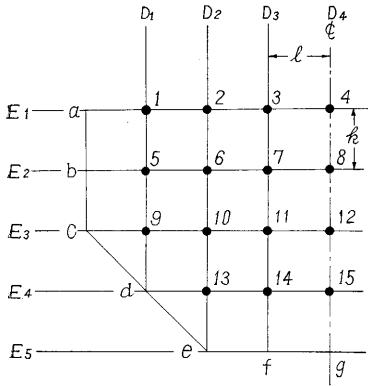
上下動共振時には半径方向変位が無視できることが、別途行なった実験からわかっている。アーチダムを円筒殻とみなし半径方向変位を無視して振動方程式をたてると、次のような二階連立偏微分方程式となる。

$$\begin{aligned} \frac{2\rho h^3}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{3(1-\sigma)}{2} \frac{\partial^2 u}{a^2 \partial \phi^2} \\ &+ \left\{ \frac{3(1+\sigma)}{2} - \frac{(1+2\sigma^2)h^2}{2(1-\sigma)a^2} \right\} \frac{\partial^2 v}{a \partial \phi \partial x} \\ \frac{2\rho h^3}{D} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left\{ \frac{3(1-\sigma)}{2} + \frac{2(1-\sigma)h^2}{a^2} \right\} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &+ \left\{ 3 - \frac{3\sigma h^2}{2(1-\sigma)a^2} \right\} \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \phi^2} \\ &+ \left\{ \frac{(1-\sigma)h^2}{2a^2} + \frac{3(1+\sigma)}{2} \right\} \frac{\partial^2 u}{a \partial \phi \partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

境界条件は堤頂にて応力 0、支持辺において変位 0 または応力が変位に比例するという二つの場合を採用した。

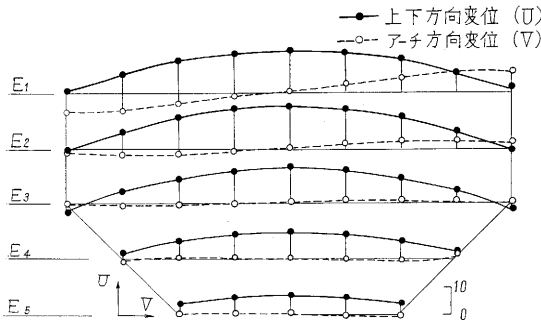
(5) 式は自由振動方程式であるからアーチダムの固有振動数、振動形を求めることは (5) 式を差分に直し、その係数行列の固有値および固有ベクトルを求めることに帰着される。アーチダムを第 2 図のような格子網に分割し計算を行なった。得られた係数行列は上述のように境界条件が支持辺によって異なっており、対称行列でないため固有値を求める方法として power method を採用した (この方法については文献 (3) を参照されたい)。

この方法の特長は、係数行列を試みのベクトルに掛け逐次近似的にスカラー量としての固有値および固有ベクトルを求めてゆくものであるだけに、求める値の精度を

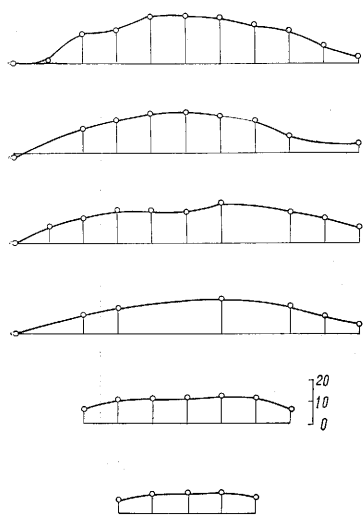


第 2 図 計算格子点

高くしようとすると、演算時間が非常に長くなる。また n 個の固有値が同時に求められるのではなく、最高次のものから順次求められる。構造物の固有振動では低次のものが必要であるから、係数行列の



第 3 図 上下縦振動共振振動形
 天端長 = 2
 提高
 地盤係数 $K_1 = 1.60 \text{ kg/cm}^3$ (平均)



第 4 図 上下縦振動共振振動形
 逆行列を作るか、まず最高次の固有値を求め、原行列の対角要素からその値を差し引いた行列について power method を適用した。こうすれば最低次の固有振動が最初に求められる。係数行列は 16 元または 19 元となり、最低次固有値を求めるのに 15 分ないし 30 分を要した。得られた固有振動形の一例を第 3 図に、また模型実験から得られた第 3 図に対応する値を第 4 図に示す。両者はかなり一致しているといえよう。固有振動数は支持辺固定の場合 14.1 cps、支持辺の応力～変位関係の比例常数を適当な値にとると 12.5

cps が得られたが、実物ダムでの測定値は 12 cps 強であった。

なおこれら振動数、振動形のほかに振動歪等についてもアーチダムの形状を種々変えた場合、同様な計算を行ない、川幅と固有振動の関係、岩盤の硬さと固有振動の関係等多くの有益な知識が得られた。

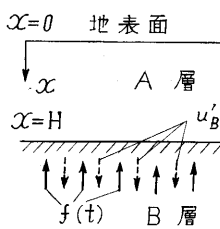
以上の計算は格子網があらく (5) 式のように二階の微分方程式であるから、何とか実際に近い値を得ることができたが、たとえばダムの曲げ振動を解く場合のように 4 階の微分方程式等に対してはこのままではかなり誤差が増えると思われる、格子点を密にとらねばならないであろう。その結果係数行列の元数が増え、演算時間も現在のままでは非常に長時間を要するものと思われる。その場合はむしろ (5) 式に強制力の項を加えた強制振動の方程式を解くことにすれば、(5) 式は単に連立一次式を解くことに帰着されるから、何回か強制力の振動数を変えて試行的に計算を行ない解の大きさの変化、解の符号の変化 (共振点をすぎれば位相は反転する) から固有値を算定するのが最善と思う。

4. 地盤の弾塑性振動について
 (非線形偏微分初期値問題)

地震動は一見不規則な振動であり、何らの周期性ももたないように思われるが、同一地震であっても地盤の違いによって (たとえば東京下町のような沖積層の厚い地盤と山手のような洪積台地との差) 振動数成分が異なっているらしいということが震害状況、地震観測結果等からいわれ始め、また多くの観測から同一地盤で大きく現われる振動数成分はほぼ一定しているとの説も提唱されこの地盤固有の周期は卓越周期と名づけられた。

そしてこの現象は地表層の多重反射による共振現象として理論的にも取り扱われた。しかしながら、それらの理論はいずれも地盤の弾性振動を論じたものであって、強震の場合にも卓越振動が微小地震の時と同様に生ずるかどうか、また生じたとしても卓越周期は地震の強さ、性質 (衝撃的であるか否か等) によって微小地震の時と異なるのではなからうかなどの点に関して疑問が残されている。

沖積層のような軟質地盤では土の応力歪関係は強震の場合かなりの非線型性を示すことが予想される。本研究は以上の諸点の一部につき数値的取扱いを行なったものである。



第 5 図 模型地盤

地盤の模型化

地盤として第 5 図に示すような表面層を一層もった模型を考える。そして基盤に下から剪断波 $f(t)$ が上昇してくるとき、各層各境界で満足すべき方程式として次の諸式を採用し

た.

(波動方程式)

$$\rho \alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_\alpha) \quad \alpha = A \text{ or } B \quad (6)$$

(境界条件)

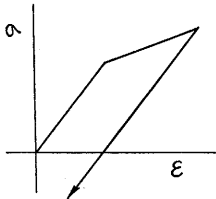
$$x=0 \text{ にて } \sigma=0, B \text{ 層にて } u_B=f(t)+u_B' \quad (7)$$

ここに ρ : 地盤の単位体積当たり質量

u : 地盤の水平変位

σ : 地盤の剪断応力

u_B' : B 層内での地震動の反射波または A 層からの屈折波



また A 層内では地盤の応力～歪関係は第6図に示すような非線形特性を持つものとし、一方 B 層内では地盤は常に弾性領域内に留るものとした。

地震動のモデル化

前述のようにモデル化された地

盤に下から入射してくる地震としていかなる地震を採用するかは、本文のような非線形の場合重要な問題である。従来多数の地震記録が得られているため実際に得られた地震動を本研究で用いることも可能であるが、それらのもっている性質は個々の地震によって多少異なっており、地震動をも一般的な性質で抽象化することが適当であると考え、次のような模型地震を考えた。既往の研究によれば基盤層においては地震の速度スペクトルはほぼ一定であるとの説があり、また別の解析では地震動の自己相関関数は時間間隔 ν が大となると急激に減少するので、かなり不規則な振動とみられる。一般に振動波形を規定する振動数成分、位相差の二量のうち前者が確定しているのに振動波形が不規則性を有するという事は各振動数成分間の位相差が不規則であるということと思う。したがって著者は次のように速度スペクトル一定、位相差不規則な振動変位 $f(t)$ を入射地震として採用した。

すなわち

$$f(t) = \sum_f \frac{b}{f} \cos 2\pi (ft + \phi) \quad (8)$$

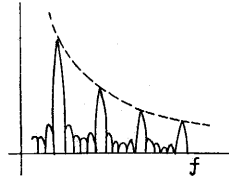
ここに

b : 常数 f : 振動数 t : 時間 ϕ : 小数点乱数

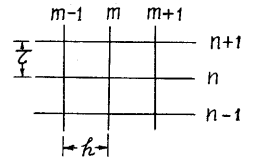
ただしこうして表わされた振動はフーリエ積分の形でなく、フーリエ級数の形で表示されているから振動数成分としては第7図に示すような値をもっている。 f の間隔を狭くすればするほど図のような成分間の凹凸が小さくなる。

数値解析

(7)式で示される境界条件を満足するように(6)式を解くには数値解析によらざるを得ない。(6)式を差分式に変形して



第7図 模型地震の振動数成分



第8図 格子網

$$\begin{aligned} u_{n,m+1} &= 2u_{n,m} - u_{n,m-1} + \frac{\tau^2}{h\rho} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \\ &= 2u_{n,m} - u_{n,m-1} \\ &\quad + \tau^2/h\rho \cdot (G_{n+1}\epsilon_{en+1} + aG_{n+1}\epsilon_{pn+1} - G_n\epsilon_{en} - aG_n\epsilon_{pn}) \end{aligned} \quad (A \text{ 層にて}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_{n,m+1} &= 2u_{n,m} - u_{n,m-1} + G\tau^2/h^2\rho \\ &\quad (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) \end{aligned}$$

$G\tau^2 = h^2\rho$ なるように h, τ を選べば

$$u_{n,m+1} = u_{n+1,m} + u_{n-1,m} - u_{n,m-1} \quad (B \text{ 層にて}) \quad (10)$$

ここに

τ : 時間刻み, h : 格子点間隔, G : 剪断弾性係数, a : 常数, ϵ_e : 弾性歪, ϵ_p : 塑性歪

(9)式および(10)式によって時間 m および $m-1$ における諸量が知られていると、時間刻み τ だけ先の変位 $u_{n,m+1}$ を知ることができる。この時 ϵ_e, ϵ_p は次のように求める。いま $m+1$ ステップにおけるすべての変位 $u_{0,m+1} \dots u_{n,m+1}$ が求められた場合、各格子点間の歪は $\epsilon_n = u_{n,m+1} - u_{n-1,m+1}/h$ で与えられる。したがって歪の増分 $\Delta\epsilon_n$ は(6)式で表わされる。

$$\Delta\epsilon_n = \epsilon_n - \epsilon_{e,n,m} - \epsilon_{p,n,m} \quad (11)$$

そして $m+1$ ステップにおける $\epsilon_{e,n}, \epsilon_{p,n}$ は(12)式となる。

$$\left. \begin{aligned} &\text{i) } |\epsilon_{e,n,m}| < \epsilon_\alpha \text{ (降伏歪) のとき} \\ &\quad \epsilon_{e,n,m+1} = \epsilon_{e,n,m} + \Delta\epsilon_n \\ &\quad \epsilon_{p,n,m+1} = \epsilon_{p,n,m} \\ &\text{ii) } |\epsilon_{e,n,m}| = \epsilon_\alpha \text{ のとき} \\ &\quad \text{(a) } \Delta\epsilon_n \cdot \epsilon_{e,n,m} > 0 \text{ ならば} \\ &\quad \quad \epsilon_{e,n,m+1} = \epsilon_{e,n,m} \\ &\quad \quad \epsilon_{p,n,m+1} = \epsilon_{p,n,m} + \Delta\epsilon_n \\ &\quad \text{(b) } \Delta\epsilon_n \cdot \epsilon_{e,n,m} < 0 \text{ ならば} \\ &\quad \quad \epsilon_{e,n,m+1} = \epsilon_{e,n,m} + \Delta\epsilon_n \\ &\quad \quad \epsilon_{p,n,m+1} = \epsilon_{p,n,m} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

以上の諸式および境界条件式により各格子点における変位がすべて得られる。

こうして得られた変位をフーリエ積分し、入射地震波のそれとの比をとれば線形の場合には地盤の増幅率が得られる。ただし本研究の場合は非線形領域に入るため上述の増幅率は意味がないので振動が弾性を超えた程度と地表速度の振動数成分の変化の様子とを比較した。

計算は東京大学計算センターに設置してある OKIT-

AC 5090 およびこれと同一機種 of 東京大学生産技術研究所制御用情報処理演算装置を用いて行なった。

数値計算例

具体的には次のような数値を用いて計算を行なった。

模型地震: $b=8.8 \text{ cm/sec}$

$f=1.0 \text{ cps} \sim 22.0 \text{ cps}$ (0.7 cps 間隔)

模型地盤: $h=1.5 \text{ m}$ 表層厚さ = 30m

G_1 (表層) = $1.836734 \times 10^4 \text{ ton/m}^2$

G_2 (基層) = $1.653061 \times 10^5 \text{ ton/m}^2$

ρ (両層) = 2 ton/m^3 , $\alpha=0.1$

弾性限界歪: $\epsilon_a=0.007, 0.014, 0.021$

時間刻み: $\tau=0.0005 \text{ 秒}$

計算結果とその考察

(8)式によって計算した模型地震は第9図のようである。これを外力として加えた場合、各弾性限界に対応する地表面変位を第9図に示す。第10図は弾性範囲内の振動における地盤の増幅率を示すものである。

第11図は塑性領域に入った振動の ϵ_a が変化した場合、地表速度のフーリエ変換結果を示すものである。

第9図から弾性限を超えると変位が増加した元へ戻らないことが知られる。第10図からは当然ながら既往の研究通り表面層の共振が0.4秒に生じていることがわかるが、高次の共振は解析した振動周期の数が不足のためはっきり存在しているかどうかかわからない。第11図からわかるように弾性限が下がるとすなわち振動が弾性限を多く超えるほど地盤の増幅は顕著でなくなり、共振周期より長周期の成分が生じてくる傾向が認められる。

5. むすび

以上の計算例はまだ計算機を本当に研究的に使用してはいない。方程式を解く方便に用いているだけである。しかしそれでも得られた成果は大きいと思う。今後は方程式もたてにくいような問題を模型化し計算機に数値実験させ解を得たいと思っている。

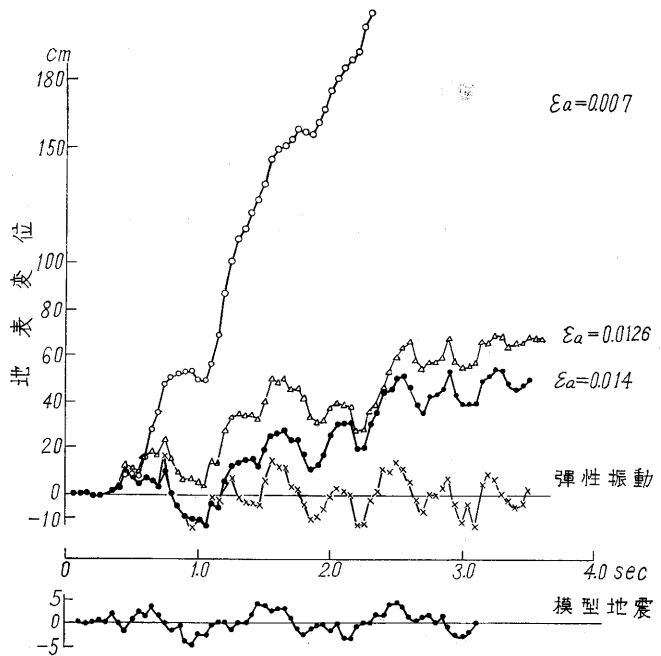
終わりに計算機の使用に関しご心配をいただいた第1部渡辺助教教授、渡部助手にお礼申し上げる。

(1962年9月11日受理)

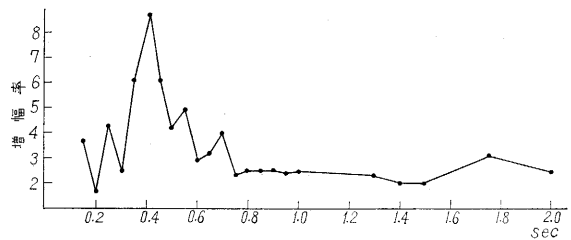
文 献

(1) 岡本, 加藤, 伯野, 宮越「アーチダムの地震動観測」土木学会論文集 第76号 1961

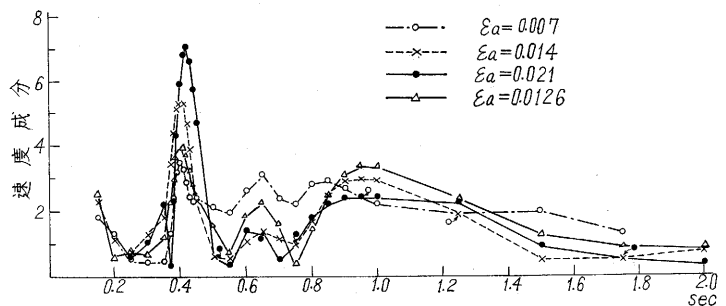
(2) Sneddon and Hill "Progress in Solid Mechanics" Vol. II North-Holland Pub. Co.
 (3) 森口, 高田「数値計算法 II」岩波現代応用数学講座
 (4) 岡本, 伯野「地盤の非線形振動に関する研究」地震工学会国内シンポジウム(1962)講演集



第9図 模型地震と地表変位



第10図 弾性振動における地盤の増幅率 (計算結果)



第11図 地表速度のフーリエ積分