

球頭ポンチによる深絞りと摩擦係数の推定

山 田 嘉 昭

球頭ポンチによる深絞り試験では、ポンチと板間の摩擦の条件、および板材の加工硬化と破断の条件が成形性あるいは限界絞り比に大きな影響を及ぼすことが知られている。本報告は、球頭ポンチとの接触部における板材の応力と歪を全歪理論によって解析し、上で述べた条件と成形性の関係を理論的に取り扱ったものである。理論の一つの応用例として、級数解をもとにした摩擦係数の推定法を提案する。本方法は簡単に適用することができ、各種の実験の説明、潤滑材の効果の評価などに役立つものとする。

1. ま え が き

球頭ポンチとは、その先端が半球面（曲率半径 $R_p = \frac{1}{2} \times$ ポンチの直径 d_1 ）のポンチをいい、ポンチの半径 $\frac{1}{2} d_1$ に比べて角隅部の曲率半径 r_p の小さい平頭ポンチと区別するための名称である。

球頭ポンチおよび平頭ポンチを用いて円筒容器の深絞り試験を行なう場合、試験の結果は（たとえば限界絞り比 L. D. R. であらわして）、試験材料、試験速度および潤滑材などによって複雑な影響を受け、得られた試験結果から矛盾のない結論を導くことはなかなか容易ではない。しかし、各種の要因を考察してみると、試験条件によって摩擦の状態または潤滑の状態が大きく変化し、しかもそれを評価する適当な方法のなかったことが、試験結果を説明する上の大きな障害の一つであったといえることができる。

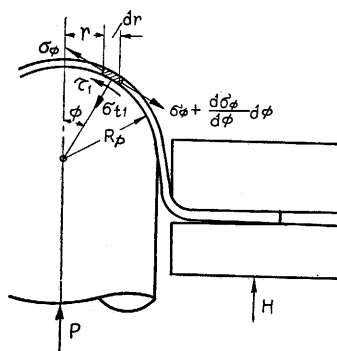
本報告は、球頭ポンチとの接触部における板内の応力と歪の解析結果を述べ、その結果を用いて摩擦係数を推定する方法の提案を行なったものである。とくに、歪分布の級数解をもとにした摩擦係数の推定法は、各種の試験例に簡単に適用することができ、実用上、便利なものと考えられる。

2. 球頭ポンチとの接触部における応力と歪の解析

球頭ポンチで深絞りを行なう場合、最初に平らであった板は、初めにポンチの先端と接触し、順次ポンチとの接触面積を拡げ、最終の段階で、球頭の全域にまきついて、半球底の容器を形成するようになる。したがって、ダイスの内角からポンチの先端にいたる間で、板はポンチの押し込み量の増加とともに刻々その形を変え、厳密には、このような形状変化を追跡して、応力と歪を解析する必要がある。

上のような厳密な取扱いは歪増分理論を用いなければならないが、解法の原理はともかくとして、数値計算が非常に面倒である。よって、本報告では、第1近似として、比較的計算の容易な全歪理論を用いて、ポンチとの接触部における応力と歪を解析する。歪増分理論および全歪理論を用いた場合に得られる解の差異を一般的に論ずることはできないが、著者は別の報告⁽¹⁾で、半径方

向の絞りにおける絞り力に、二つの理論によって大きな差異があらわれないことを示した。半径方向の絞りにおける絞り力は主として応力の釣合によってきまるものであった。したがって球頭ポンチとの接触部においても、同様に応力の釣合できまる板厚 t と子午線方向の応力 σ_ϕ の積 $t\sigma_\phi$ について、同じ結果があてはまるものと考えられる*。さらに、球頭ポンチの頂点の近傍では、板とポンチの接触が早期に完了し、応力は2軸引



張りに近い状態にあるので、この部分では、歪分布についても、全歪理論の解の誤差は比較的小さいものと考えられる。

以下、本節では、球頭ポンチとの接触部における

第1図 球頭ポンチとの接触部

全歪理論の基礎方

程式、その一般的な解法と級数解、および解析結果の例を述べる。

(1) 基礎の方程式 第1図を参照し、球頭ポンチとの接触部における釣合方程式および歪の適合条件式はそれぞれつぎのようである。

$$\frac{d(t\sigma_\phi)}{d\phi} = t(\sigma_\theta - \sigma_\phi) \cot \phi + \mu(t\sigma_\theta + t\sigma_\phi), \quad (1)$$

$$\frac{d\epsilon_\theta}{d\phi} = (\cos \phi - e^{\epsilon_\theta - \epsilon_\phi}) \frac{1}{\sin \phi}. \quad (2)$$

ただし、 σ_θ と σ_ϕ は円周方向および子午線方向の応力、 ϵ_θ と ϵ_ϕ は同じ二つの方向の対数歪、 t は変形後の板厚、 ϕ は球頭の頂点から測った角座標、 μ は摩擦係数である。(1)式と(2)式は、板が球面と接触しているところでは、歪増分理論と全歪理論に関係なく成立するものである。

* ただし、板の形状変化を考えると、いくらか全歪理論の誤差は大きいであろう。

本報告の全歪理論では、Hencky の方程式を歪の大きい範囲に拡張して、つぎの応力-歪方程式⁽⁴⁾を用いる。

$$\frac{2\varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi}{\sigma_\theta} = \frac{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi}{\sigma_\phi} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}, \quad (3)$$

ただし、 $\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon})$; $H(\bar{\varepsilon}) = s_T \left(\frac{e}{n}\right)^n \bar{\varepsilon}^n$. (4)

(4) 式の $\bar{\sigma}$ と $\bar{\varepsilon}$ は、それぞれ相当応力と相当歪
 $\bar{\sigma} = (\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2)^{\frac{1}{2}}$, $\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi^2)^{\frac{1}{2}}$ (5)

をあらわす。また、(4) 式の函数 $H(\bar{\varepsilon})$ は、材料のいわゆる n 乗硬化をあらわし、 s_T は引張強さ、 e は自然対数の底、 n は材料に固有の硬化べき数 (パラメータ) である。歪増分理論は (3) 式と (4) 式に関して全歪理論と別れ、これらの式の代わりに、

$$\frac{2d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_\phi}{\sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\theta + 2d\varepsilon_\phi}{\sigma_\phi} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}, \quad (3')$$

$$\bar{\sigma} = H(\sqrt{d\bar{\varepsilon}}), \quad (4')$$

ただし、 $d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}(d\varepsilon_\theta^2 + d\varepsilon_\theta d\varepsilon_\phi + d\varepsilon_\phi^2)^{\frac{1}{2}}$ (5')

を用いる。歪増分理論では、平らな板が球面に接触するに至るまでの経過もあわせ、変形の履歴が、 $\int d\bar{\varepsilon}$ に含まれている。

(2) 著者の解法と解の特異点 著者は、いかなる理論によっても、球頭ポンチとの接触部が取り扱われている例を知らないが、コンカル・ダイスを含めた半径方向の絞り、ダイスの内角、および平頭ポンチの角隅については、福井と協力者⁽³⁾、および室田⁽⁴⁾によって特長のある全歪理論の解法が発表されている。本報告の解法は著者の初期の解法⁽⁵⁾を改良したもので、(1) 式~(4) 式から導かれるつぎの方程式を基礎とするものである。

$$\frac{d(t\sigma_\phi)}{d\phi} = \left(\frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi} \cot \phi + 3 \mu \frac{\varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi} \right) t\sigma_\phi, \quad (6)$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{d\phi} = (\cos \phi - e^{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\phi}) \frac{1}{\sin \phi}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(t\sigma_\phi)}{t\sigma_\phi} = & \left[\frac{1}{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi} + \frac{n-1}{2} \frac{2\varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi^2} - 1 \right] d\varepsilon_\theta \\ & + \left[\frac{2}{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi} + \frac{n-1}{2} \frac{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi^2} - 1 \right] d\varepsilon_\phi. \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式の微分方程式はつぎの超越方程式

$$\begin{aligned} \frac{t\sigma_\phi}{K t_0 s_T} = & e^{-(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi)} \cdot 2(\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi) [100^2 \\ & \times (\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi^2)]^{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

ただし $K = \sqrt{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e}{n}\right)^n 100^{1-n}$ (10)

と同等である。計算にあたって、正確な数値解を必要とする場合には (6) 式~(8) 式、微分解析機による解

法⁽⁶⁾では (8) 式の代わりに (9) 式を用いた。

以上の諸方程式によって解を求めてゆくと、(8) 式の $d\varepsilon_\phi$ にかかる係数が 0、すなわち、

$$\frac{2}{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi} + \frac{n-1}{2} \frac{\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi^2} - 1 = 0 \quad (11)$$

となるような特異点に出会う場合がある*。この点では、 ε_ϕ の微係数が無限大であるが、同じ点において、板厚 t あるいは厚さ歪 ε_θ 、応力 σ_θ と σ_ϕ の微係数もまた無限大となることを示すことができる。ただし、釣合方程式 (6) 式および歪の適合条件式 (7) 式から考えて、 $t\sigma_\phi$ および ε_θ の微係数が無限大となることはあり得ない (応力および歪自体が無限大となることは実際上あり得ないから)。

(11) 式で与えられる特異点の近傍の解は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta s} & + b_1\alpha + b_1'\alpha^{3/2} + b_2\alpha^2 + b_2'\alpha^{5/2} + \dots, \\ \varepsilon_\phi = \varepsilon_{\phi s} + c_0'\alpha^{1/2} + c_1\alpha + c_1'\alpha^{3/2} + c_2\alpha^2 + c_2'\alpha^{5/2} + \dots, \\ \frac{t\sigma_\phi}{(t\sigma_\phi)_s} = 1 & + m_1\alpha + m_1'\alpha^{3/2} + m_2\alpha^2 + m_2'\alpha^{5/2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

の形に書きあらわされることを証明することができる。ただし添字 s は特異点における量を示し、 α は $|\phi - \phi_s|$ 、 ϕ_s は特異点の角座標をあらわす。(12) 式から明らかなように、 ε_ϕ などの微係数は α の $-\frac{1}{2}$ 乗で与えられるような特異性を持ち、特異点を通過するとき、微係数の値は、たとえば ∞ から $-\infty$ にかわる。

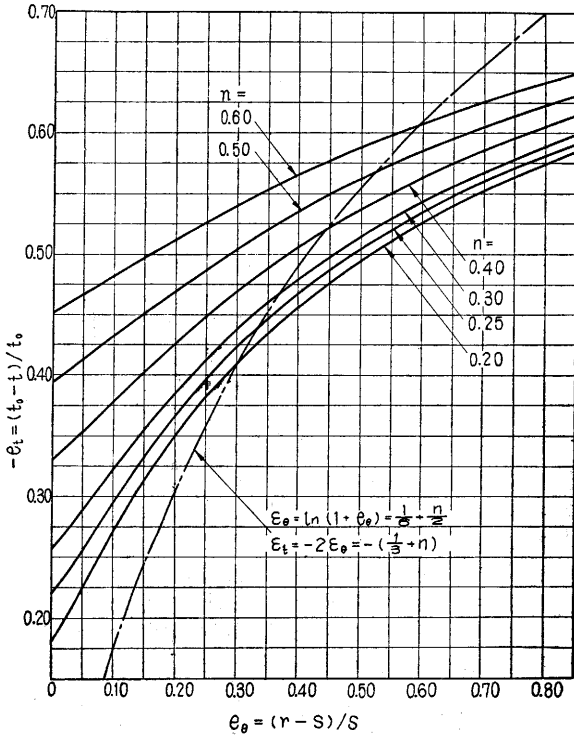
特異点の近傍における ε_θ 、 ε_ϕ および $t\sigma_\phi$ が与えられると、(12) 式および (11) 式は、特異点の角座標 ϕ_s 、および $\varepsilon_{\theta s}$ 、 $\varepsilon_{\phi s}$ 、 $(t\sigma_\phi)_s$ の値を定める四つの式となる。しかし、この ϕ_s などを求める計算は非常に手数がかかるので、特異点に近づいたところで計算を止め、特異点の確定あるいはそれを越えたところの計算は行なわなかった。微分解析機による解法でも、このような特異点があらわれると、大きな計算誤差をとまらう。第 2 図は n をパラメータとして (11) 式を満足する ε_θ と ε_ϕ の関係を求め、その結果を公称円周歪 ε_θ と公称厚さ歪 ε_θ のグラフで示したものである。

(3) 級数解 前項で述べた特異点の近傍を除くと、球頭ポンチとの接触部における級数解は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta = \varepsilon_0 + b_1\phi + b_2\phi^2 + b_3\phi^3 + b_4\phi^4 + \dots, \\ \varepsilon_\phi = \varepsilon_0 + c_1\phi + c_2\phi^2 + c_3\phi^3 + c_4\phi^4 + \dots, \\ \frac{t\sigma_\phi}{(t\sigma_\phi)_0} = 1 + m_1\phi + m_2\phi^2 + m_3\phi^3 + m_4\phi^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

の形におくことができる。ただし、 ϕ は球頭ポンチの頂点 ($\phi=0$) から測った角座標、添字 0 は頂点 $\phi=0$ における量を示す ($(\varepsilon_\theta)_{\phi=0} = (\varepsilon_\phi)_{\phi=0} = \varepsilon_0$)。 (6) 式~(8) 式に (13) 式を代入し、級数解の係数 $b_1, b_2, b_3, c_1, \dots$

* 文献 (3) の解法では、その (13) 式の分母の $AB' - A'B$ が 0 となる点に相当する。



第 2 図 解の特異点における ϵ_0 と ϵ_t の関係

…、 m_3 を求めた結果を示すとつぎのようである (ただし、以下の個々の係数値にいたる前の関係式は、いくらか対称な形に書きあらわすことができる)。

$$b_1 = \frac{1}{2}c_1 = \mu \frac{4\epsilon_0}{1+3n-6\epsilon_0}, \quad (14)$$

$$m_1 = \mu \frac{2(1+9n-18\epsilon_0)}{3(1+3n-6\epsilon_0)}; \quad (15)$$

$$2(1+3n-6\epsilon_0)b_2 = -\frac{1}{4}(1+b_1^2)(2+3n-6\epsilon_0) + \frac{b_1^2}{4\epsilon_0}(7+13n) - \frac{1}{2}\mu b_1, \quad (16)$$

$$2(1+3n-6\epsilon_0)c_2 = -\frac{1}{4}(1+b_1^2)(2-3n+6\epsilon_0) + \frac{3b_1^2}{4\epsilon_0}(7+13n) - \frac{3}{2}\mu b_1, \quad (17)$$

$$2m_2 = \frac{b_2-c_2}{3\epsilon_0} + \frac{5b_1^2}{9\epsilon_0^2} - \mu \frac{b_1}{3\epsilon_0} + m_1^2; \quad (18)$$

$$3(1+3n-6\epsilon_0)b_3 = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{6}b_1 + b_1(b_2-c_2) + \frac{1}{6}b_1^3 \right] \times (5+9n-18\epsilon_0) + \frac{2}{5}b_1 \left[\frac{1}{3} - \frac{(23+9n)b_1^2}{3\epsilon_0^2} \right] - \frac{b_1}{5\epsilon_0} \left[\frac{23b_2-38c_2}{3} - 3n(5b_2+4c_2) \right] + \frac{2}{5}\mu \left(b_2-c_2 + \frac{5b_1^2}{3\epsilon_0} \right), \quad (19)$$

$$3(1+3n-6\epsilon_0)c_3 = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{6}b_1 + b_1(b_2-c_2) + \frac{1}{6}b_1^3 \right]$$

$$\times (5-9n+18\epsilon_0) + \frac{8}{5}b_1 \left[\frac{1}{3} - \frac{(23+9n)b_1^2}{3\epsilon_0^2} \right] - \frac{4b_1}{5\epsilon_0} \left[\frac{23b_2-38c_2}{3} - 3n(5b_2+4c_2) \right] + \frac{8}{5}\mu \left(b_2-c_2 + \frac{5b_1^2}{3\epsilon_0} \right), \quad (20)$$

$$3m_3 = \frac{b_3-c_3}{3\epsilon_0} + \frac{b_1}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{25b_1^2}{9\epsilon_0^2} - \frac{4b_2-7c_2}{3\epsilon_0} \right) + \mu \left(\frac{b_2-c_2}{3\epsilon_0} + \frac{5b_1^2}{9\epsilon_0^2} \right) + 3m_1m_2 - m_1^3. \quad (21)$$

硬化べき数 $n=0.30$ の材料について、 $\epsilon_0=0.15$ 、 $\mu=0.10$ の場合の級数解を求めた結果は、

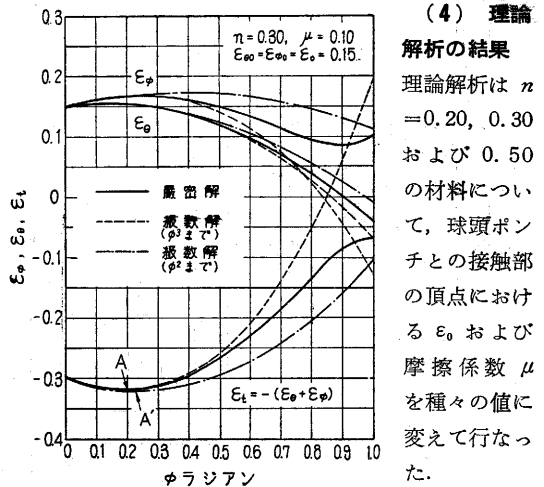
$$\epsilon_\theta = \epsilon_0 + 0.060000\phi - 0.21970\phi^2 - 0.05848\phi^3 + \dots,$$

$$\epsilon_\phi = \epsilon_0 + 0.120000\phi - 0.15730\phi^2 - 0.24023\phi^3 + \dots,$$

$$\frac{t\sigma_\phi}{(t\sigma_\phi)_0} = 1 + 0.06667\phi - 0.02933\phi^2 + 0.10402\phi^3 - \dots;$$

ただし $\epsilon_0=0.150000$, $(t\sigma_\phi)_0 = t_0\sigma_T$

である。第 3 図は、歪分布に関する厳密解と級数解の比較を示す。この例から推して、一般に ϕ^3 の項までをとれば、 $\phi < 0.40$ における級数解の精度は十分と考えることができる*。一方、級数解の ϕ^2 の項までをとった場合は、 ϕ の小さい領域においても解の精度は落ち、たとえば厚さ歪 ϵ_t の分布が極小となる点の位置に、多少の差異を生ずるのがふつうである (第 3 図の A および A' 点を参照)。一般に、級数解の ϕ^2 の項までをとった場合、厳密解と比較して、 ϵ_t の極小点は ϕ の大きい側にあり、後に述べる本報告の摩擦係数 μ の推定法の第 1 法において、 μ が過小評価される原因となる。



第 3 図 歪分布の級数解と厳密解との比較

(4) 理論解析の結果

理論解析は $n=0.20, 0.30$ および 0.50 の材料について、球頭ポンチとの接触部の頂点における ϵ_0 および摩擦係数 μ を種々の値に変えて行なった。

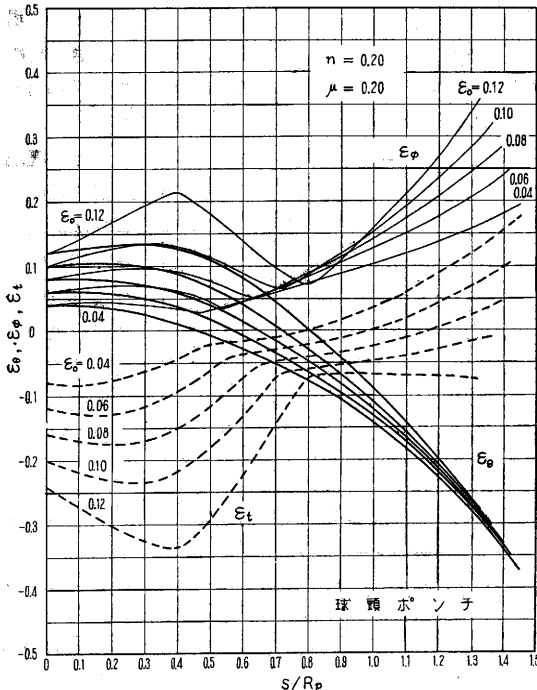
解法の方針は、(i) 最初

* 半径方向の絞り、さらにとくに液圧パルジ試験における級数解は、厳密解といっそうよく一致する (文献 6)。

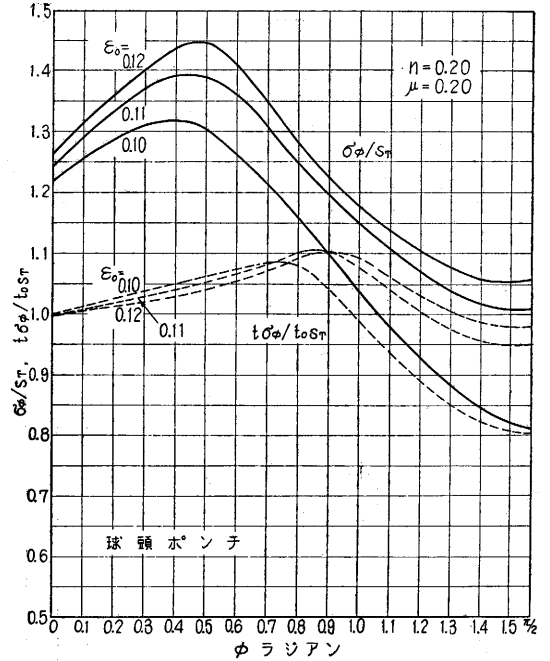
に(6)式, (7)式および(8)式によって数値解の一つを求める(Milneの方法による). (ii) つぎに(8)式の代わりに(9)式を用いて同じ問題を微分解析機によって解き, 機械の結線と解の精度を照査する. (iii) 最後に, 材料の硬化べき数 n , パラメータ ϵ_0 および μ を変え, 多くの問題を微分解析機によって解く. なお, 前項の級数解は数値解の出発値を求める目的にも使用した.

第4図は歪分布の計算例, 第5図は球面の子午線方向の応力 σ_ϕ および $t\sigma_\phi$ (t は変形後の板厚) の計算例である. 第5図にみられるように, 摩擦が存在すると, σ_ϕ が最大となる点は球の頂点 ($\phi=0$) から外れ, ポンチの胴に近い部分に移動する. そして, この点は引張応力が最大の点であるので, 球頭ポンチにおいて破断を生ずる位置に対応するものと考えることができる. 一方, $\phi = \frac{1}{2}\pi$ における $t\sigma_\phi$ に πd_1 (d_1 はポンチの直径) を乗じた $\pi d_1 t \sigma_\phi$ は, 球面からポンチの胴に移る部分における力(すなわち絞り力)に対応するものと考えることができる.

上で述べた σ_ϕ の最大値 $(\sigma_\phi)_{max}$ および絞り力に対応する $(t\sigma_\phi)_{\pi/2}$ を ϵ_0 に対してプロットすると, 摩擦係数 μ をパラメータとして, $n=0.20$ および $n=0.50$ の材料について第6図および第7図が得られる*. さらに, $(\sigma_\phi)_{max}$ と $(t\sigma_\phi)_{\pi/2}$ の関係をプロットすると第8図が得られる. 材料の引張破断応力 σ_{cr} および摩擦係数 μ

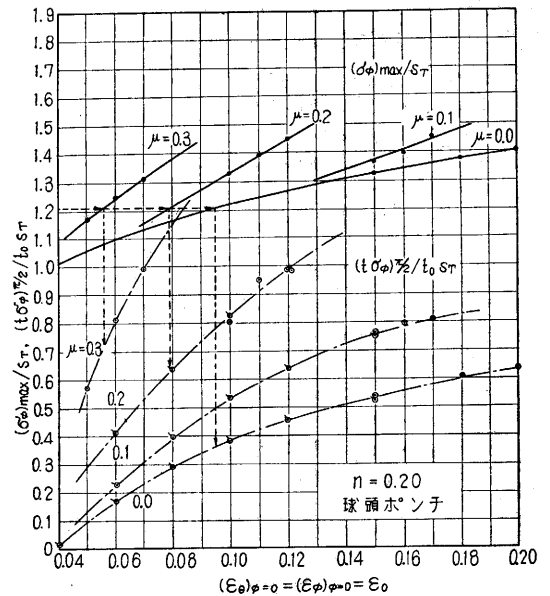


第4図 球頭ポンチにおける歪分布の解析例
(R_p : ポンチの半径; s : 板の要素の変形前の座標)



第5図 球頭ポンチにおける $t\sigma_\phi$ と σ_ϕ の分布の例
(t : 板厚, σ_ϕ : 子午線方向の応力, t_0 : 変形前の板厚, s_T : 引張強さ)

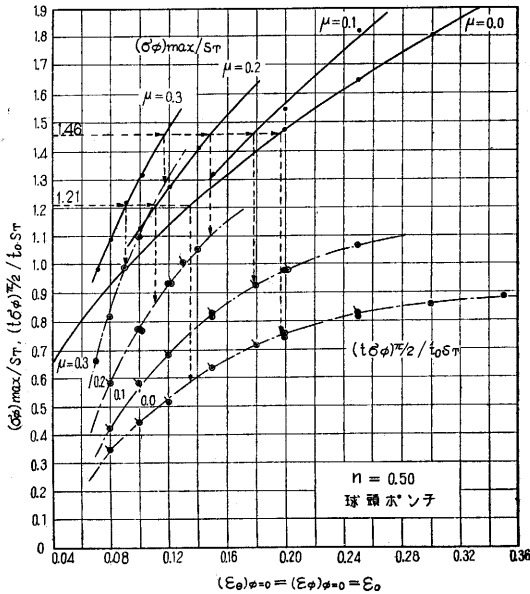
が既知であると, 第8図を用い, 点線のようにして, ポンチとの接触部における破断時のポンチ力(破断荷重)



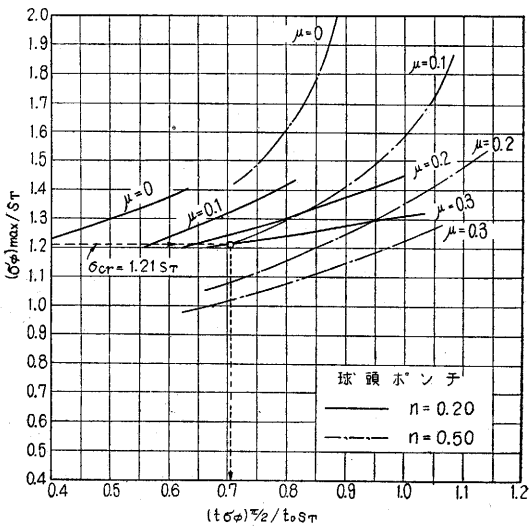
第6図 球頭ポンチとの接触部における $(\sigma_\phi)_{max}$ と $(t\sigma_\phi)_{\pi/2}$ (t_0 : 元の板厚, s_T : 引張強さ)

* これらの図の・および○印の点は計算結果を示す. 多少のパラツキは計算の誤差である. また ϵ_0 の大きい領域では既述の特異点があらわれるので, 特異点のない場合の計算結果を結ぶ線をも多少延長(外挿)して用いる.

を推定することができる*。第9図は、ポンチの直径 d_1 に対して $2r_p/d_1=0.231$ の角隅半径 r_p を持つ平頭ポンチについて、第8図と同様の解析結果を、参考として示したものである。第8図と第9図は、ポンチの形状と摩擦の条件が深絞り性に及ぼす影響を考察する上の指針となるものであるが、本報告の主題を外れるので、別の報告で実験結果とあわせ、その適用を述べることにしたい。ただ、二つの図についていちじるしい特徴をあげると、球頭ポンチにおける破断荷重はポンチ側の摩擦条

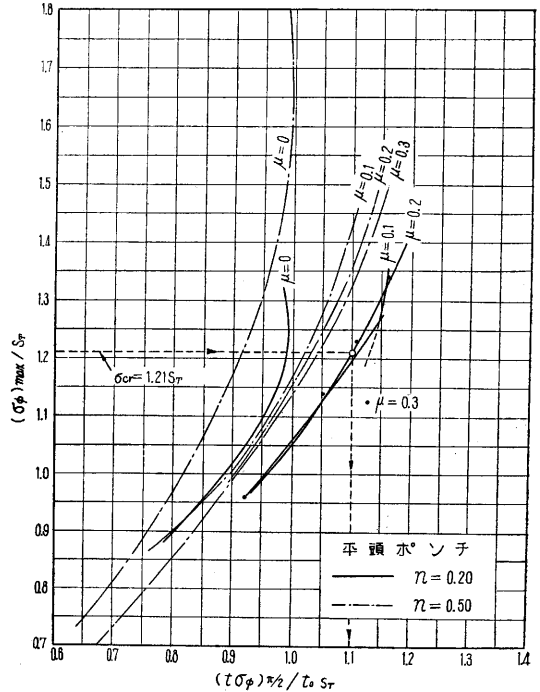


第7図 球頭ポンチとの接触部における $(\sigma_\phi)_{max}$ と $(t\sigma_\phi)_{\pi/2}$ の関係



第8図 球頭ポンチとの接触部における $(\sigma_\phi)_{max}$ と $(t\sigma_\phi)_{\pi/2}$ の関係

* ただし、破断時に板が球面に完全に巻きついていないときは、球面との接触の終端 ($\phi \approx \pi/2$) における $t\sigma_\phi$ 、および倍力効果を考えてポンチ力を求める必要がある。



第9図 平頭ポンチとの接触部における $(\sigma_\phi)_{max}$ と $(t\sigma_\phi)_{\pi/2}$ の関係 ($\beta' = 2r_p/d_1 = 0.231$)

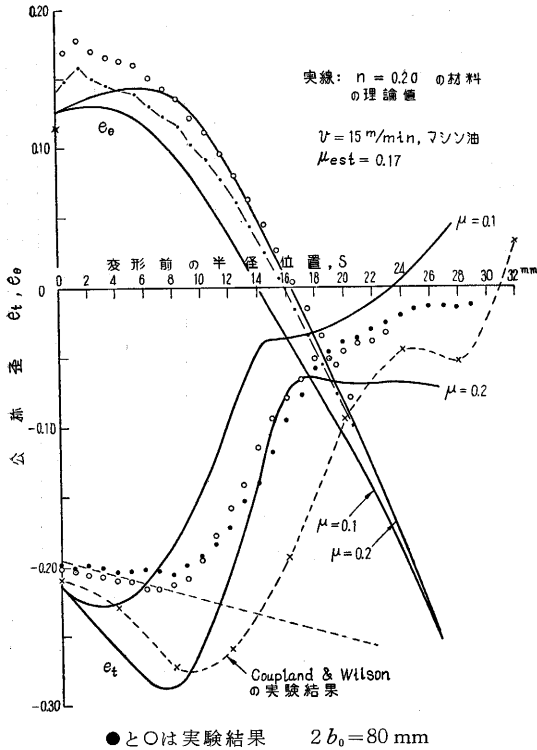
件に非常に敏感であること、一方、平頭ポンチでは、 μ が 0.1 以上であれば破断荷重が μ にほとんど影響されないことである。

3. 摩擦係数推定法の提案

前節において述べたような歪分布の解析結果 (たとえば第4図) を実験結果と比較すると、ポンチとの接触部における摩擦の状況については摩擦係数 μ の推定が可能となる。第10図と第11図は、厚さ 0.8mm の冷間圧延鋼板について、理論と実験結果の比較の1例を示す。この材料の硬化べき数 n は 0.24 であったが、比較は、 $n=0.20$ および $n=0.30$ の材料の理論値に対して行ない、また頂点の歪については、実験と完全に一致する理論解析結果がなかったので、実験値にもっとも近い値を採用した。第10図と第11図の厚さ歪 ϵ_t について理論値と実験値をみると、この実験における摩擦係数 μ は約 0.15~0.20 と推定することができる。

上で述べた方法は、本報告の理論のわく内でもっとも正確な μ の推定法であり、また接触部分によって摩擦の状況が異なる様子を推測する上にも役立つものである*。ところが、このように μ を評価しようとしても、理論解析結果がそろっていないのがふつうであり、一方、個々の実験例について新たに理論解析を行なおうとすれば、かなりの手数が要となる。そこで、多少の誤

* 一般に厚さ分布の極小点の近傍からポンチの胴に近い部分では、球の頂点の近傍におけるよりも、 μ が小さいものと考えられる。



第 10 図 球頭ポンチとの接触部における歪分布の理論解析結果と実験結果の比較 (n=0.20)

差は許すものとして、著者は、前節の級数解と厚さ歪の測定結果をもとにして、つぎのような μ の推定法を提案したい。厚さ歪を用いるのは、絞られた容器について測定がもっとも容易な量であるからである。

前節の結果を用い、厚さ(対数)歪 ε_t の級数解はつぎのようである。

$$-\varepsilon_t = \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi = 2\varepsilon_0 + (b_1 + c_1)\phi + (b_2 + c_2)\phi^2 + (b_3 + c_3)\phi^3 + \dots; \quad (22)$$

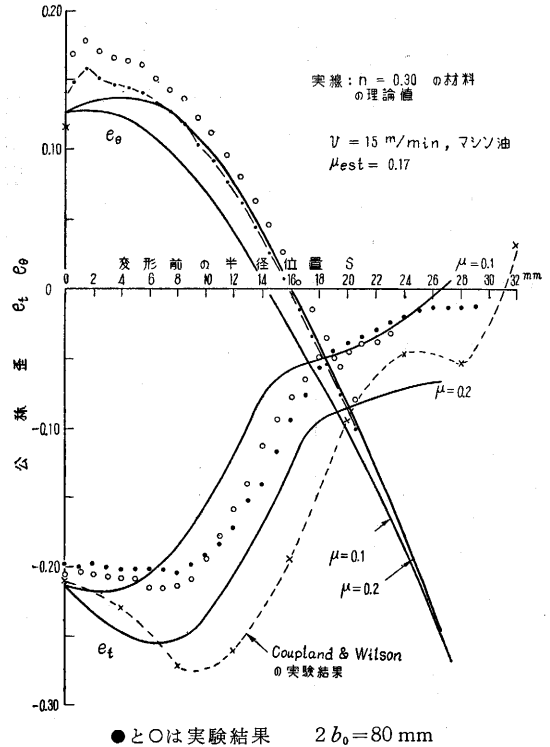
$$(1 + 3n - 6\varepsilon_0)(b_1 + c_1) = 12\mu\varepsilon_0, \quad (23)$$

$$2(1 + 3n - 6\varepsilon_0)(b_2 + c_2) = -(1 + b_1^2) + \frac{b_1^2}{\varepsilon_0^2}(7 + 13n) - 2\mu b_1 = -1 + 8\mu^2\varepsilon_0 \frac{13 + 23n + 4\varepsilon_0}{(1 + 3n - 6\varepsilon_0)^2}; \quad (24)$$

$$3(1 + 3n - 6\varepsilon_0)(b_3 + c_3) = 2\left[\frac{1}{6}b_1 + b_1(b_2 - c_2) + \frac{1}{6}b_1^3\right] + 2b_1\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{23}{3} + 9n\right)\frac{b_1^2}{\varepsilon_0^2}\right] - \frac{b_1}{\varepsilon_0}\left[\frac{23b_2 - 38c_2}{3} - 3n(5b_2 + 4c_2)\right] + 2\mu\left(b_2 - c_2 + \frac{5}{3}\frac{b_1^2}{\varepsilon_0}\right). \quad (25)$$

(22) 式から、厚さ歪 ε_t の勾配は、

$$-\frac{d\varepsilon_t}{d\phi} = (b_1 + c_1) + 2(b_2 + c_2)\phi + 3(b_3 + c_3)\phi^2 + \dots,$$



第 11 図 球頭ポンチとの接触部における歪分布の理論解析結果と実験結果の比較 (n=0.30)

したがって、球の頂点 ($\phi=0$) における ε_t の勾配は (23) 式を用いて、

$$-\left(\frac{d\varepsilon_t}{d\phi}\right)_{\phi=0} = b_1 + c_1 = \frac{12\mu\varepsilon_0}{1 + 3n - 6\varepsilon_0} \quad (26)$$

となる。また、級数解の ϕ^2 の項までをとった場合、 ε_t の勾配が 0 となる点の角座標 ($\bar{\phi}$ とおく) は、

$$\bar{\phi} = -\frac{b_1 + c_1}{2(b_2 + c_2)}. \quad (27)$$

(27) 式に (23) 式と (24) 式を代入し、

$$\bar{\phi} = \frac{12\mu\varepsilon_0}{1 - 8\mu^2\varepsilon_0 \frac{13 + 23n + 4\varepsilon_0}{(1 + 3n - 6\varepsilon_0)^2}}. \quad (28)$$

球頭ポンチの頂点 ($\phi=0$) において、板の要素の変形前の半径座標 s と角座標 ϕ の間にはつぎの関係がある。

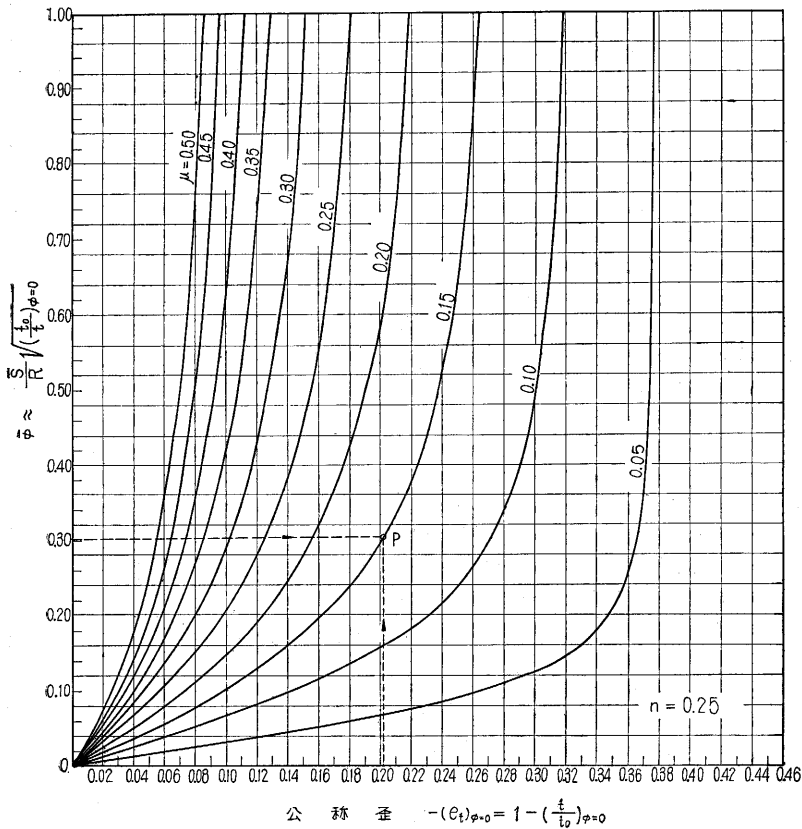
$$(\varepsilon_\theta)_{\phi=0} = (\varepsilon_\theta)_{\phi=0} = \varepsilon_0 = \ln \frac{dr}{ds} = \ln \frac{Rd\phi}{ds},$$

ゆえに $ds = Rd\phi e^{-\varepsilon_0} = Rd\phi \sqrt{\left(\frac{t}{t_0}\right)_{\phi=0}}. \quad (29)$

ただし、 r は板の要素の変形後の座標、 R は球頭ポンチの曲率半径 R_p または $R_p + \frac{1}{2}t_0$ (t_0 は元の板厚)、また $(t/t_0)_{\phi=0}$ は頂点における t/t_0 をあらわす。(29) 式を用い、さらに球頭ポンチの頂点では、

$$d\varepsilon_t = \frac{dt}{t} = \frac{dt}{t_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)_{\phi=0} \quad (30)$$

に注意すると、(26) 式から、



第 12 図 摩擦係数 μ の推定法 (第 1 法) の式を数値計算したグラフの例

$$-\frac{R}{t_0} \left(\frac{dt}{ds} \right)_{\phi=0} \sqrt{\left(\frac{t_0}{t} \right)_{\phi=0}} = -R \left(\frac{d\epsilon_t}{ds} \right)_{\phi=0} \sqrt{\left(\frac{t_0}{t} \right)_{\phi=0}} = \frac{12 \mu \epsilon_0}{1 + 3n - 6 \epsilon_0} \quad (31)$$

他方, ϵ_t の勾配が 0 となる点 $\phi = \bar{\phi}$ においては,

$$R \sin \bar{\phi} = \bar{r} = \bar{s} (1 + \bar{\epsilon}_\theta), \quad \bar{\phi} = \sin^{-1} \left[\frac{\bar{s}}{R} (1 + \bar{\epsilon}_\theta) \right] \quad (32)$$

ただし \bar{s} は, ある変形段階において, ϵ_t の勾配が 0 となる位置 ($\phi = \bar{\phi}$) を占める要素の変形前の座標, $\bar{\epsilon}_\theta$ は \bar{s} における円周公称歪の測定値である。(32)式は, 近似的に

$$\bar{\phi} \approx \frac{\bar{s}}{R} (1 + \bar{\epsilon}_\theta) \approx \frac{\bar{s}}{R} (1 + \epsilon_0) = \frac{\bar{s}}{R} \sqrt{\left(\frac{t_0}{t} \right)_{\phi=0}} \quad (33)$$

と書きあらわすことができる*。(33)式を用いると(28)式は,

$$\frac{\bar{s}}{R} \sqrt{\left(\frac{t_0}{t} \right)_{\phi=0}} = \frac{12 \mu \epsilon_0}{1 - 8 \mu^2 \epsilon_0 \frac{13 + 23n + 4 \epsilon_0}{(1 + 3n - 6 \epsilon_0)^2}} \quad (34)$$

(31) 式と (34) 式は本報告の摩擦係数 μ の推定法の基礎となる式であって, つぎのように適用する。

摩擦係数推定の第 1 法 (i) 硬化べき数 n が既知の

* (33) 式は (29) 式の積分形でもある。本報告の方法による摩擦係数 μ の推定結果が, (33) 式の近似によって受ける影響はわずかである。

材料の円形ブランクにケガキ線をつけるか格子線を焼き付け, これを球頭ポンチ (半径 R_p) で絞る。(ii) ケガキ線または焼付線のところで, 球頭との接触部の厚さ t の分布を測定し, その結果 (または厚さ歪 ϵ_t, ϵ_s) を変形前の座標 s に対してプロットした線図 (第 10 図, 第 11 図, および以下の第 14 図参照) を描く。(iii) 上の測定結果から, 球の頂点における $(t_0/t)_{\phi=0}$ および

$$\epsilon_0 = -\frac{1}{2} (\epsilon_t)_{\phi=0} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t_0}{t} \right)_{\phi=0} \quad (35)$$

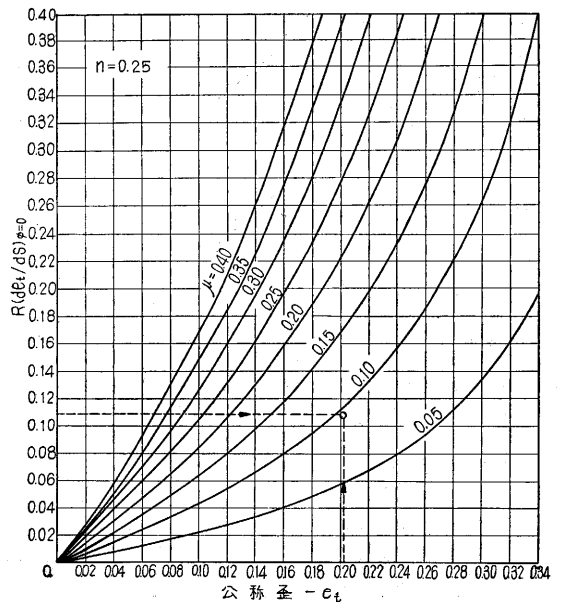
を求める。(iv) 上の (ii) で描いた線図から, 厚さ t (または厚さ歪 ϵ_t, ϵ_s) の勾配が 0 となる点の座標 \bar{s} を定め, (34) 式の左辺,

$$\frac{\bar{s}}{R} \sqrt{\left(\frac{t_0}{t} \right)_{\phi=0}} \quad (36)$$

を計算する。ただし, R にはポンチの半径 R_p または $R_p + \frac{1}{2} t_0$ を用いる。(v) 材料の n , (35) 式の ϵ_0 , および (36) 式の値を用い,

(34) 式を μ について解けば, 求める摩擦係数が得られることになる。

第 12 図は, 上記 (v) の計算を省くために描いた図



第 13 図 摩擦係数の推定法 (第 2 法) の式を数値計算したグラフの例

表の例である*。このような図を用いると、(36) 式の値および球の頂点における公称厚さ歪 $(\epsilon t)_{\phi=0}$ から、図の点線のように P 点を求め、内挿によって μ を評価することができる。材料の n の値が第 12 図のごとき図表の n と一値しない場合は、材料の n に近い二つの図表から得られる μ を用いて推定を行なえばよい。

摩擦係数推定の第 2 法 第 2 法は球の頂点における厚さ分布 (または厚さ歪分布) の勾配を用いるもので、その手順の (i)~(iii) は第 1 法の場合と同様である。以下、(iv) 厚さ t (または厚さ公称歪 ϵt) の分布から、球の頂点における勾配 $(dt/ds)_{\phi=0}$ を求める。(v) 材料の n 、(35) 式の ϵ_0 、および $(dt/ds)_{\phi=0}$ を用いて、(31) 式から μ を求める。

この第 2 法における (v) の計算も、第 13 図に例示したような線図を用いて簡略化することができる。

第 10 図と第 11 図に記入した μ_{est} の値 0.17 は上の第 1 法で推定した摩擦係数値である。第 14 図は、著者の研究室の高速度型深絞り試験機⁽⁷⁾を用いて試験の速

度を 4 段階に変え、上の第 1 法と第 2 法で μ の推定を行なった例を示す。試験速度によって厚さ歪分布が大きく変化し、それは摩擦条件の変化によるものであることをよく理解することができる。

終わりに本報告の μ の推定法に関連して注意事項を列挙するとつぎのようである。

(i) 頂点の厚さ歪 $(\epsilon t)_{\phi=0}$ の絶対値があまり大きくなるような状態で試験を行なうこと、いいかえると (31) 式や (34) 式にあらわれる $1+3n-6\epsilon_0$ が 0 に近い正值あるいは負値となるような状態で μ の推定を行なうことは好ましくない**。これは、前節で述べた解の特異点があられるため、第 14 図の速度 v_1 の場合はこのような好ましくない例の一つである。一般に絞り比 1.9~2.0 のブランクを選んで μ の推定を行なうのが適当である。(ii) 頂点の厚さ歪 $(\epsilon t)_{\phi=0}$ の値には直接の測定値 (たとえば第 14 図の A 点) を用いる代わりに、その近傍の歪を頂点に外挿して得られる値 (第 14 図の A' 点) を用いる方が適当である。(iii) 本報告の μ の推定法は、 μ の値を過小評価する傾向にあり、とくに第 2 法ではそれがいちじるしい。(iv) 曲げの影響と測定精度を考えると、あまり小さい直径のポンチは避けた方がよい。

4. む す び

本報告では、球頭ポンチを用いた深絞りにおける応力と歪の解析結果を述べ、さらに級数解をもとにして摩擦係数を推定する方法を提案した。

深絞り試験の結果は摩擦の条件によって非常に大きな影響を受け、摩擦の条件が明らかでない、実験データの判断を誤る場合もまれではない。本報告が、球頭ポンチによる深絞り試験結果の解釈、さらに一般に深絞り試験における潤滑材の効果を評価する上に役立てば幸いである。なお、球頭ポンチとの接触部における面圧 p は近似的に、

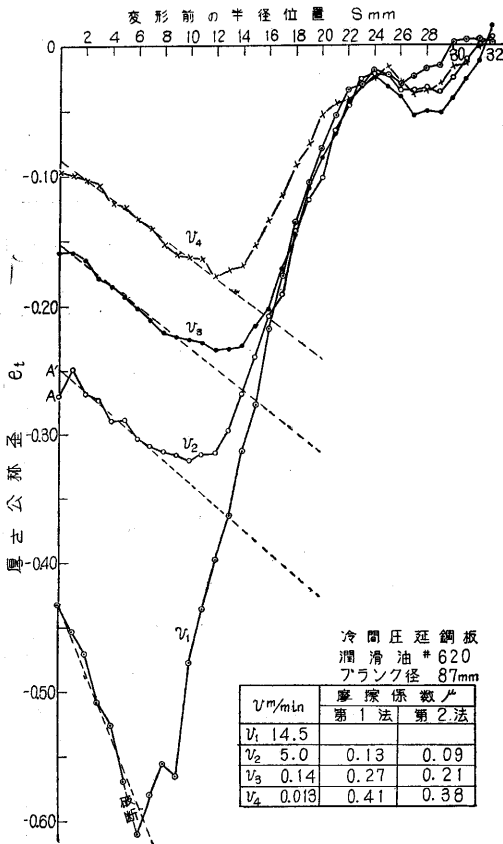
$$p/sr \approx 2t_0/R_p, \quad sr \text{ は引張強さ}$$

で与えられるので、本報告の μ は上の式から概算される面圧のもとにおけるものである。これに対し、ダイス内角 (角半径 ra) では $p/sr \approx t_0/ra$ が近似的に成立するが、一般に ra は小さいので、面圧は球頭ポンチとの接触部に比べて、かなり高くなるものと考えられる。

(1961 年 5 月 23 日受理)

文 献

- (1) 山田, 生産研究, 12-11 (1960), 446.
- (2) 山田, 中原, 塑性学 (日本機械学会, 1960), 65.
- (3) 福井, 由利, 吉田, 東大理工研報告, 8-4 (1954), 179.
- (4) 室田, 塑性加工専門講演会前刷 (1955), 47.
- (5) 山田, 日本機械学会誌, 58-434 (1955), 257.
- (6) 山田, 生産研究, 12-7 (1960), 305.
- (7) 山田, 生産研究, 12-11 (1960), 427.



第 14 図 厚さ歪分布と摩擦係数の推定

* 種々の n に対する第 12 図と同様の図表は、著者の研究室に用意があり、要求により利用に供する。

** 特異点の条件 (11) 式に $\epsilon_0 = \epsilon_s = \epsilon_0$ とおくと、 $1+3n-6\epsilon_0=0$ 。