拡張誤差関数を裏関数に含む新しいラプラス変換式

New Table of Inverse Laplace Transforms including the Associated Error Function in Image Functions

安　達　芳　夫

先に筆者は，途中で一次反応的損失のある一次元拡散問題（簡単に CRG 分布定数回路問題と呼んでもよい．筆者は半導体ダイオードおよびトランジスタのベース領域内における少数キャリアの挙動を知ることを主な目的にしている）を解くときに有用な関数として拡張誤差関数 $\Phi_z(y)$，拡張誤差補関数 $\Theta_z(y)$ を提唱したが[1]，同じ問題をやや複雑な初期条件や境界条件下で解こうとすると，ラプラス変換（本文ではもっぱら第二種ラプラス変換を使用する）した裏領域の関数（裏関数）に拡張誤差関数が $\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})$ や $\Phi_{q_\lambda x}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{z}}\right)$〔ただし $q_\lambda=\sqrt{p+\lambda}$; λ, z, x はすべて非負実数〕の形で含まれ，有名なラプラス変換表[2]で探してもただちに利用できそうな変換式は見当たらず，表関数に逆変換するのにちょっと困難を感じていた．

ところが，ふとしたきっかけで解決の糸口が得られ，紆余曲折の結果，第1表ないし第4表のように裏関数

$$pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z}),$$

$$pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)$$

〔ただし $q_\lambda=\sqrt{p+\lambda}$; x_1, x_2, z, λ はすべて非負実数；n は正または負の整数（零を含む）〕の表関数が索引できるラプラス逆変換表を整備しておくのが，利用するのに最も便利であることが分かった上に拡張誤差関数の有用なことを再認識したので報告しておきたい．なお，下記変換式のうち新しい式には！印，その中でも比較的重要な式には !! 印，特に重要な式には !!! 式を付してある．また，表関数 $A(t)$ と裏関数 $f(p)$ との間には

$$\text{順変換}\quad f(p)=p\int_{-\infty}^{\infty}e^{-pt}A(t)\,\mathbf{1}\,dt=p\int_0^{\infty}e^{-pt}A(t)\,dt$$

したがって，若干の条件の下で　(1)

$$\text{逆変換}\quad A(t)\ \mathbf{1}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}e^{pt}\frac{f(p)}{p}dp \qquad (2)$$

の関係があるが，以後これを $A(t)\supset f(p)$ で表わすことにする〔また任意裏関数に $f(p)$，その表関数に $A(t)$ の記号を使用することとする〕．

まず第1表には

$$pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})\subset F_{-n}(t;\,x_1,x_2,z;\,\lambda) \qquad (\mathrm{I})$$

$$pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)\subset G_{-n}(t;\,x_1,x_2,z;\,\lambda) \qquad (\mathrm{II})$$

（n=1，2，3 以上の n，および 0，−1）

第1表　$pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})\subset F_{-n}(t;\,x_1,\,x_2,\,z;\,\lambda)$

$pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\dfrac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)\subset G_{-n}(t;\,x_1,\,x_2,\,z;\,\lambda)$

〔$q_\lambda=\sqrt{p+\lambda}$; x_1, x_2, z, λ は非負実数〕（この注は各表に共通）

$n=1$;

$$pq_\lambda{}^{-1}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})\subset\frac{1}{\sqrt{\pi(t+z)}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\Theta_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_2\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+z}}\right)$$

〔$=F_{-1}(t;\,x_1,\,x_2,\,z;\,\lambda)$ と略記〕　(I.1) !!

$$pq_\lambda{}^{-1}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)\subset\frac{1}{\sqrt{\pi(t+z)}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\Phi_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_1\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)$$

〔$=G_{-1}(t;\,x_1,\,x_2,\,z;\,\lambda)$ と略記〕　(II.1) !!

$n=2$;

$$pq_\lambda{}^{-2}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})\subset e^{-\lambda(t+z)}\,\mathcal{G}_1\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\,\frac{x_1}{2\sqrt{t+z}},\,\frac{x_2}{2\sqrt{t+z}}\right)$$

〔$=F_{-2}(t;\,x_1,\,x_2,\,z;\,\lambda)$ と略記〕　(I.2) !!

$$pq_\lambda{}^{-2}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)\subset e^{-\lambda(t+z)}\,\mathcal{G}_2\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\,\frac{x_1}{2\sqrt{t+z}},\,\frac{x_2}{2\sqrt{t+z}}\right)$$

〔$=G_{-2}(t;\,x_1,\,x_2,\,z;\,\lambda)$ と略記〕　(II.2) !!

ただし　$\mathcal{G}_1(\omega;\,\chi_1,\,\chi_2)\equiv\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\omega}\frac{1}{1+\xi^2}e^{-(1+\xi^2)\left(\chi_1{}^2+\frac{\chi_2{}^2}{\xi^2}\right)}d\xi$　(A.1)

$$\mathcal{I}_2\ (\omega\ ;\ \chi_1,\ \chi_2) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\omega} \frac{\chi_1\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}} e^{-(1+\xi^2)\chi_1^2}\Theta_0\left[\frac{\chi_2(1+\xi^2)^{1/2}}{\xi}\right]d\xi \tag{A.2}$$

で，これらの関数の性質は別の報告[3]を参照されたい．

一般に $n=n \geqq 3$ のとき；

$$\begin{aligned}
pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z}) \subset\ & (-1)^n\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}-1\right]^*}\frac{1}{2}\,{}_nA_i\,(t+z)^i\left[\{(x_2+x_1)^{n-2(i+1)}\right.\\
&+(x_2-x_1)^{n-2(i+1)}\}F_{-2}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)+\left.\{(x_2+x_1)^{n-2(i+1)}-(x_2-x_1)^{n-2(i+1)}\}G_{-2}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)\right]\\
&+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]^*}{}_nB_i\ (t+z)^i\left[\{(x_2+x_1)^{n-1-2i}+(x_2-x_1)^{n-1-2i}\}F_{-1}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)\right.\\
&+\left.\{(x_2+x_1)^{n-1-2i}-(x_2-x_1)^{n-1-2i}\}G_{-1}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)\right]\\
&+(-1)^n\sum_{j=2}^{n-1}E_{-j}\sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{2}(n-1-j)\right]^*}\frac{1}{2}\,{}_{n,j}C_i(t+z)^i\{(x_2+x_1)^{n-1-2i-j}+(x_2-x_1)^{n-1-2i-j}\}
\end{aligned} \tag{I.n} !!$$

$$\begin{aligned}
pq_\lambda{}^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right) \subset\ & (-1)^n\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}-1\right]^*}\frac{1}{2}\,{}_nA_i(t+z)^i\left[\{x_2+x^1)^{n-2(i+1)}\right.\\
&+(x_2-x_1)^{n-2(i+1)}\}G_{-2}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)\\
&+\left.\{(x_2+x_1)^{n-2(i+1)}-(x_2-x_1)^{n-2(i+1)}\}F_{-2}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)\right]\\
&+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]^*}{}_nB_i(t+z)^i\left[\{(x_2+x_1)^{n-1-2i}+(x_2-x_1)^{n-1-2i}\}G_{-1}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)\right.\\
&+\left.\{(x_2+x_1)^{n-1-2i}-(x_2-x_1)^{n-1-2i}\}F_{-1}\ (t\ ;\ x_1,\ x_2,\ z\ ;\ \lambda)\right]\\
&+(-1)^n\sum_{j=2}^{n-1}E_{-j}\sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{2}(n-1-j)\right]^*}\frac{1}{2}\,{}_{n,j}C_i(t+z)^i\{(x_2+x_1)^{n-1-2i-j}-(x_2-x_1)^{n-1-2i-j}\}
\end{aligned} \tag{II.n} !!$$

ただし

$$\begin{aligned}
E_{-j}=&\ (-1)^j\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{z}\,e^{-\lambda(t+z)}e^{-\frac{x_1^2}{4z}}F_{-j}\ (t\ ;\ 0,\ x_2,\ 0\ ;\ 0)\\
=&\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{z}\,e^{-\lambda(t+z)}e^{-\frac{x_1^2}{4z}}\Theta_0\left(\frac{x_2}{2\sqrt{t}}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}-1\right]^*}{}_jA_kt^kx_2{}^{j-2(k+1)}\\
&-\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{z}{t}}e^{-\lambda(t+z)}e^{-\left(\frac{x_1^2}{4z}+\frac{x_2^2}{4t}\right)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}(j-1)\right]^*}{}_jB_kt^kx_2{}^{j-1-2k} \qquad (j \geqq 3)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

特に $$E_{-2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{z}\,e^{-\lambda(t+z)}e^{-\frac{x_1^2}{4z}}\Theta_0\left(\frac{x_2}{2\sqrt{t}}\right) \tag{A.3'}$$

また $${}_nA_i=\frac{1}{[n-2(i+1)]!\,i!}\ ,\quad {}_nB_i=\sum_{m=0}^{i-1}\frac{(-1)^m(2m)!}{(n-2i+2m)!\ (i-m-1)!\,m!}$$

$${}_{n,j}C_i=\sum_{m=0}^{i}\frac{(-1)^m(j-2+2m)!}{(n-2-2i+2m)!\,(i-m)!\,m!},\qquad \therefore\ {}_nB_i={}_{n,2}C_{i-1} \tag{A.4}$$

〔注意〕 (i) Σ の上にある＊印を付した〔 〕，たとえば $\left[\frac{n}{2}-1\right]^*$ は $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ を超えない最大整数を表わす．

(ii) $x_2 \pm x_1=0$ の場合を含めて $(x_2\pm x_1)^0=1$ とおいて計算すること．

たとえば $n=3$；

$$\begin{aligned}
pq_\lambda{}^{-3}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z}) \subset\ & \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{t+z}\,e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\Theta_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_2\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\ \sqrt{t+z}}\right)\right.\\
&-\left.\sqrt{z}\,e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x_1^2}{4z}\right]}\Theta_0\left(\frac{x_2}{2\sqrt{t}}\right)\right]-e^{-\lambda(t+z)}\left[x_2\,\mathcal{I}_1\left(\sqrt{\frac{t}{z}}\ ;\ \frac{x_1}{2\sqrt{t+z}},\ \frac{x_2}{2\sqrt{t+z}}\right)\right.\\
&+\left.x_1\,\mathcal{I}_2\left(\sqrt{\frac{t}{z}}\ ;\ \frac{x_1}{2\sqrt{t+z}},\ \frac{x_2}{2\sqrt{t+z}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{I.3} !$$

$$pq_\lambda^{-3}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\,\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)\subset\frac{2}{\sqrt{z}}\sqrt{t+z}\,e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\,\Phi_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_1\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)$$
$$-e^{-\lambda(t+z)}\left[x_1\mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\frac{x_1}{2\sqrt{t+z}},\frac{x_2}{2\sqrt{t+z}}\right)+x_2\mathcal{J}_2\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\frac{x_1}{2\sqrt{t+z}},\frac{x_2}{2\sqrt{t+z}}\right)\right]\quad(\text{II}.3)\,!$$

$n=0$;

$$pe^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})\subset\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(t+z)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\left[x_2\Theta_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_2\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+z}}\right)\right.$$
$$\left.+x_1\Phi_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_1\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)\right]+\frac{\sqrt{z}}{\pi\sqrt{t}\,(t+z)}e^{-\left[\lambda(t+z)+\left(\frac{x_1^2}{4z}+\frac{x_2^2}{4t}\right)\right]}\quad(\text{I}.0)\,!!$$

〔注意〕 本式は $x_1=x_2=z=0$ に適用しないこと.

$$pe^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\,\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)\subset\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(t+z)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\left[x_2\Phi_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_1\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)\right.$$
$$\left.+x_1\Theta_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_2\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+z}}\right)\right]\quad(\text{II}.0)\,!!$$

$n=-1$;

$$pq_\lambda e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})\subset\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\left[\left\{\frac{(x_1^2+x_2^2)}{4(t+z)^{5/2}}-\frac{1}{2(t+z)^{3/2}}\right\}\right.$$
$$\left.\Theta_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_2\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+z}}\right)+\frac{x_1x_2}{2(t+z)^{5/2}}\Phi_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_1\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)\right]$$
$$+\frac{x_2\sqrt{z}}{2\pi}\left\{\frac{1}{t^{1/2}(t+z)^2}+\frac{1}{t^{3/2}(t+z)}\right\}e^{-\left[\lambda(t+z)+\left(\frac{x_1^2}{4z}+\frac{x_2^2}{4t}\right)\right]}\quad(\text{I}.\bar{1})\,!!$$

〔注意〕 本式は $x_2=0$ に適用しないこと. $x_2=0$ では次式 (I. $\bar{1}'$) を用いること.

$$pq_\lambda e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})-p\frac{1}{\sqrt{\pi z}}e^{-\left(\lambda z+\frac{x^2}{4z}\right)}\subset\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4(t+z)}\right]}\left[\frac{x^2}{4(t+z)^{5/2}}-\frac{1}{2(t+z)^{3/2}}\right]\quad(\text{I}.\bar{1}')\,!!$$

〔注意〕 本式は $x=z=0$ に適用しないこと.

$$pq_\lambda e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\,\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)\subset\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4(t+z)}\right]}\left[\left\{\frac{(x_1^2+x_2^2)}{4(t+z)^{5/2}}-\frac{1}{2(t+z)^{3/2}}\right\}\Phi_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_1\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{x_1x_2}{2(t+z)^{5/2}}\Theta_{\frac{x_1x_2}{2(t+z)}}\left(\frac{x_2\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+z}}\right)\right]+\frac{x_1\sqrt{z}}{2\pi t^{1/2}(t+z)^2}e^{-\left[\lambda(t+z)+\left(\frac{x_1^2}{4z}+\frac{x_2^2}{4t}\right)\right]}\quad(\text{II}.\bar{1})\,!!$$

第 2 表 $pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})$; $pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\,\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)$ の特殊な場合

$$pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})\subset\frac{1}{\sqrt{\pi(t+z)}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4(t+z)}\right]}\quad(\text{I}.1\text{-i})\,!!!$$

$$pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z})\subset\frac{1}{\sqrt{\pi(t+z)}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4(t+z)}\right]}\Theta_0\left(\frac{x\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+z}}\right)\quad(\text{I}.1\text{-ii})\,!$$

$$pq_\lambda^{-1}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z})\subset\frac{1}{\sqrt{\pi(t+z)}}e^{-\lambda(t+z)}\quad(\text{I}.1\text{-iii})$$

$$pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}\subset\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\left(\lambda t+\frac{x^2}{4t}\right)}\quad(\text{I}/\text{II}.1\text{-iv})$$

$$pq_\lambda^{-1}\subset\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\lambda t}\quad(\text{I}/\text{II}.1\text{-v})$$

$$pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\,\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)\subset\frac{1}{\sqrt{\pi(t+z)}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4(t+z)}\right]}\Phi_0\left(\frac{x\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)\quad(\text{II}.1\text{-vi})\,!$$

を表示してある〔説明を簡単化するため, 以下では式 (I), (II) の左辺をそれぞれ $F_{-n}(p)$; $G_{-n}(p)$ と略記することもある〕. また第2表ないし第4表には, それぞれ $F_{-1}(p)$, $G_{-1}(p)$; $F_{-2}(p)$, $G_{-2}(p)$; $F_0(p)$, $G_0(p)$ の特殊な場合を次の順序に掲げてある.

(i) $x_2=0$, (ii) $x_1=0$, (iii) $x_1=x_2=0$ 〔以上は $F_{-n}(p)$ について〕; (iv) $z=0$, $x_1+x_2=x$, (v) $z=0$, $x_1=x_2=0$ 〔以上は $F_{-n}(p)$ または $G_{-n}(p)$ について〕; (vi) $x_2=0$ 〔$G_{-n}(p)$ について〕.

さて, これらの表の作成手順にはいろいろな方法があ

第3表　$pq_\lambda^{-2}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})$；$pq_\lambda^{-2}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)$ の特殊な場合

$$pq_\lambda^{-2}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z}) \subset e^{-\lambda(t+z)}\ \mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\ \frac{x}{2\sqrt{t+z}},\ 0\right) \qquad (\text{I}.2\text{-i})\ !$$

$$pq_\lambda^{-2}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z}) \subset e^{-\lambda(t+z)}\ \mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\ 0,\ \frac{x}{2\sqrt{t+z}}\right)$$

$$=e^{-\lambda(t+z)}\left[\Theta_0\left(\frac{x}{2\sqrt{t+z}}\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{z}{t}};\ \frac{x}{2\sqrt{t+z}},\ 0\right)\right] \qquad (\text{I}.2\text{-ii})\ !$$

$$pq_\lambda^{-2}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \frac{2}{\pi}e^{-\lambda(t+z)}\tan^{-1}\sqrt{\frac{t}{z}} \Leftarrow e^{-\lambda(t+z)}\ \mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\ 0,\ 0\right) \qquad (\text{I}.2\text{-iii})\ !!!$$

$$pq_\lambda^{-2}e^{-q_\lambda x} \subset e^{-\lambda t}\Theta_0\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \Leftarrow e^{-\lambda t}\ \mathcal{J}_1\left(\infty;\ \frac{x_1}{2\sqrt{t}},\ \frac{x_2}{2\sqrt{t}}\right)_{x_1+x_2=x} \qquad (\text{I}/\text{II}.2\text{-iv})$$

$$pq_\lambda^{-2} \subset e^{-\lambda t} \Leftarrow e^{-\lambda t}\ \mathcal{J}_1(\infty;\ 0,\ 0) \qquad (\text{I}/\text{II}.2\text{-v})$$

$$pq_\lambda^{-2}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\ \Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right) \subset e^{-\lambda(t+z)}\left[\Theta_0\left(\frac{x}{2\sqrt{t+z}}\right)-\Theta_0\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)\right] \Leftarrow e^{-\lambda(t+z)}\ \mathcal{J}_2\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\ \frac{x}{2\sqrt{t+z}},\ 0\right)$$

(II.2-vi) !!

〔注〕 関数 $\mathcal{J}_1$ $(\omega;\ \chi_1,\ \chi_2)$；$\mathcal{J}_2$ $(\omega;\ \chi_1,\ \chi_2)$ の性質は文献（3）を参照されたい.

第4表　$pe^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})$；$pe^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)$ の特殊な場合

$$pe^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \frac{x}{2\sqrt{\pi}(t+z)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4(t+z)}\right]}\Phi_0\left(\frac{x\sqrt{t}}{2\sqrt{z}\sqrt{t+z}}\right)+\frac{\sqrt{z}}{\pi\sqrt{t}(t+z)}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4z}\right]}$$

(I.0-i) !

$$pe^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \frac{x}{2\sqrt{\pi}(t+z)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4(t+z)}\right]}\Theta_0\left(\frac{x\sqrt{z}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+z}}\right)+\frac{\sqrt{z}}{\pi\sqrt{t}(t+z)}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4t}\right]}$$

(I.0-ii) !

$$pe^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \frac{\sqrt{z}}{\pi\sqrt{t}(t+z)}e^{-\lambda(t+z)} \qquad (\text{I}.0\text{-iii})$$

$$pe^{-q_\lambda x} \subset \frac{x}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\left(\lambda t+\frac{x^2}{4t}\right)} \qquad (\text{I}/\text{II}.0\text{-iv})$$

p　〔注〕全体の形式を整えるためには $p-p\subset 0$ と記述するのがよい.　(I/II.0-v)

$$pe^{-q_\lambda x}e^{pz}\ \Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right) \subset \frac{x}{2\sqrt{\pi}(t+z)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z)+\frac{x^2}{4(t+z)}\right]} \qquad (\text{II}.0\text{-vi})\ !!!$$

るが，次のように説明するのが一番分かりやすいであろう．第2表の式（I.1-iii)，(I/II.1-iv)，(I/II.1-v) に示すように pq_λ^{-1}，$pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}$，$pq_\lambda^{-1}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z})$ の表関数は既知であるが，次の関係があることに気付く.

$$pq_\lambda^{-1}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z})=\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}pq_\lambda^{-1}]_{t+z} \qquad (3)$$

ここで $\mathcal{L}$ はラプラス変換を表わし，$[\mathcal{L}^{-1}f(p)]_{t+z}$ は次式を意味する.

$$[\mathcal{L}^{-1}f(p)]_{t+z}=\begin{cases}A(t+z) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (4)$$

では式(3)を特殊な場合として含む $\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}]_{t+z}$ がどんな関数になるのだろうか？｣と考えるのは自然であるが，その結果得たのが第2表の式（I.1-i）すなわち次式である.

$$pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})=\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}pq_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}]_{t+z} \qquad (5)$$

これは $\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})$ を含む裏関数のうちで表関数が最も簡単，したがって最も重要な関数であるが，これから直ちに次の公式を得る.

$$\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})f(p)$$

$$\subset \int_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi}(t+z-\xi)^{1/2}}e^{-\left[\lambda(t+z-\xi)+\frac{x^2}{4(t+z-\xi)}\right]}A(\xi)d\xi \qquad (6)\ !!!$$

また式（5）の両辺を x で微分すれば，次式を得る.

$$pe^{-q_\lambda x}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)=\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}pe^{-q_\lambda x}]_{t+z} \qquad (7)$$

第5表　主な $q_\lambda^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})$; $q_\lambda^{-n}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)$

$$q_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}(t+z-\xi)^{1/2}}e^{-\left[\lambda(t+z-\xi)+\frac{x_1^2}{4(t+z-\xi)}\right]}e^{-\sqrt{\lambda}x_2}\Theta_{\sqrt{\lambda}x_2}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{\xi}}\right)d\xi \quad (\text{III}.1)\ !$$

$$q_\lambda^{-2}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}(t+z-\xi)^{1/2}}e^{-\left[\lambda(t+z-\xi)+\frac{x_1^2}{4(t+z-\xi)}\right]}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}x_2}\Phi_{\sqrt{\lambda}x_2}(\sqrt{\lambda\xi})d\xi \quad (\text{III}.2)\ !$$

$$e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right) \subset \int_0^t \frac{x_1}{2\sqrt{\pi}(t+z-\xi)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z-\xi)+\frac{x_1^2}{4(t+z-\xi)}\right]}e^{-\sqrt{\lambda}x_2}\Theta_{\sqrt{\lambda}x_2}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{\xi}}\right)d\xi \quad (\text{IV}.0)\ !$$

$$q_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right) \subset \int_0^t \frac{x_1}{2\sqrt{\pi}(t+z-\xi)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z-\xi)+\frac{x_1^2}{4(t+z-\xi)}\right]}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}x_2}\Phi_{\sqrt{\lambda}x_2}(\sqrt{\lambda\xi})d\xi \quad (\text{IV}.1)\ !$$

第6表　$q_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})$ の特殊な場合

$$q_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}x}\left\{\Phi_{\sqrt{\lambda}x}[\sqrt{\lambda(t+z)}]-\Phi_{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda z})\right\} \quad (\text{III}.1\text{-i})\ !!!$$

$$q_\lambda^{-1}e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{\Phi_0[\sqrt{\lambda(t+z)}]-\Phi_0(\sqrt{\lambda z})\right\} \quad (\text{III}.1\text{-iii})\ !!$$

$$q_\lambda^{-1}e^{-q_\lambda x} \subset \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}x}\Phi_{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda t}) \quad (\text{III/IV}.1\text{-iv})\ (!!!)$$

$$q_\lambda^{-1} \subset \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Phi_0(\sqrt{\lambda t}) \quad (\text{III/IV}.1\text{-v})$$

第7表　$e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z})$; $e^{-q_\lambda(x_1+x_2)}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right)$ の特殊な場合

$$e^{pz}\Theta_0(q_\lambda\sqrt{z}) \subset \mathcal{J}_1\left(\sqrt{\frac{t}{z}};\ \sqrt{\lambda z},\ 0\right) \quad (\text{III}.0\text{-iii})\ !!!$$

$$e^{-q_\lambda x} \subset e^{-\sqrt{\lambda}x}\Theta_{\sqrt{\lambda}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (\text{III/IV}.0\text{-iv})\ (!!!)$$

$$1 \subset 1 \quad (\text{III/IV}.0\text{-v})$$

$$e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right) \subset e^{-\sqrt{\lambda}x}\left[\Theta_{\sqrt{\lambda}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{t+z}}\right)-\Theta_{\sqrt{\lambda}x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)\right] \quad (\text{IV}.0\text{-vi})\ !!!$$

これが $\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)$ を含む裏関数のうち最も重要な関数〔第4表の式（II.0-vi）参照〕で，これから次の公式を得る．

$$e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)f(p) \subset \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi}(t+z-\xi)^{3/2}}e^{-\left[\lambda(t+z-\xi)+\frac{x^2}{4(t+z-\xi)}\right]}A(\xi)d\xi \quad (8)!!!$$

第1表の式（I.1），（I.2），（II.1），（II.2）は式(6)，(8)を用いて導出することができる．

次に第1表の式（I.n），（II.n）は次の性質を利用して導出するのが最も近道のようである．

$$-2\frac{\partial F_{-n}(p)}{\partial\lambda}=nF_{-(n+2)}(p)+x_2F_{-(n+1)}(p)+x_1G_{-(n+1)}(p)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{z}\,e^{-\left(\lambda z+\frac{x_1^2}{4z}\right)}pq_\lambda^{-(n+1)}e^{-q_\lambda x_2} \quad (9)$$

$$-2\frac{\partial G_{-n}(p)}{\partial\lambda}=nG_{-(n+2)}(p)+x_2G_{-(n+1)}(p)+x_1F_{-(n+1)}(p) \quad (10)$$

この式（I.n），（II.n）は一見非常に複雑そうであるが，$n=3$ の例〔式（I.3），（II.3）参照〕で見るように項数は有限である．しかし非常に一般的な式であるから複雑なのもまた止むを得ない．たとえば $z=x_1=x_2=\lambda=0$ というきわめて特殊な場合に，やっと既知の次式になるのだから．

n が奇数のとき，$n=2r+1$ $(r\geqq 1)$ とおけば

$$p^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)} \subset \frac{2^r}{\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}\, t^{r-\frac{1}{2}} \qquad (11\text{-}1)$$

n が偶数のとき，$n=2(r+1)$ $(r\geqq 1)$ とおけば

$$p^{-r} \subset \frac{1}{r!}t^r \qquad (11\text{-}2)$$

次に第1表の式（I.0)，(II.0)，（I.$\bar{1}$)，(II.$\bar{1}$) は次式のどれかを利用して求めるのがよい．

$$\frac{\partial F_{-n}(p)}{\partial x_2} = -F_{-(n-1)}(p) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial G_{-n}(p)}{\partial x_2} = -G_{-(n-1)}(p) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial F_{-n}(p)}{\partial x_1} = -G_{-(n-1)}(p) \qquad (14)$$

$$\frac{\partial G_{-n}(p)}{\partial x_1} = -F_{-(n-1)}(p) + \frac{1}{\sqrt{\pi z}} e^{-\left(\lambda z+\frac{x_1^2}{4z}\right)} p q_\lambda^{-n} e^{-q_\lambda x_2} \qquad (15)$$

$n\leqq 0$ では $x_2=0$ のとき用心しなければならぬことが式(15)からも分かる．

さて第1表ないし第4表を利用すれば，改めて計算をしなくても新しい変換式を多数導出することができるが，ここにはきわめて簡単な1例（この変換式が従来の変換表に掲載されていないのが不思議なほどであるが）を記すにとどめる．第3表の式（I.2-iii）の左辺に e^{-pz} を乗じて $\lambda=0$, $z=1$ と置けば

$$\Theta_0(\sqrt{p}) \subset \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{t-1}\ \mathbf{1}(t-1) \qquad (16)\ !!$$

したがって

$$\Phi_0(\sqrt{p}) \subset \mathbf{1}-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{t-1}\ \mathbf{1}(t-1) = \begin{cases} 1 & 1>t>0 \\ \frac{2}{\pi}\cot^{-1}\sqrt{t-1} & t>1 \end{cases} \qquad (17)\ !!$$

次に $q_\lambda^{-n} e^{-q_\lambda(x_1+x_2)} e^{pz} \Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z}) = \frac{1}{p}F_{-n}(p)$；$q_\lambda^{-n} e^{-q_\lambda(x_1+x_2)} e^{pz} \Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{p}G_{-n}(p)$ も実際の計算によく使用する〔むしろこの方が $F_{-n}(p)$, $G_{-n}(p)$ より頻繁に使用する〕が，今のところ $F_{-n}(p)$, $G_{-n}(p)$ ほどスマートな一般な変換式は得ていない．第5表のどれか一つ〔たとえば式（III.1)〕の表関数を実用に便利な形にまとめておく（覚えやすい簡単な関数形とし，その性質を調べ，数値計算に直ちに役立つ数表を整備する）ことが先決問題で，これさえ解決すればすべて氷解することが分かっており，読者諸賢のお知恵を拝借したい．現在は次式に頼らざるを得ない状態である．

$$\frac{1}{p}F_{-n}(p) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m F_{-[n+2(m+1)]}(p) \qquad (18)$$

$$\frac{1}{p}G_{-n}(p) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m G_{-[n+(2m+1)]}(p) \qquad (19)$$

しかし特殊な場合〔(イ) $z=0$；(ロ) $\lambda=0$；(ハ) $x_1=x_2=0$；(ニ) $\frac{1}{p}F_{-n}(p)$ については $x_2=0$ で n が奇数の場合；(ホ) $\frac{1}{p}G_{-n}(p)$ については $x_2=0$ で n が偶数の場合〕の変換式は簡単な形に記述することができていて，実用に便利している．その例を第6表と第7表に示してあるが，特に式（III.1-i)，(IV.0-vi) は重要な基本式で，それぞれ次の形で利用することも多い．

$$\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z}) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} = \mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} - \left[\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}\right]_z \qquad (20)$$

$$e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}pe^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} = \mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}e^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} - \left[\mathcal{L}^{-1}e^{-q_\lambda x}\right]_z \qquad (21)$$

以上，本文では裏関数に拡張誤差関数 $\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})$；$\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)$ を含む新しいラプラス変換式について簡単に報告したが，実際問題への応用例については別の機会にゆずりたい．終わりに常日頃ご指導ご鞭撻を賜わる星合名誉教授，高木教授，尾上助教授に厚く感謝の意を表したい．

(1961年4月28日受理)

文 献

1) 安達：生産研究 **9**, p. 1 (1957-1)

2) たとえば Erdélyi, Magnus, Oberhettinger and Tricomi: "Tables of Integral Transforms". Vol. 1. Chap. 4 and Chap. 5 (McGraw-Hill) (1954); Campbell and Foster: "Fourier Integrals for Practical Applications". (Bell Telephone System) (1931)

3) 安達，渡辺：生産研究 **13**, p. 209 (1961-6)

(31 ページよりつづく)

が，考究過程で拡散誤差関数を含んだいくつかの定積分公式・不定積分公式をも得たことを付記しておきたい．最後に星合名誉教授・高木教授および尾上助教授に厚く謝意を表したい．

(1961 年 4 月 27 日受理)

文 献

1) 安達：生産研究 **13**, p. 203 (1961-6)

2) J. C. Henderson and J. R. Tillman: P.I.E.E. part B **104**, p. 318 (1957-1)