関数 $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$ と $\mathcal{J}_2(z;x_1,x_2)$ の性質

Properties of the New Functions; $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$ and $\mathcal{J}_2(z;x_1,x_2)$

安達芳夫・渡辺　勝

1. まえがき

筆者の一人は前速報（本号掲載）[1] で裏関数に拡張誤差関数を含む新しいラプラス変換式を報告したが，その際，次式で定義した二関数 $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$，$\mathcal{J}_2(z;x_1,x_2)$ を使用した（これらの関数は数学的にも有意義であるように定義してある）．

$$\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^z\frac{1}{1+\xi^2}e^{-(1+\xi^2)\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{\xi^2}\right)}d\xi \quad (1)$$

$$\mathcal{J}_2(z;x_1,x_2)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{x_1\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}}e^{-(1+\xi^2)x_1^2}\times\Theta_0\left\{\frac{x_2(1+\xi^2)^{1/2}}{\xi}\right\}d\xi \quad (2)$$

これらの関数は，一般には既知関数で簡単に表現することはできないが，比較的単純な性質を持っており，またラプラス変換表からも想像できるように拡散現象や統計現象の説明にはよく使用する関数でもあり，さらにはこれら関数の性質を把握してこそ初めてラプラス変換表も活きるわけであるから，ここではこれら関数の主な性質（ただし z, x_1, x_2 が実変数の範囲に限定する）を報告しておく．

2. 関数 $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$ の性質

（i） まず $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$ は実変数域 $z,x_1,x_2=(-\infty,\infty)$ で次式を満足する．

$$\mathcal{J}_1(-z;x_1,x_2)=-\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2) \quad (3)$$

$$\mathcal{J}_1(z;-x_1,x_2)=\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2) \quad (4)$$

$$\mathcal{J}_1(z;x_1,-x_2)=\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2) \quad (5)$$

すなわち $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$ は z に関して奇関数；x_1, x_2 に関してはそれぞれ偶関数である．

したがって，**以下では $z,x_1,x_2=[0,\infty)$ の範囲だけで考察する**

（ii） z, x_1, x_2 がそれぞれ値0または∞をとったとき，$\mathcal{J}_1(0;x_1,x_2)=0$,

$$\mathcal{J}_1(\infty;x_1,x_2)=\Theta_0(x_1+x_2) \quad (6)$$

$$\mathcal{J}_1(z;\infty,x_2)=0 \quad (7)$$

$$\mathcal{J}_1(z;x_1,\infty)=0 \quad (8)$$

これに対して $\mathcal{J}_1(z;0,x_2)$ と $\mathcal{J}_1(z;x_1,0)$ は一般には簡単な式で表現できない．ただし特殊な場合として

$$\mathcal{J}_1(z;0,0)=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}z \quad (9)$$

$$\mathcal{J}_1(\infty;0,0)=1 \quad (10)$$

(iii) $z=z'$ と $z=\frac{1}{z'}$ の $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$ 間には次式が成立する．

$$\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)+\mathcal{J}_1\left(\frac{1}{z};x_2,x_1\right)=\Theta_0(x_1+x_2) \quad (11)$$

式 (11) の応用例として，次式などを得る．

$$\mathcal{J}_1(z;0,x_2)=\Theta_0(x_2)-\mathcal{J}_1\left(\frac{1}{z};x_2,0\right) \quad (12)$$

$$\mathcal{J}_1(1;x,x)=\frac{1}{2}\Theta_0(2x) \quad (13)$$

(iv) 以下の説明の都合上

$$\frac{2}{\pi}\int_0^z e^{-(1+\xi^2)\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{\xi^2}\right)}d\xi=\mathcal{G}(z;x_1,x_2) \quad (14)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_z^\infty\frac{1}{\xi^2}e^{-(1+\xi^2)\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{\xi^2}\right)}d\xi=\mathcal{K}(z;x_1,x_2) \quad (15)$$

とおくと，関数 $\mathcal{G}(z;x_1,x_2)$，$\mathcal{K}(z;x_1,x_2)$ はそれぞれ次式のように拡張誤差関数で表わせる．

$$\mathcal{G}(z;x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x_1}e^{-(x_1+x_2)^2}\Phi_{2x_1x_2}(x_1z)$$

（ただし $x_1\neq0$） (16)

$x_1=0$ のときは

$$\mathcal{G}(z;0,x_2)=\frac{2z}{\pi}e^{-\left(1+\frac{1}{z^2}\right)x_2^2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x_2e^{-x_2^2}\Theta_0\left(\frac{x_2}{z}\right) \quad (16')$$

$$\mathcal{K}(z;x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x_2}e^{-(x_1+x_2)^2}\Phi_{2x_1x_2}\left(\frac{x_2}{z}\right)$$

（ただし $x_2\neq0$） (17)

$x_2=0$ のときは

$$\mathcal{K}(z;x_1,x_2)=\frac{2}{\pi z}e^{-(1+z^2)x_1^2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x_1e^{-x_1^2}\Theta_0(zx_1) \quad (17')$$

なお，$\mathcal{G}(z;x_1,x_2)$ と $\mathcal{K}(z;x_1,x_2)$ の間には次の関係がある．

$$\mathcal{K}(z;x_1,x_2)=\mathcal{G}\left(\frac{1}{z};x_2,x_1\right)$$

（v） 次に $\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)$ を z, x_1, x_2 でそれぞれ微分してみると，

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+z^2}e^{-(1+z^2)\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{z^2}\right)}\underset{(=)}{>}0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{J}_1(z;x_1,x_2)=-2x_1\mathcal{G}(z;x_1,x_2)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(x_1+x_2)^2}\Phi_{2x_1x_2}(zx_1)\underset{(=)}{<}0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{I}_1(z;x_1,x_2)=-2x_2\{\mathcal{K}(0;x_1\,x_2)-\mathcal{K}(z;x_1,x_2)\}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(x_1+x_2)^2}\Theta_{2x_1x_2}\left(\frac{x_2}{z}\right)\underset{(=)}{<}0 \quad (20)$$

すなわち $\mathcal{I}_1(z;\ x_1,\ x_2)$ は x_1=一定，x_2=一定で z が 0から∞まで変化するときは0から $\Theta_0(x_1+x_2)$ まで変化する単調増加関数であり，z=一定，x_2=一定で x_1 が0から∞まで変化するときは $\mathcal{I}_1(z;\ 0,\ x_2)$ から0まで変化する単調減少関数，z=一定，x_1=一定で x_2 が 0から∞まで変化するときは $\mathcal{I}_1(z;\ x_1,\ 0)$ から0まで変化する単調減少関数である．

(vi) (ii)，(v) から $z=[0,\ \infty)$ で $\mathcal{I}_1(z;\ x_1,x_2)$ の値は次の範囲にある．

$$0\leqq\mathcal{I}_1(z;\ x_1,\ x_2)\leqq 1 \quad (21)$$

(vii) 式 (19)，(20) を利用すると，$\mathcal{I}_1(z;\ x_1,\ x_2)$ を次式で表現することもできる．

$$\mathcal{I}_1(z;x_1,x_2)$$

$$=\mathcal{I}_1(z;0,x_2)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}e^{-(\xi+x_2)^2}\Phi_{2\xi x_2}(\xi z)d\xi \quad (22\text{-}1)$$

$$=\mathcal{I}_1(z;x_1,0)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_2}e^{-(x_1+\xi)^2}\Theta_{2x_1\xi}\left(\frac{\xi}{z}\right)d\xi \quad (22\text{-}2)$$

$$=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}z-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}e^{-\xi^2}\Phi_0(\xi z)d\xi$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_2}e^{-(x_1+\xi)^2}\Theta_{2x_1\xi}\left(\frac{\xi}{z}\right)d\xi \quad (22\text{-}3)$$

$$=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}z-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_2}e^{-\xi^2}\Theta_0\left(\frac{\xi}{z}\right)d\xi$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}e^{-(\xi+x_2)^2}\Phi_{2\xi x_2}(\xi z)d\xi \quad (22\text{-}4)$$

(viii) $z=1$ で $x_1,\ x_2$ が特殊な値をとったとき，$\mathcal{I}_1(1;\ x_1,\ x_2)$ は次のように簡単な式で表わせる {式 (22) または (11) を利用する}．

$$\mathcal{I}_1(1;x_1,0)=\frac{1}{2}\{1-\Phi_0^2(x_1)\}=\frac{1}{2}\Theta_0(x_1)\{1+\Phi_0(x_1)\} \quad (23)$$

$$\mathcal{I}_1(1;0,x_2)=\frac{1}{2}\{1-\Phi_0(x_2)\}^2=\frac{1}{2}\Theta_0(x_2)\{1-\Phi_0(x_2)\} \quad (24)$$

$$\mathcal{I}_1(1;x,x)=\frac{1}{2}\Theta_0(2x) \quad (13)$$

(ix) $x_2=0$ のときの数値計算には，次の級数展開式が便利である (Henderson 等の展開式[2]) より収束性がずっと良い)．

$$\mathcal{I}_1(z;x_1,0)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\tan^{-1}z-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\gamma(n+1,x_1^2)}{n!\,(2n+1)}z^{2n+1}\right\} \quad (25\text{-}1)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\tan^{-1}z-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-e^{-x_1^2}\sum_{m=0}^{n}\frac{x_1^{2m}}{m!}\right)\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right\} \quad (25\text{-}2)$$

(x) $\mathcal{I}_1(z;x_1,x_2)$ の上下限表示式および近似式には次式が便利である．

$0<z<\infty$ にて

$$\mathcal{J}(z;x_1,x_2)>\mathcal{I}_1(z;x_1,x_2)$$
$$>\Theta_0(x_1+x_2)-\mathcal{K}(z;x_1,x_2) \quad (26)$$

$z\ll 1$ $(z<0.3)$ にて

$$\mathcal{I}_1(z;x_1,x_2)\fallingdotseq\mathcal{J}(z;x_1,x_2) \quad (27)$$

$z\gg 1$ $(z>3)$ にて

$$\mathcal{I}_1(z;x_1,x_2)\fallingdotseq\Theta_0(x_1+x_2)-\mathcal{K}(z;x_1,x_2) \quad (28)$$

なお，$\mathcal{J}(z;x_1,x_2)$，$\mathcal{K}(z;x_1,x_2)$ は式 (16)，(17) を用いて比較的簡単に計算できる．

(xi) 最後に当研究所の微分解析機を用いて求めた図表の一部を掲げておく．第1図から第3図までは $\dfrac{\mathcal{I}_1(z;x_1,x_2)}{\mathcal{I}_1(\infty;x_1,x_2)}$ と z との関係を，それぞれ $x_2^2=0;0.1;1.0$ の場合について x_1^2 を補助変数にとって図示したものである．

3. 関数 $\mathcal{I}_2(z;x_1,x_2)$ と $\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2)$ の性質

ラプラス変換表では関数 $\mathcal{I}_2(z;x_1,x_2)$ をよく使用するが，関数の性質を調べるには次式 (29) で定義した関数 $\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2)$ の性質の方が単純で見通しがよく，両者の間には式 (30) の関係があるから，以下ではもっぱら $\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2)$ の性質を記述しておく．

$$\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2)$$

$$\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z}\frac{x_1\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}}e^{-(1+\xi^2)x_1^2}\Phi_0\left\{\frac{x_2(1+\xi^2)^{1/2}}{\xi}\right\}d\xi \quad (29)$$

$$\mathcal{I}_2(z;x_1,x_2)+\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2)$$
$$=\mathcal{I}_3(z;x_1,\infty)=\mathcal{I}_2(z;x_1,0)$$
$$=\Theta_0(x_1)-\Theta_0\{x_1(1+z^2)^{1/2}\} \quad (30)$$

(i) まず $\mathcal{I}_3(z;\ x_1,\ x_2)$ は実変数域 $z,\ x_1,\ x_2=(-\infty,\ \infty)$ で次式を満足している．

$$\mathcal{I}_3(-z;x_1,x_2)=-\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2) \quad (31)$$

$$\mathcal{I}_3(z;-x_1,x_2)=-\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2) \quad (32)$$

$$\mathcal{I}_3(z;x_1,-x_2)=-\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2) \quad (33)$$

すなわち $\mathcal{I}_3(z;x_1,x_2)$ は z,x_1,x_2 に関してそれぞれ奇関数である．

したがって，以下では $z,x_1,x_2=[0,\ \infty)$ の範囲だけで考察しておく．

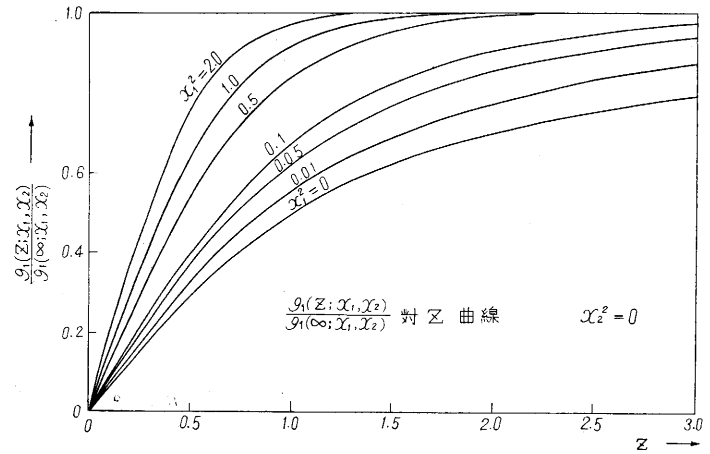
(ii) $z,x_1\,x_2$ がそれぞれ値0または∞をとったとき

$$\mathcal{I}_3(0;x_1,x_2)=0;$$

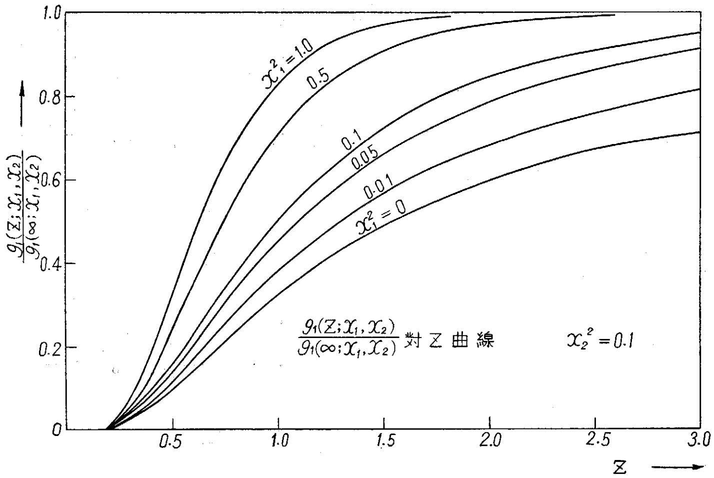
$$\mathcal{I}_3(\infty;x_1,x_2)=\Theta_0(x_1)-\Theta_0(x_1+x_2)$$
(ただし $x_1\neq 0$) (34)

$\mathcal{I}_3(z;0,x_2)=0$ (ただし $z\neq\infty$)；

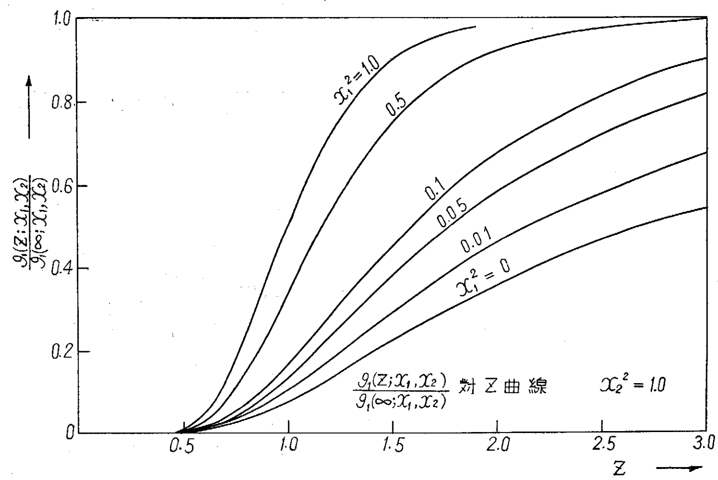
研　究　速　報



第 1 図



第 2 図



第 3 図

$$\mathcal{J}_3(z\,;\infty,x_2)=0 \tag{35}$$

$$\mathcal{J}_3(z\,;x_1,0)=0\,;$$

$$\mathcal{J}_3(z;x_1,\infty)=\Theta_0(x_1)-\Theta_0\{x_1(1+z^2)^{1/2}\} \tag{36}$$

(iii)　次に z, x_2, x_1 でそれぞれ微分してみると，

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{x_1 z}{(1+z^2)^{1/2}}\times e^{-(1+z^2)x_1^2}\Phi_0\left\{\frac{x_2(1+z^2)^{1/2}}{z}\right\}\underset{(=)}{>}0 \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)=2x_1\mathcal{J}(z\,;x_1,x_2)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(x_1+x_2)^2}\Phi_{2x_1x_2}(zx_1)\underset{(=)}{>}0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(x_1+x_2)^2}\Theta_{2x_1x_2}\left(\frac{x_2}{z}\right)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}(1+z^2)^{1/2}e^{-(1+z^2)x_1^2}\times\Phi_0\left\{\frac{(1+z^2)^{1/2}}{z}x_2\right\}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x_1^2} \tag{39}$$

したがって $\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)$ は x_1=一定，x_2=一定で z が0から ∞ まで変化するときは0から $\Theta_0(x_1)-\Theta_0(x_1+x_2)$ まで変化する単調増加関数であり，z=一定，x_1=一定で x_2 が0から∞まで変化するときは0から $\Theta_0(x_1)-\Theta_0\{x_1(1+z^2)^{1/2}\}$ まで変化する単調増加関数であるが，x_1 に関しての変化模様は一般には単調でない．

(iv)　式(38),(39) を利用すると，$\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)$ を次式で表現することもできる．

$$\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_2}e^{-(x_1+\xi)^2}\Phi_{2x_1\xi}(zx_1)d\xi \tag{40-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}e^{-(\xi+x_2)^2}\Theta_{2\xi x_2}\left(\frac{x_2}{z}\right)d\xi+\Phi_0\{(1+z^2)^{1/2}x_1\}\Phi_0\left\{\frac{(1+z^2)^{1/2}}{z}x_2\right\}-\Phi_0(x_1) \tag{40-2}$$

(v)　式(40-1),(40-2) より $z=1$ で $x_1=x_2=x$ のときの $\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)$ すなわち $\mathcal{J}_3(1\,;x,x)$ は次のように簡単な式で表わせる．

$$\mathcal{J}_3(1\,;x,x)=\Theta_0(x)-\frac{1}{2}\left\{\Theta_0(2x)+\Theta_0(\sqrt{2}x)\Theta_0(-\sqrt{2}x)\right\} \tag{41}$$

4.　む　す　び

以上，本速報では拡散現象や統計現象と密接な関係のある関数 $\mathcal{J}_1(z\,;x_1,x_2)\,;\,\mathcal{J}_2(z\,;x_1,x_2)$ {後者の代わりに $\mathcal{J}_3(z\,;x_1,x_2)$} の主な性質を簡単に述べた

(28 ページへつづく)

n が奇数のとき，$n=2r+1$ $(r\geqq 1)$ とおけば

$$p^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)} \subset \frac{2^r}{\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}\, t^{r-\frac{1}{2}} \qquad (11\text{-}1)$$

n が偶数のとき，$n=2(r+1)$ $(r\geqq 1)$ とおけば

$$p^{-r} \subset \frac{1}{r!}\, t^{r} \qquad (11\text{-}2)$$

次に第1表の式（I.0)，(II.0)，（I.$\bar{1}$)，(II.$\bar{1}$) は次式のどれかを利用して求めるのがよい．

$$\frac{\partial F_{-n}(p)}{\partial x_2} = -F_{-(n-1)}(p) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial G_{-n}(p)}{\partial x_2} = -G_{-(n-1)}(p) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial F_{-n}(p)}{\partial x_1} = -G_{-(n-1)}(p) \qquad (14)$$

$$\frac{\partial G_{-n}(p)}{\partial x_1} = -F_{-(n-1)}(p) + \frac{1}{\sqrt{\pi z}}\, e^{-\left(\lambda z+\frac{x_1^2}{4z}\right)}\, p q_\lambda^{-n} e^{-q_\lambda x_2} \qquad (15)$$

$n\leqq 0$ では $x_2=0$ のとき用心しなければならぬことが式(15)からも分かる．

さて第1表ないし第4表を利用すれば，改めて計算をしなくても新しい変換式を多数導出することができるが，ここにはきわめて簡単な1例（この変換式が従来の変換表に掲載されていないのが不思議なほどであるが）を記すにとどめる．第3表の式（I.2-iii）の左辺に e^{-pz} を乗じて $\lambda=0$, $z=1$ と置けば

$$\Theta_0(\sqrt{p}) \subset \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{t-1}\ \mathbf{1}(t-1) \qquad (16)\ !!$$

したがって

$$\Phi_0(\sqrt{p}) \subset \mathbf{1}-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{t-1}\ \mathbf{1}(t-1) = \begin{cases} 1 & 1>t>0 \\ \frac{2}{\pi}\cot^{-1}\sqrt{t-1} & t>1 \end{cases} \qquad (17)\ !!$$

次に $q_\lambda^{-n} e^{-q_\lambda(x_1+x_2)} e^{pz}\Theta_{q_\lambda x_1}(q_\lambda\sqrt{z}) = \frac{1}{p}F_{-n}(p)$；$q_\lambda^{-n} e^{-q_\lambda(x_1+x_2)} e^{pz}\Phi_{q_\lambda x_1}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{p}G_{-n}(p)$ も実際の計算によく使用する〔むしろこの方が $F_{-n}(p)$, $G_{-n}(p)$ より頻繁に使用する〕が，今のところ $F_{-n}(p)$, $G_{-n}(p)$ ほどスマートな一般な変換式は得ていない．第5表のどれか一つ〔たとえば式（III.1)〕の表関数を実用に便利な形にまとめておく（覚えやすい簡単な関数形とし，その性質を調べ，数値計算に直ちに役立つ数表を整備する）ことが先決問題で，これさえ解決すればすべて氷解することが分かっており，読者諸賢のお知恵を拝借したい．現在は次式に頼らざるを得ない状態である．

$$\frac{1}{p}F_{-n}(p) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m F_{-[n+2(m+1)]}(p) \qquad (18)$$

$$\frac{1}{p}G_{-n}(p) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m G_{-[n+(2m+1)]}(p) \qquad (19)$$

しかし特殊な場合〔(イ) $z=0$；(ロ) $\lambda=0$；(ハ) $x_1=x_2=0$；(ニ) $\frac{1}{p}F_{-n}(p)$ については $x_2=0$ で n が奇数の場合；(ホ) $\frac{1}{p}G_{-n}(p)$ については $x_2=0$ で n が偶数の場合〕の変換式は簡単な形に記述することができていて，実用に便利している．その例を第6表と第7表に示してあるが，特に式（III.1-i)，(IV.0-vi) は重要な基本式で，それぞれ次の形で利用することも多い．

$$\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z}) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} = \mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} - \left[\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{q_\lambda}e^{-q_\lambda x}\right]_{z} \qquad (20)$$

$$e^{-q_\lambda x}e^{pz}\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}pe^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} = \mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}e^{-q_\lambda x}\right]_{t+z} - \left[\mathcal{L}^{-1}e^{-q_\lambda x}\right]_{z} \qquad (21)$$

以上，本文では裏関数に拡張誤差関数 $\Theta_{q_\lambda x}(q_\lambda\sqrt{z})$；$\Phi_{q_\lambda x}\left(\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)$ を含む新しいラプラス変換式について簡単に報告したが，実際問題への応用例については別の機会にゆずりたい．終わりに常日頃ご指導ご鞭撻を賜わる星合名誉教授，高木教授，尾上助教授に厚く感謝の意を表したい．
(1961年4月28日受理)

文　献

1) 安達：生産研究 **9**, p.1 (1957-1)
2) たとえば Erdélyi, Magnus, Oberhettinger and Tricomi: "Tables of Integral Transforms". Vol. 1. Chap. 4 and Chap. 5 (McGraw-Hill) (1954); Campbell and Foster: "Fourier Integrals for Practical Applications". (Bell Telephone System) (1931)
3) 安達，渡辺：生産研究 **13**, p.209 (1961-6)

(31 ページよりつづく)

が，考究過程で拡散誤差関数を含んだいくつかの定積分公式・不定積分公式をも得たことを付記しておきたい．最後に星合名誉教授・高木教授および尾上助教授に厚く謝意を表したい．
(1961 年 4 月 27 日受理)

文　献

1) 安達：生産研究 **13**, p.203 (1961-6)
2) J. C. Henderson and J. R. Tillman: P.I.E.E. part B **104**, p.318 (1957-1)