研 究 速 報

軸対称成形における応力と歪の解析について (3)

Analysis of Stress and Strain in Axially Symmetrical Forming Process (3)
——An Approach to Formability Test of Sheet Metals——

山 田 嘉 昭

前の二つの報告，第1報[1)]と第2報[2)]では全歪理論によって各種の軸対称成形加工を解析した．

本報告では，物理的にみて全歪理論よりも妥当と考えられる歪増分理論によって，非硬化材料の半径方向の絞りを解析した結果を報告する．同じく非硬化材料の半径方向絞りについて求めた全歪理論の解は，ポンチ力に関して，歪増分理論の場合にきわめて近い値を示す．全歪理論と歪増分理論の二つから得られる解の差違を一般的に論ずることはできないが，本報告の結果は，成形性の諸問題に全歪理論の結果を用いて，誤差の少ないことを示唆するものである．

半径方向絞りにおける歪増分理論の方程式　応力-歪方程式およびそれを用いて導かれる関係式を除き，釣合方程式，適合条件式などは歪増分理論の場合も全歪理論の場合も同じである．

半径方向の絞りについて，歪増分理論と全歪理論に共通の式を書くと，摩擦項を無視して

釣合方程式 $$\frac{d(t\sigma_\phi)}{dr}=\frac{t(\sigma_\theta-\sigma_\phi)}{r}, \qquad (1)$$

適合条件式 $$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}=(1-e^{\varepsilon_\theta-\varepsilon_\phi})/r, \qquad (2)$$

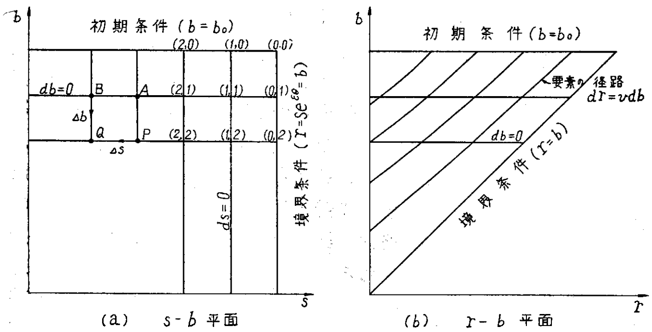
歪硬化則 $$\bar{\sigma}=f(\bar{\varepsilon}) \qquad (3)$$

である（第2報の (8) 式または (15) 式，(9) 式，および (13) 式を参照)*．上の諸式で添字 θ と ϕ はそれぞれ円周方向および半径方向の量を示す．(3) 式は von Mises の降伏条件をあらわし，$\bar{\sigma}$ と $\bar{\varepsilon}$ は

相当応力 $$\bar{\sigma}=(\sigma_\theta^2-\sigma_\theta\sigma_\phi+\sigma_\phi^2)^{\frac{1}{2}},$$

相当歪 $$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_\theta\varepsilon_\phi+\varepsilon_\phi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

によって定義される．



第1図　半径方向絞りの特性曲線

全歪理論の応力-歪方程式，すなわち第2報の (10)式に対し，歪増分理論の方程式は

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{2\sigma_\theta-\sigma_\phi}=\frac{\dot{\varepsilon}_\phi}{2\sigma_\phi-\sigma_\theta}=-\frac{\dot{\varepsilon}_t}{\sigma_\theta+\sigma_\phi}, \qquad (4)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta=v/r, \quad \dot{\varepsilon}_\phi=\partial v/\partial r \qquad (5)$$

で与えられる．$\dot{\varepsilon}_\theta$, $\dot{\varepsilon}_\phi$, $\dot{\varepsilon}_t=\dot{t}/t$ はそれぞれ円周，半径および板厚方向の歪速度，t は板厚，v は半径方向の速度をあらわす．本報告では時間の尺度として，絞りの各段階におけるブランクの外半径 b を採ることにする(以下の第2図を参照)．

解法　前項の諸方程式から，$db=0$ および要素の径路 $dr=vdb$ を特性曲線とする次の微分方程式が得られる（b は時間の尺度に選んだブランクの外半径)．

$db=0$ 上において，

$$d(t\sigma_\phi)/dr=t(\sigma_\theta-\sigma_\phi)/r, \qquad (1')$$

$$d\varepsilon_\theta/dr=(1-e^{\varepsilon_\theta-\varepsilon_\phi})/r, \qquad (2')$$

$$\frac{dv}{dr}=\frac{2\sigma_\phi-\sigma_\theta}{2\sigma_\theta-\sigma_\phi}\frac{v}{r}. \qquad (4')$$

$dr=vdb$ 上において，

$$\dot{\varepsilon}_\theta=d\varepsilon_\theta/db=v/r, \qquad (5')$$

$$\dot{t}=\frac{dt}{db}=-\frac{\sigma_\theta+\sigma_\phi}{2\sigma_\theta-\sigma_\phi}\frac{v}{r}t, \qquad (4'')$$

硬化則 $\bar{\sigma}=f(\bar{\varepsilon})$. (3′)

ブランク内の各要素の最初の位置を s，変形の各段階における位置を r とすると，円周方向および半径方向の歪はそれぞれ

$$\varepsilon_\theta=\ln\left(\frac{r}{s}\right), \quad \varepsilon_\phi=\ln\left(\frac{dr}{ds}\right) \qquad (6)$$

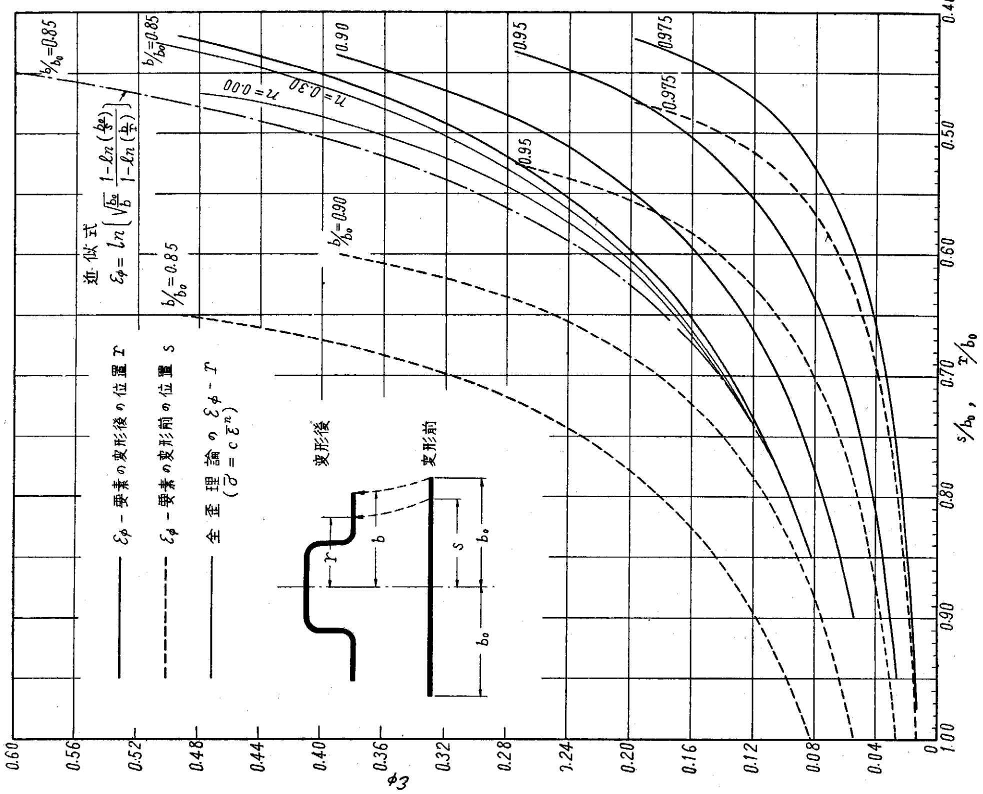
で与えれれる（(5) 式はこの (6) 式の微分形である)．数値計算にあたっては，(6) 式を用いて独立変数 r を s にかえ，上の諸式を次の差分方程式に書きかえた．s を独立変数とすれば，第1図 (a) のように，s-b 平面内の特性曲線は直角網目となる．第1図 (a) のB点およびP点の解を既知として，Q点では

$$(t\sigma_\phi)_Q=(t\sigma_\phi)_P+\left[\frac{t(\sigma_\theta-\sigma_\phi)}{s}e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}\right]_P\Delta s, \qquad (7)$$

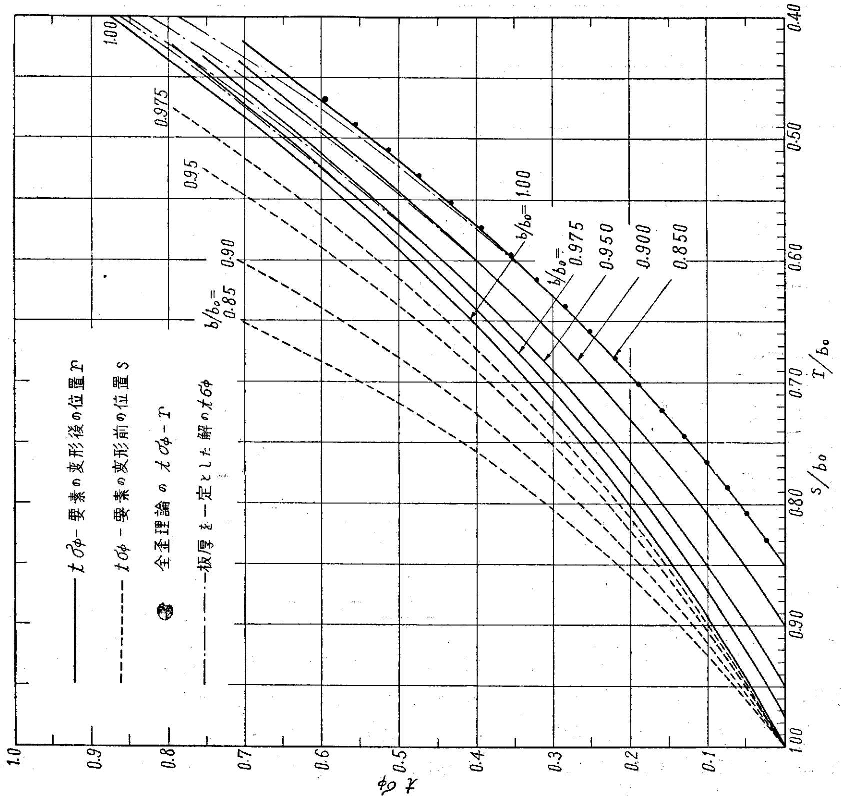
$$(\varepsilon_\theta)_Q=(\varepsilon_\theta)_P+[(e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}-1)/s]_P\Delta s, \qquad (8)$$

$$(v)_Q=(v)_P+\left[\frac{2\sigma_\phi-\sigma_\theta}{2\sigma_\theta-\sigma_\phi}\frac{v}{s}e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}\right]_P\Delta s. \qquad (9)$$

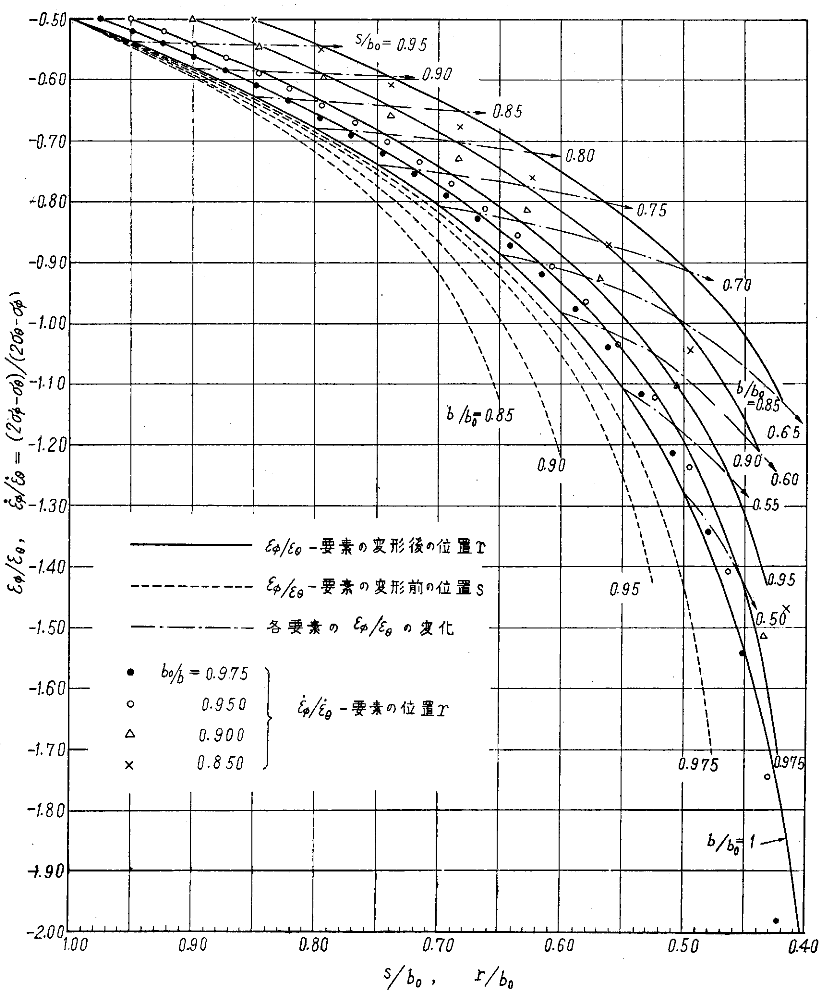
* 第2報の (13) 式は $\bar{\sigma}=f(\bar{\varepsilon})=c\bar{\varepsilon}^n$ の誤植．



第２図 歪増分理論による半径方向の歪 ε_ϕ（非硬化材料）と全歪理論の比較



第３図 歪増分理論による $t\sigma_\phi$ と全歪理論の比較
（t は板厚，σ_ϕ は半径方向の応力，非硬化材料）．
$t\sigma_\phi$ には二つの理論による差がほとんどなく，
全歪理論を用いた解の近似性はよい



第４図 歪増分理論から得られる歪比 $\varepsilon_\phi/\varepsilon_\theta$ および歪速度比 $\dot{\varepsilon}_\phi/\dot{\varepsilon}_\theta$（非硬化材料）

$$(\varepsilon_\theta)_Q=(\varepsilon_\theta)_B+\left[\frac{v}{s}e^{-\varepsilon_\theta}\right]_B\Delta b, \tag{10}$$

$$(t)_Q=(t)_B-\left[\frac{\sigma_\theta+\sigma_\phi}{2\sigma_\theta-\sigma_\phi}\frac{v}{s}e^{-\varepsilon_\theta}t\right]_B\Delta b. \tag{11}$$

Q 点の $(\varepsilon_\theta)_Q$ を求めるにあたって，(8) 式と (10) 式はまったく同等である．実際の計算では (10) 式を用いて ε_θ を求め，(8) 式は得られた解の検定に使用した．(7) 式～(11) 式によって得た諸量を用い，残された量 ε_ϕ と σ_θ は

$$\varepsilon_\phi=-(\varepsilon_\theta+\varepsilon_t), \tag{12}$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2}\left[\sigma_\phi-\sqrt{4f(\bar{\varepsilon})^2-3\sigma_\phi^2}\right] \tag{13}$$

により計算することができる．

計算結果 計算は非硬化材料 $f(\bar{\varepsilon})=Y(=一定)$ について行なった．刻み Δs と Δb は加工の初期において 0.025，その後では 0.05 である ($b_0=1$)．

初期条件は前報の (17) 式と (18) 式，すなわち $b=b_0$ (b_0 はブランクの最初の外半径) において

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta&=-\frac{2}{\sqrt{3}}Y\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),\\ \sigma_\phi&=\frac{2}{\sqrt{3}}Y\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right),\\ \frac{v^2}{v_0^2}&=e^{\sqrt{3}(\theta-\theta_b)}\frac{\cos\theta_b}{\cos\theta},\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ただし

$$\frac{s^2}{b_0^2}=e^{-\sqrt{3}(\theta-\theta_b)}\frac{\cos\theta_b}{\cos\theta},\quad \theta_b=-\frac{1}{6}\pi \tag{15}$$

で与えられる．境界条件は各変形段階のブランク外周 $r=b$ において，次式で表示される．

$$\sigma_\phi=0,\quad \varepsilon_\theta=-2\varepsilon_\phi=\ln(r/s). \tag{16}$$

なお，特性曲線 $s=$一定または $b=$一定の上で相隣る

2点以上の解を求め終わった後は，(7) 式～(11)式に示した差分方程式の代わりに，常微分方程式でよく用いられている

予測子 $y_{n+1}=y_{n-1}+2hy_n'$,

修正子 $y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h(y_n'+y'_{n+1})$

によって[3]計算を進めた.

第2図と第3図は計算結果の一部を示し，太い実線は要素の変形後の位置 r, 点線は変形前の位置 s についてプロットしたものである．第2図の細い実線および第3図の・印は同じ問題を全歪理論によって解いた結果 $(b/b_0=0.85)$ である．$n=0$ は非硬化材料を示す．全歪理論は半径方向の歪 ε_ϕ を過大評価するが，ポンチ力をきめる $t\sigma_\phi$ に関する誤差はわずかであることが二つの図から理解できる.

第4図は歪比 $\varepsilon_\phi/\varepsilon_\theta$ と歪速度の比 $\dot{\varepsilon}_\phi/\dot{\varepsilon}_\theta$ をプロットしたもので，一般に $\dot{\varepsilon}_\phi/\dot{\varepsilon}_\theta$ の方が $\varepsilon_\phi/\varepsilon_\theta$ に比べて絶対値が大である．この結果は，全歪理論において ε_ϕ が過大評価されることを説明するものである.

付 記

歪増分理論によりブランクの内側の要素にむかって解を進めてゆくと，最後に $2\sigma_\theta-\sigma_\phi=0$, $\dot{\varepsilon}_\phi$ が無限大の状態に達する．これは本報告の解の適用限界で，正確にはこの $\dot{\varepsilon}_\phi$ の無限大となる点を級数展開の手法によって求める必要がある.

同じことは，絞り開始時においても起こり，ブランクの外半径 b_0 とダイス孔の半径 r_1 の比が $b_0/r_1=2.962$ $(r_1/b_0=0.338)$ のときが (14) 式および (15) 式の解の適用限界である．b_0/r_1 が上述の値より大きい場合は，ブランク全体が絞り込まれることなく，変形はダイス孔に近い限られた領域に局限されるものと思われる（エリクセン試験片に課せられる寸法の制約，ダイス孔の直径 27 mm に対し試験片の寸法は 90mm×90mm と上述の b_0/r_1 の値を比較することは興味がある).

(1960. 9. 16)

文 献

1) 山田，生産研究，**12**-7 (1960)，305.

2) 山田，生産研究，**12**-9 (1960)，362..

3) 森口，高田，数値計算法Ⅱ（岩波講座，現代応用数学，B. 13. Ⅱ)，92.