

球形殻非対称曲げ理論の近似解

An Approximate Solution for the Asymmetrical Bending
Theory of Spherical Thin-Shells.

坪井善勝*・川股重也**

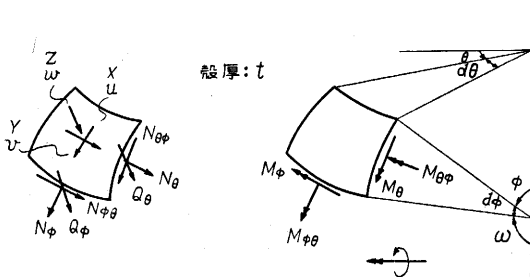
はしがき

球形殻が地震荷重，風圧力等を受けた場合の応力解析の基礎となる非対称曲げの問題について，応力函数 ϕ と法線方向変位 w を未知数とする厳正な理論とその解を求め，またこれらの応用としてコールダーホール型原子炉の地震時の応力解析を行ない，すでに発表した¹⁻⁵⁾。

その後，厳正理論から出発して，計算の便利さを主眼とした近似解を作成し，実用解として十分な精度をもつことを確かめたので取りあえずその概要を報告する。理論の詳細は追って別に発表する予定である。

基礎微分方程式とその解

無荷重状態の球形殻の微小要素について力の釣合式および適合条件式を立て，これを応力函数 ϕ と法線方向変位 w について表わすと，つぎの基礎微分方程式に到達



第1図 一般の Element と応力，変位の定義

する。

$$H_2\{H_2(w) - 4\kappa^4\phi\} = \frac{a^2}{D} \frac{f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta}{\sin \varphi} \quad (1)$$

$$H_2\{H_0(\phi) + w\} = 0$$

ここで

$$\phi = \frac{a}{Et} \phi$$

$$\kappa^4 = 3(1-\nu^2) \frac{a^2}{t^2}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$H_0(\) = (\)'' + (\)' \cot \varphi + \frac{(\)''}{\sin^2 \varphi} \quad (2)$$

$$H_2(\) = (\)'' + (\)' \cot \varphi + \frac{(\)''}{\sin^2 \varphi} + 2(\)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

f_1, f_2 は任意定数

また応力函数による面内力の定義は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \phi'' + \phi - \frac{D}{a^3} H_2(w) \\ N_\varphi &= \phi' \cot \varphi + \phi + \frac{\phi''}{\sin^2 \varphi} - \frac{D}{a^3} H_2(w) \\ &\quad + \frac{f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta}{\sin \varphi} \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{\phi'}{\sin \varphi} + \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \phi' \end{aligned} \right\} (3)$$

今，微分方程式

$$H_2(\zeta) = 0 \quad (4)$$

を満足する解， ζ を用いると，基礎方程式 (1) は次のように単純化される。

$$H_2(w) - 4\kappa^4\phi = A_1\zeta + \frac{a^3}{2D} \frac{f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta}{\sin \varphi} \quad (5)$$

$$H_0(\phi) + w = A_2\zeta$$

(5) 式の一つの特解は

$$\left. \begin{aligned} \phi^p &= B_1\zeta - \frac{a}{2Et} \frac{f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta}{\sin \varphi} \\ w^p &= B_2\zeta \end{aligned} \right\} (6)$$

ここで $A_1, A_2; B_1, B_2$ は任意定数，

与えられるが，実際に方程式 (4) を解いて (6) 式に代入すると，これより得られる応力と変位は無荷重球形殻の膜理論から得られる応力と変位に一致する。つまり，特解 (6) は膜応力状態を表わし，つぎのような応力と変位成分をもつ。

未知数を余弦級数に展開した時の $n=1$ に対しては

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \frac{1}{\sin^3 \varphi} \{K_1 + K_2 \cos \varphi\} \cos \theta \\ N_\varphi &= -\frac{1}{\sin^3 \varphi} \{K_1 + K_2 \cos \varphi\} \cos \theta \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{1}{\sin^3 \varphi} \{K_1 \cos \varphi + K_2\} \sin \theta \end{aligned} \right\} (7)$$

* 研究指導

** 研究担当

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \left[\frac{a(1+\nu)}{2Et} \left\{ (K_1 + K_2 \cos \varphi) \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) + \frac{K_2 - K_1 \cos \varphi}{2} \log \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right\} + K_3 + K_4 \cos \varphi \right] \sin \theta \\
 v &= \left[\frac{a(1+\nu)}{2Et} \left\{ (K_2 + K_1 \cos \varphi) \frac{1}{\sin^2 \varphi} + \frac{K_1 - K_2 \cos \varphi}{2} \log \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right\} - K_3 \cos \varphi - K_4 \right] \cos \theta \\
 w &= \left[\frac{a(1+\nu)}{2Et} \left\{ K_2 \cot \varphi + \frac{K_2 \sin \varphi}{2} \log \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right\} + K_3 \sin \varphi \right] \cos \theta \\
 \chi_\varphi &= \left[\frac{1+\nu}{2Et} \left\{ -K_2 + K_1 \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} + \frac{K_1}{2} \log \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right\} - K_2 \right] \cos \theta
 \end{aligned} \right\} (8)$$

$n \geq 2$ に対しては

$$\left. \begin{aligned}
 N_\theta &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left\{ K_1 \tan^n \frac{\varphi}{2} + K_2 \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \cos n\theta \\
 N_\varphi &= -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left\{ K_1 \tan^n \frac{\varphi}{2} + K_2 \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \cos n\theta \\
 N_{\theta\varphi} &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left\{ K_1 \tan^n \frac{\varphi}{2} - K_2 \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \sin n\theta
 \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \left[\frac{a(1+\nu)}{2n(n^2-1)Et} \frac{1}{\sin \varphi} \left\{ K_1 \{ 2n(n + \cos \varphi) - \sin^2 \varphi \} \tan^n \frac{\varphi}{2} + K_2 \{ 2n(n - \cos \varphi) - \sin^2 \varphi \} \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \varphi \left[K_3 \tan^n \frac{\varphi}{2} - K_4 \cot^n \frac{\varphi}{2} \right] \right] \sin n\theta \\
 v &= \left[\frac{a(1+\nu)}{2n(n^2-1)Et} \frac{1}{\sin \varphi} \left\{ -K_1 \{ 2n(n + \cos \varphi) - \sin^2 \varphi \} \tan^n \frac{\varphi}{2} + K_2 \{ 2n(n - \cos \varphi) - \sin^2 \varphi \} \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \varphi \left[K_3 \tan^n \frac{\varphi}{2} + K_4 \cot^n \frac{\varphi}{2} \right] \right] \cos n\theta \\
 w &= \left[\frac{a(1+\nu)}{2n(n^2-1)Et} \left\{ K_1 (n + \cos \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + K_2 (n - \cos \varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} - \left\{ K_3 (n + \cos \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - K_4 (n - \cos \varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \right] \cos n\theta \\
 \chi_\varphi &= -\left[\frac{1+\nu}{2(n^2-1)Et} \frac{1}{\sin \varphi} \left\{ K_1 (n + \cos \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} - K_2 (n - \cos \varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sin \varphi} \left\{ K_3 \{ n(n + \cos \varphi) - 2 \sin^2 \varphi \} \tan^n \frac{\varphi}{2} + K_4 \{ n(n - \cos \varphi) - 2 \sin^2 \varphi \} \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \right] \cos n\theta
 \end{aligned} \right\} (10)$$

ここで χ_φ は殻の子午面内における回転角を表わす。

つぎに (5) 式の同次方程式

$$\left. \begin{aligned}
 H_2(w) - 4\kappa^4 \psi &= 0 \\
 H_0(\psi) + w &= 0
 \end{aligned} \right\} (11)$$

の一般解は曲げの状態を表わすことになる。この方程式の厳密な解は、超球函数を用いて表現されるが、実際計算は相当複雑なものとなり、実用に適さないので、次のような近似解法を試みた。

近 似 解 法

(11) 式の演算記号をもとに戻し、未知数を

$$\left. \begin{aligned}
 w &= w_n \cos n\theta \\
 \psi &= \psi_n \cos n\theta
 \end{aligned} \right\} (12)$$

の形に展開すると、次の常微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 w_n'' + w_n' \cot \varphi - \left(\frac{n^2}{\sin^2 \varphi} - 2 \right) w_n &= 4\kappa^4 \psi_n \\
 \psi_n'' + \psi_n' \cot \varphi - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} \psi_n &= -w_n
 \end{aligned} \right\} (13)$$

この方程式において κ がある程度以上に大きい場合は、解 w_n, ψ_n が、変数 φ に対して非常な減衰性を示すことが厳密解によって確かめられているので、近似解法として、高次の微分項に対して、低次の微分項および非微分項を省略する方法が考えられる。

この際に、誤差を小さくするために、中間の一次微分の項をなくすような変換を考える。一般に 2 次微分方程式

$$y'' + f(x)y' + \phi(x)y + \psi(x) = 0$$

において

$$y = F(x)\bar{y}(x)$$

とおけば、 \bar{y} の一次微分の項を生じない条件は

$$F(x) = e^{-\int \frac{f(x)dx}{2}}$$

である。今の場合、 $f(\varphi) = \cot \varphi$ であるから

$$F(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}}$$

研究速報

とすればよい。

さて、(13)式において

$$w_n = \frac{\bar{w}_n}{\sqrt{\sin \varphi}}, \quad \phi_n = \frac{\bar{\phi}_n}{\sqrt{\sin \varphi}} \quad (14)$$

の変換を行なうと、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_n'' + \left(\frac{\cot^2 \varphi}{4} - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} + \frac{5}{2} \right) \bar{w}_n &= 4\kappa^4 \bar{\phi}_n \\ \bar{\phi}_n'' + \left(\frac{\cot^2 \varphi}{4} - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} \right) \bar{\phi}_n &= -\bar{w}_n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

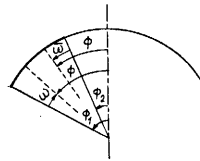
$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}_n &= e^{*\varphi} (c_1' \sin \kappa \varphi + c_2' \cos \kappa \varphi) + e^{-*\varphi} (c_3' \sin \kappa \varphi + c_4' \cos \kappa \varphi) \\ \bar{w}_n &= -2\kappa^2 \{ e^{*\varphi} (c_1' \cos \kappa \varphi - c_2' \sin \kappa \varphi) - e^{-*\varphi} (c_3' \cos \kappa \varphi - c_4' \sin \kappa \varphi) \} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。ここで $\phi = \frac{Et}{a} \psi$ の関係を代入、さらに変数に二つの境界から測つた角度、 $\omega = \varphi_1 - \varphi$ 、 $\bar{\omega} = \varphi - \varphi_2$ を用いて書き換えると、(13)式の近似解として

ここで、2次微分の項に対して非微分項を省略すると、

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_n'' &= 4\kappa^4 \bar{\phi}_n \\ \bar{\phi}_n'' &= -\bar{w}_n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

という単純な形の連立微分方程式となり、この解は



第2図 変数の変換

$$\left. \begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \sin \kappa \omega + c_2 \cos \kappa \omega) + e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \sin \kappa \bar{\omega} + c_4 \cos \kappa \bar{\omega}) \} \\ w_n &= \frac{2a\kappa^2}{Et} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \cos \kappa \omega - c_2 \sin \kappa \omega) + e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \cos \kappa \bar{\omega} - c_4 \sin \kappa \bar{\omega}) \} \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を得る。

(18)式より応力と変位は次のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= -\frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \left[e^{-*\omega} \{ (c_1 \eta_{12} + c_2 \eta_{11}) \cot \varphi - (c_1 \eta_{22} + c_2 \eta_{21}) \} - e^{-*\bar{\omega}} \{ (c_3 \bar{\eta}_{12} + c_4 \bar{\eta}_{11}) \cot \varphi + (c_3 \bar{\eta}_{22} + c_4 \bar{\eta}_{21}) \} \right] \cos n\theta \\ N_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \eta_{12} + c_2 \eta_{11}) - e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \bar{\eta}_{12} + c_4 \bar{\eta}_{11}) \} \cot \varphi \cos n\theta \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \eta_{12} + c_2 \eta_{11}) - e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \bar{\eta}_{12} + c_4 \bar{\eta}_{11}) \} \frac{n}{\sin \varphi} \sin n\theta \\ Q_\theta &= \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \sin \kappa \omega + c_2 \cos \kappa \omega) + e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \sin \kappa \bar{\omega} + c_4 \cos \kappa \bar{\omega}) \} \frac{1}{\sin \varphi} \sin n\theta \\ Q_\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \eta_{12} + c_2 \eta_{11}) - e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \bar{\eta}_{12} + c_4 \bar{\eta}_{11}) \} \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= -\frac{a}{2\kappa^2 \sqrt{\sin \varphi}} \left[e^{-*\omega} \{ c_1 \{ (1-\nu) \eta_{11} \cot \varphi + \nu \eta_{21} \} - c_2 \{ (1-\nu) \eta_{12} \cot \varphi + \nu \eta_{22} \} \} - e^{-*\bar{\omega}} \{ c_3 \{ (1-\nu) \bar{\eta}_{11} \cot \varphi - \nu \bar{\eta}_{21} \} \right. \\ &\quad \left. - c_4 \{ (1-\nu) \bar{\eta}_{12} \cot \varphi - \nu \bar{\eta}_{22} \} \} \right] \cos n\theta \\ M_\varphi &= \frac{a}{2\kappa^2 \sqrt{\sin \varphi}} \left[e^{-*\omega} \{ c_1 \{ (1-\nu) \eta_{11} \cot \varphi - \eta_{21} \} - c_2 \{ (1-\nu) \eta_{12} \cot \varphi - \eta_{22} \} \} \right. \\ &\quad \left. - e^{-*\bar{\omega}} \{ c_3 \{ (1-\nu) \bar{\eta}_{11} \cot \varphi + \bar{\eta}_{21} \} - c_4 \{ (1-\nu) \bar{\eta}_{12} \cot \varphi + \bar{\eta}_{22} \} \} \right] \cos n\theta \\ M_{\theta\varphi} &= \frac{a(1-\nu)}{2\kappa^2 \sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \eta_{11} - c_2 \eta_{12}) - e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \bar{\eta}_{11} - c_4 \bar{\eta}_{12}) \} \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \sin n\theta \\ u &= \frac{a(1+\nu)}{Et} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \sin \kappa \omega + c_2 \cos \kappa \omega) + e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \sin \kappa \bar{\omega} + c_4 \cos \kappa \bar{\omega}) \} \frac{n}{\sin \varphi} \sin n\theta \\ v &= -\frac{a(1+\nu)}{Et} \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ e^{-*\omega} (c_1 \eta_{12} + c_2 \eta_{11}) - e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \bar{\eta}_{12} + c_4 \bar{\eta}_{11}) \} \cos n\theta \\ \chi_\varphi &= \frac{1}{Et \sqrt{\sin \varphi}} \left[2\kappa^2 \{ e^{-*\omega} (c_1 \eta_{11} - c_2 \eta_{12}) - e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \bar{\eta}_{11} - c_4 \bar{\eta}_{12}) \} \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu) \{ e^{-*\omega} (c_1 \eta_{12} + c_2 \eta_{11}) - e^{-*\bar{\omega}} (c_3 \bar{\eta}_{12} + c_4 \bar{\eta}_{11}) \} \right] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_{11} &= \kappa(\cos \kappa\omega + \sin \kappa\omega) - \frac{1}{2} \cot \varphi \cos \kappa\omega, & \eta_{12} &= \kappa(\sin \kappa\omega - \cos \kappa\omega) - \frac{1}{2} \cot \varphi \sin \kappa\omega \\
 \bar{\eta}_{11} &= \kappa(\cos \kappa\bar{\omega} + \sin \kappa\bar{\omega}) + \frac{1}{2} \cot \varphi \cos \kappa\bar{\omega}, & \bar{\eta}_{12} &= \kappa(\sin \kappa\bar{\omega} - \cos \kappa\bar{\omega}) + \frac{1}{2} \cot \varphi \sin \kappa\bar{\omega} \\
 \eta_{21} &= \frac{1}{4}(2 + \cot^2 \varphi) \cos \kappa\omega + 2\kappa^2 \sin \kappa\omega, & \eta_{22} &= \frac{1}{4}(2 + \cot^2 \varphi) \sin \kappa\omega - 2\kappa^2 \cos \kappa\omega \\
 \bar{\eta}_{21} &= \frac{1}{4}(2 + \cot^2 \varphi) \cos \kappa\bar{\omega} + 2\kappa^2 \sin \kappa\bar{\omega}, & \bar{\eta}_{22} &= \frac{1}{4}(2 + \cot^2 \varphi) \sin \kappa\bar{\omega} - 2\kappa^2 \cos \kappa\bar{\omega}
 \end{aligned} \right\} (21)$$

曲げ応力，厳密解との比較

$\sim \omega$			0°	2°	4°	7°	10°	15°
$x = \cos \varphi$			0.708	0.732	0.756	0.788	0.820	0.866
φ			44.93°	42.94°	40.89°	38.00°	34.92°	30.00°
応	N_θ in $ap \times \cos \theta$	厳密解	0.89213	0.75756	0.47009	0.15025	-0.00951	-0.03567
		近似解	0.88859	0.74807	0.47190	0.15142	-0.00984	-0.03577
力	M_θ in $\frac{ap^2}{2\kappa^2} \times \cos \theta$	厳密解	-0.87640	-0.22206	0.10390	0.19551	0.11902	0.01075
		近似解	-0.88070	-0.22449	0.10402	0.19640	0.11935	0.01046
力	Q_θ in $ap \times \cos \theta$	厳密解	-0.06425	-0.03520	-0.01325	0.00170	0.00472	0.00171
		近似解	-0.06434	-0.03516	-0.01333	0.00172	0.00476	0.00171

境界値問題の解析に当たっては，(7)～(10) 式の無荷重膜応力状態の解と，(19)～(21)式の曲げの近似解を組み合わせ， $K_1 \sim K_4$ ， $C_1 \sim C_4$ の計 8 箇の未知定数を境界条件によって決定すればよい。

厳密解との比較

近似解の成立する条件としては

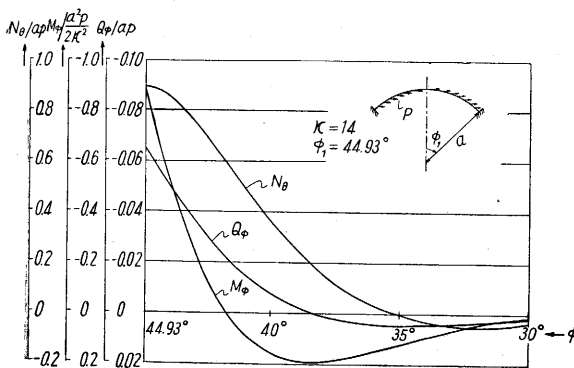
- (1) κ が大きい
- (2) φ が小さくない (φ の小さい場合，1) 参照)
- (3) n が特に大きくない

ことが挙げられる。この条件の数字的な許容範囲については別に詳論することにして， $\kappa=14$ ， $\varphi_1=45^\circ$ の球殻が単位表面積当たり p なる地震力を受けた場合の曲げ応力の計算例を，上の表と第 3 図に掲げる。球殻の支持条件は固定である。

厳密解と比較すればわかるように，近似解の精度は高く，応力の最大値に対する誤差の最大値の比率は 0.54 % 以下である。(1960.10.3)

文 献

- 1) Y. Tsuboi & K. Akino: Theory of Antisymmetrical Bending of Thin-Shells, Proceedings of IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, Netherland, Aug. 1959
- 2) 坪井，秋野，鄭：「球形殻の非対称曲げ理論」(1)，(2)，日本建築学会論文報告集，第 60 号，昭 33 年 10 月
- 3) 坪井，秋野：「球形殻の非対称曲げ理論」(3)，日本建築学会論文報告集，第 63 号，昭 34 年 10 月
- 4) 坪井，秋野，川股，鄭：「コールドーホール型原子炉容器の応力解析」生産研究，第 12 巻第 6 号，昭 35 年 6 月
- 5) 坪井，秋野，川股，鄭：「コールドーホール型原子炉圧力容器とその支持構造の地震応力」(1)，(2) 日本建築学会論文報告集，第 66 号，昭 35 年 10 月



第 3 図 応力のグラフ