研　究　速　報

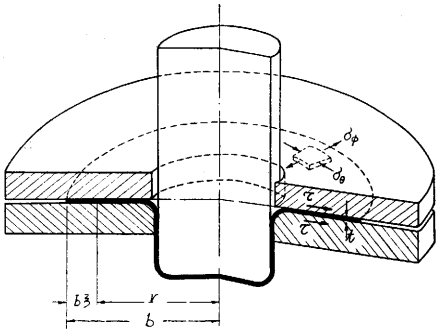
軸対称成形における応力と歪の解析について (2)

Analysis of Stress and Strain in Axially Symmetrical Forming Process (2)
——An Approach to Formability Test of Sheet Metals——

山　田　嘉　昭

前報[1]では各種の軸対称成形加工について，数値解および級数解の例を報告した．また，球頭ポンチとの接触部についてはすでに微分解析機による詳細な計算を終わっていることを述べた．前報以後，同じく微分解析機によって半径方向絞りの解を求めた．

球頭ポンチおよび半径方向の絞りを扱った解のうち，後者について解の整理を終了したので，本報では，非硬化材料に関する理論的な考察とあわせ，その結果を報告する．



第１図　半径方向の絞り

半径方向絞りにおける全歪理論の微分方程式　前報の基礎式 (1)～(4) 式は，半径方向絞り（第１図参照）の場合には次のようになる ($\phi=0$).

$$\frac{d(t\sigma_\phi)}{dr}=\frac{t(\sigma_\theta-\sigma_\phi)}{r}-2\tau, \qquad (8)$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}=(1-e^{\varepsilon_\theta-\varepsilon_\phi})/r. \qquad (9)$$

ただし (8) 式の τ はダイスと板の接触部に作用する摩擦力をあらわす．前報の (6)式，すなわち全歪理論の応力-歪方程式

$$\frac{2\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi}{\sigma_\theta}=\frac{\varepsilon_\theta+2\varepsilon_\phi}{\sigma_\phi}=\frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \qquad (10)$$

を用いて (8) 式から σ_θ を消去し，$\xi=(b-r)/b$ を独立変数とすると (第１図参照)，(8) 式，(9) 式および前報の (7)式は，それぞれ次のように書きあらわすことができる．

$$\frac{d(t\sigma_\phi)}{d\xi}=-\frac{\varepsilon_\theta-\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta+2\varepsilon_\phi}\frac{t\sigma_\phi}{1-\xi}+2b\tau, \qquad (8')$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{d\xi}=-(1-e^{\varepsilon_\theta-\varepsilon_\phi})/(1-\xi), \qquad (9')$$

$$\frac{d(t\sigma_\phi)}{d\xi}=\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon_\theta+2\varepsilon_\phi}+\frac{n-1}{2}\frac{2\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_\theta\varepsilon_\phi+\varepsilon_\phi^2}-1\right)\frac{d\varepsilon_\theta}{d\xi}+\left(\frac{2}{\varepsilon_\theta+2\varepsilon_\phi}+\frac{n-1}{2}\frac{\varepsilon_\theta+2\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_\theta\varepsilon_\phi+\varepsilon_\phi^2}-1\right)\frac{d\varepsilon_\phi}{d\xi}\right\}t\sigma_\phi. \qquad (11)$$

前報の数値解は計算の精度を吟味するため，上の三つの式によって行なったものである．

微分解析機による解法　生産技術研究所に設置の微分解析機（積分機の現有台数８台）は，(8′) 式，(9′) 式，(11)式をそのままの形で解くには積分機の数が足りないので，(11)式の代わりに

$$\frac{t\sigma_\phi}{Kt_0s_T}=2(\varepsilon_\theta+2\varepsilon_\phi)[100^2(\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_\theta\varepsilon_\phi+\varepsilon_\phi^2)]^{\frac{n-1}{2}}e^{-(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi)} \qquad (12)$$

ただし，　$K=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e}{n}\right)^n(100)^{1-n}$

を用いた．t_0 と t は変形前後の板厚，s_T は引張強さ，n は材料の硬化特性をあらわす式

$$\bar{\sigma}=f(\varepsilon)=c\bar{\varepsilon}^n \qquad (13)$$

の べき数 である．(12)式は (10) 式と (13) 式を組み合わせて簡単に求めることができ，微分方程式 (11) 式とまったく同等である．第２図に示したように，(12)式を，ε_θ をパラメータとして，$t\sigma_\phi/Kt_0s_T$ 対 ε_ϕ の線図に描いておく（筆者が以前に行なった図式解法では，本報の ε_ϕ をパラメータとした線図を用いた[2]）．

第３図は半径方向の絞りを解析した際の微分解析機の結線を示している．上述の線図（第２図）は第３図右上方の入力卓に貼り，(8′) 式と (9′) 式の解として逐次得られる $t\sigma_\phi$ と ε_θ の値にしたがって，人手により，この線図上で ε_ϕ を追跡する．

しわ押えなしの深絞りでは，各変形段階のブランク外周 ($r=b$) において $t\sigma_\phi=0$ および $\varepsilon_\theta+2\varepsilon_\phi=0$ である．したがって，(8′) 式を用いた解法ではその右辺が不定形となり，$r=b$，または $\xi=(b-r)/b=0$ から出発して計算を進めるができない*．この場合には，元の(8) 式にもどって $d(t\sigma_\phi)/d\xi$ の値を定め，さらに前報の級数解から $\xi=0.025$ における ε_θ，ε_ϕ，$t\sigma_\phi$ を計算して，$\xi=0.025$ を解の出発点とした．

しわ押えを加えた場合の計算では，板厚の増加がブランクの外周で最も大きいことを考慮し，しわ押え力はす

* 他の著者の解法[3]でも事情は同じと思われる．

べてブランクの外周にかかるものとした．この場合，しわ押え力を H とすると，ブランク外周において

$$\frac{(t\sigma_\phi)_b}{t_0 s_T}=\frac{2\mu H}{2\pi b}\Big/ t_0 s_T=\frac{2\mu H}{\pi d_1 t_0 s_T}\,\frac{d_1}{2b_0}\cdot\frac{b_0}{b} \tag{14}$$

が成立する．ただし，μ は摩擦係数，b_0 はブランクの最初の外半径，b はブランクの各変形段階における外半径，d_1 はポンチ径（またはダイス孔径），t_0 は最初の板厚，s_T は引張強さである．(14) 式において，

$$\frac{H}{\pi d_1 t_0 s_T}\approx\frac{\text{しわ押え力}}{\text{最大ポンチ力}}\approx\frac{1}{2}\sim\frac{1}{3},$$

$$\frac{d_1}{2b_0}\approx\frac{1}{2}$$

のオーダの量であるから，外周における $t\sigma_\phi$ の値，すなわち $(t\sigma_\phi)_b$ は近似的に

$$\frac{(t\sigma_\phi)_b}{t_0 s_T}\approx\left(\frac{1}{2}\sim\frac{1}{3}\right)\mu\frac{b_0}{b} \tag{14'}$$

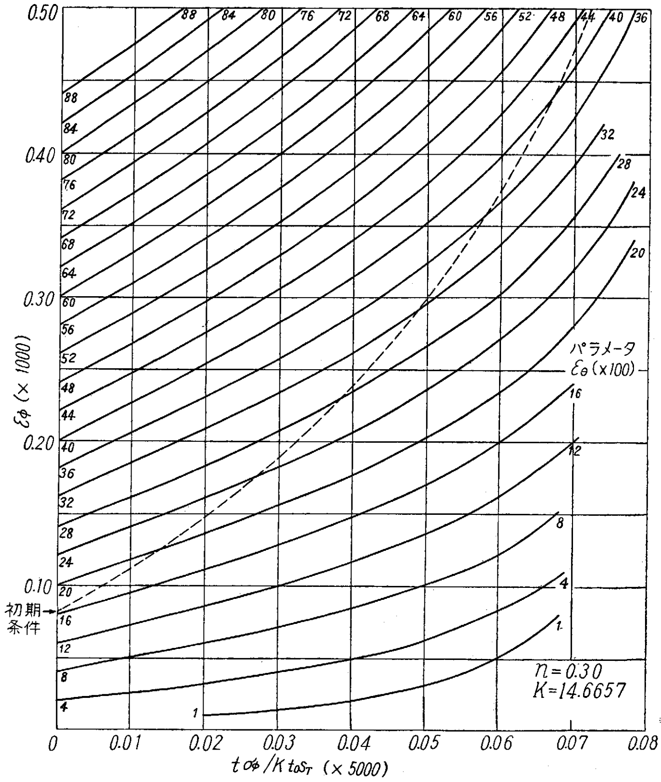
とあらわすことができる．

しわ押えを加えた場合の計算は，(14′) 式にもとづき

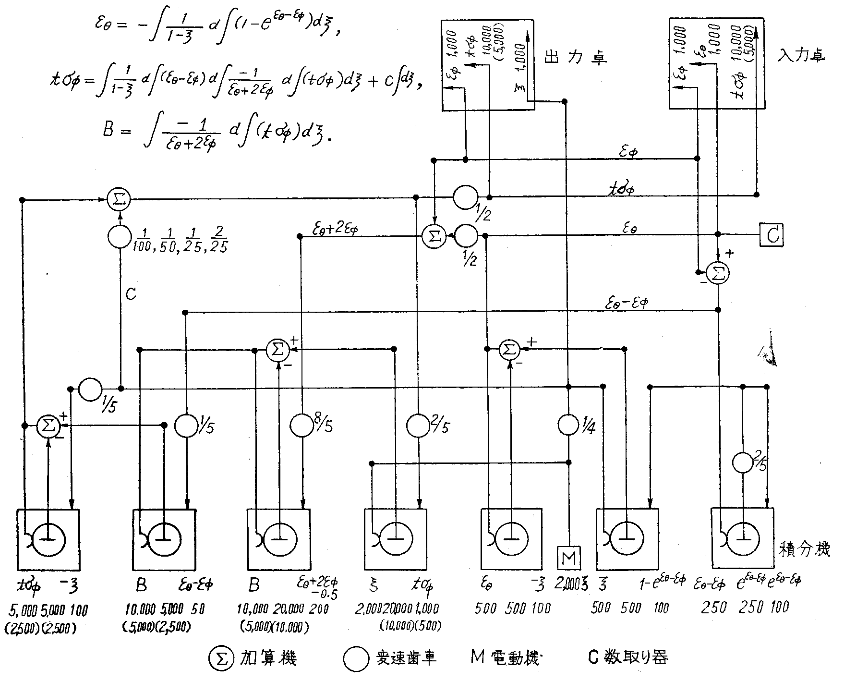
$$\frac{(t\sigma_\phi)_b}{t_0 s_T}=0.1\frac{b_0}{b}$$

として行なった．与えられた b/b_0 に対して，この式から $(t\sigma_\phi)_b$，さらに円周歪の定義式 $\varepsilon_{\theta b}=\ln(b/b_0)$ からブランク外周における円周歪 $\varepsilon_{\theta b}$ を求めることができる．外周における半径方向の歪 $\varepsilon_{\phi b}$ は，上で得た $(t\sigma_\phi)_b$ と $\varepsilon_{\theta b}$ を用い，(12) 式によって図式に (10^{-4} まで正確に) 計算した．これらの添字 b をつけた諸量は，しわ押えを加えた場合の出発値（初期値）となる．

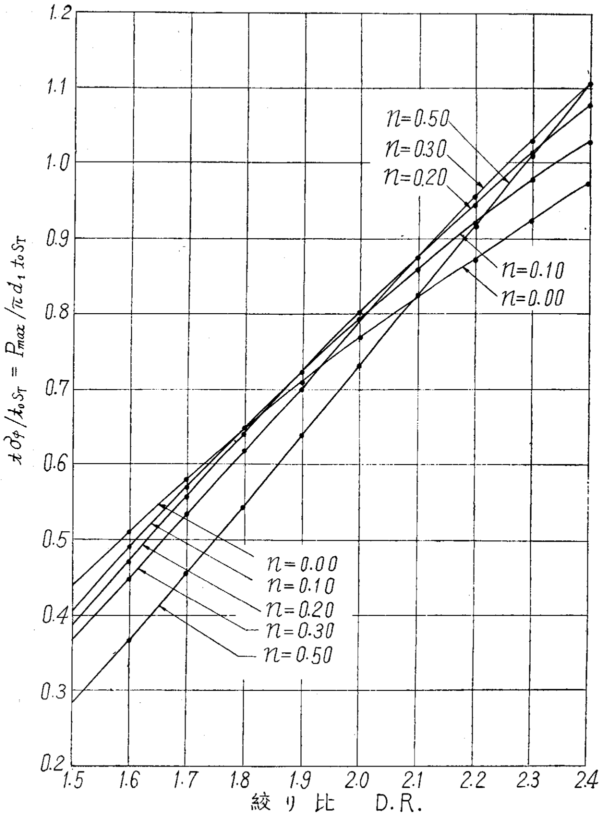
計算結果　微分解析機の出力卓（第3図参照）に $t\sigma_\phi$ と ε_ϕ（または ε_θ）を記録し，それから最大ポンチ力を求めた結果を第4図および第5図に示す．第4図はしわ押えのない理想的な半径方向絞り，第5図は前項で述べたしわ押えを加えた場合である．二つの図の縦軸は最大ポンチ力 P_{max} と破断荷重の一つの尺



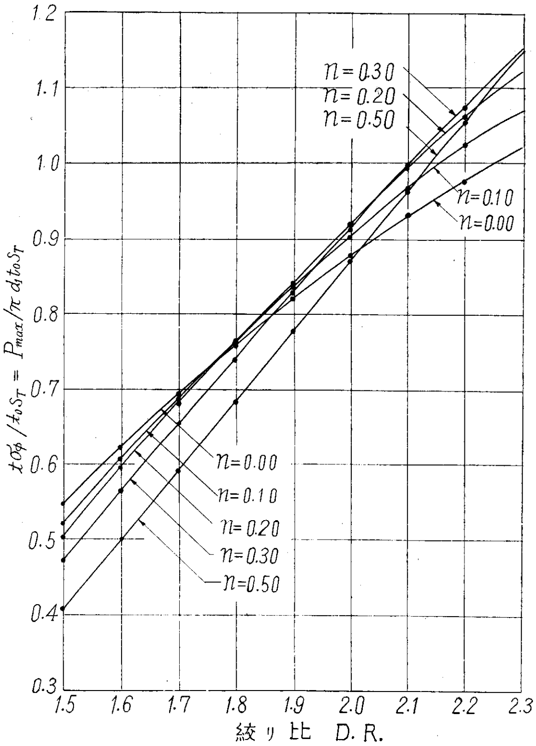
第２図　材料の硬化特性をもとにして描いた線図．点線は $b/b_0=0.85$，しわ押えなしの場合の解を示す



第３図　半径方向絞りの解析における微分解析機の結線図



第4図　半径方向絞りにおける絞り比と最大ポンチ力 P_{max} の関係（しわ押えなし）



第5図　半径方向の絞りにおける絞り比と最大ポンチ力 P_{max} の関係（しわ押えのある場合の例）

度である $\pi d_1 t_0 s_T$ の比を示している．

第4図から得られる興味ある結果は次に示すとおりである．

（i）　絞り比 (D.R.) の小さい範囲では，硬化べき数 n の小さい材料ほど，同一の絞り比に対する $P_{max}/\pi d_1 t_0 s_T$ が大きいが，絞り比が増すと，逆の傾向があらわれること（したがって破断の条件によっては，n の小さい材料ほど限界絞り比が大きくなる可能性がある*）．

（ii）　円筒深絞りの成形限界では，$P_{max}/\pi d_1 t_0 s_T$ が 1.00〜1.15 の値をとるのがふつうであるから，理想的な場合には 2.50 に及ぶ限界絞り比の得られる可能性があること[4),5)]．

第5図を第4図と比較するとわかるように，しわ押えを加えた場合，第4図の曲線は，ほぼしわ押え力に比例して縦軸に平行に**（そしていくらか横軸の方向にも）移動する．第5図の D.R.=2.1〜2.3 の範囲で，n=0.20〜0.50 の曲線が非常に接近していることは注目すべきことで，破断条件のわずかな違いによって，材料の硬化と限界絞り比の関係が，大幅に影響される可能性を示唆するものである．

なお，(8) 式または (8′) 式の τ が流体摩擦の場合についても解を求めたが，ふつうのプレス作業条件の範囲では，潤滑油の粘度が高く加工速度の速い場合も絞り力に及ぼす影響はわずかであることがわかった．1例を，b/b_0=0.85，n=0.30 の場合について級数解で示すと，次のとおりである．

$$\frac{t\sigma_\phi}{Kt_0 s_T}=0.006\,735+0.085\,46\xi+0.078\,26\xi^2+0.062\,86\xi^3+0.045\,61\xi^4+\cdots\cdots$$

$$\frac{t\sigma_\phi}{Kt_0 s_T}=0.006\,735+0.087\,46\xi+0.078\,60\xi^2+0.062\,69\xi^3+0.045\,05\xi^4+\cdots\cdots$$

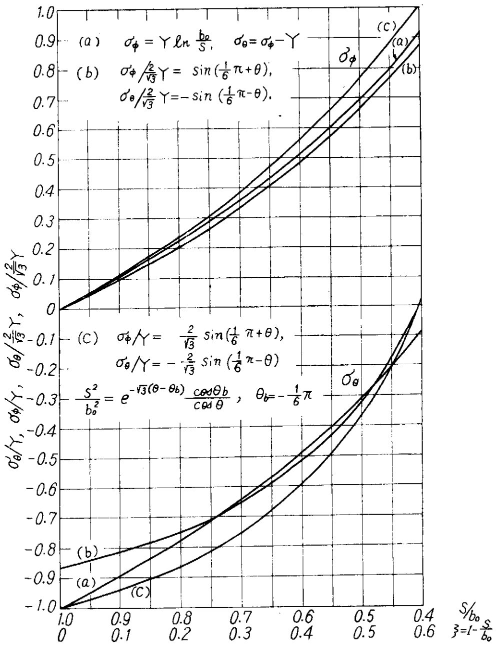
である*．第1式はしわ押えのみ，第2式はしわ押えと流体摩擦を考慮した場合である．

非硬化材料の解　非硬化材料（n=0）の絞り開始時における応力分布は，本報の方法では求めることができ

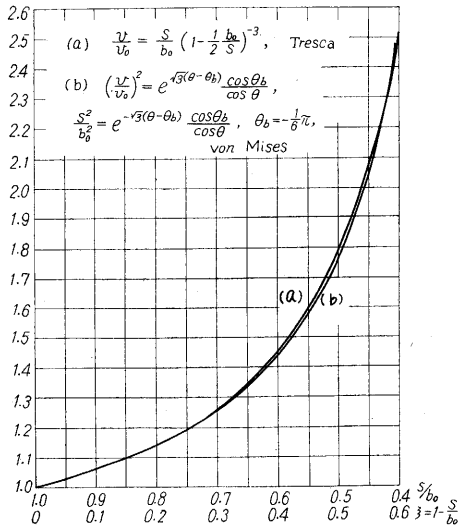
*　第4図は筆者が以前に行なった精度の低い計算による同様の線図（文献2の第7図）に代わるものである．以前の計算結果をもとにして，筆者は，n の大きい材料ほどつねに絞り性がよいと推論したことがある．

**　前報（文献1の306ページ）で，しわ押え力の影響について述べた推論は一般に成立することが確認された．

*　前報の同様の式（文献1の 306 ページ）の左辺 $t\sigma_\phi/t_0 s_T$ は $t\sigma_\phi/Kt_0 s_T$ の誤りであるので訂正する．



第 6 図　非硬化材料の半径方向絞りにおける応力分布（絞り開始時）



第 7 図　非硬化材料の半径方向絞りにおける速度 $v=dr/db$ の分布（絞り開始時）

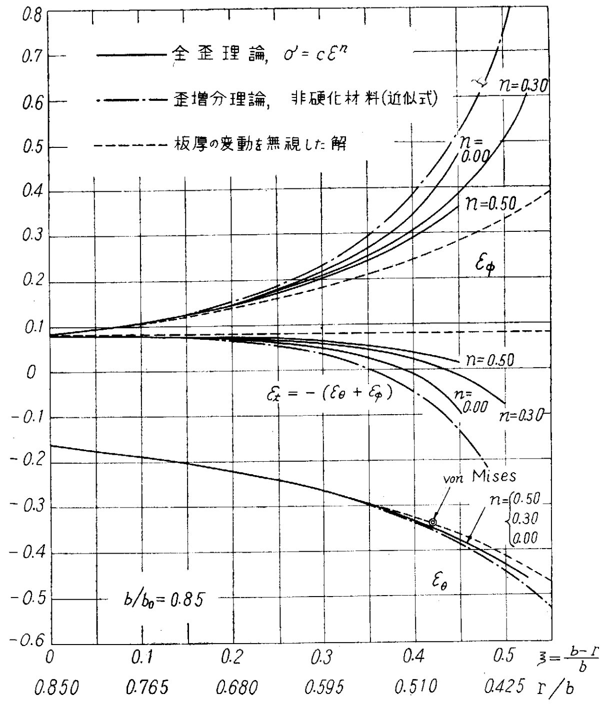
ないので解析的な解を求めた．

絞り開始時において板厚 t は一定であるから，摩擦項 τ を無視すると，(8) 式は

$$\frac{d\sigma_\phi}{dr} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_\phi}{r} \tag{15}$$

となる．(15) 式を非硬化材料の降伏条件（von Mises の条件）

$$\bar{\sigma} = (\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_\phi + \sigma_\phi^2)^{\frac{1}{2}} = Y = 一定 \tag{16}$$



第 8 図　各種の理論による歪分布の比較（半径方向の絞り，$b/b_0=0.85$）

と組み合わせて解けば，θ をパラメータとして

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\theta &= -\frac{2}{\sqrt{3}}Y\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right), \\ \sigma_\phi &= \frac{2}{\sqrt{3}}Y\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right), \\ \frac{s^2}{b_0^2} &= e^{-\sqrt{3}(\theta-\theta_b)}\frac{\cos\theta_b}{\cos\theta} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

が得られる．θ_b はブランク外周におけるパラメータ θ の値で，しわ押えなしの絞りでは $\theta_b = -30°$ である．b_0 は最初のブランク外半径，s は各要素の半径座標をあらわす．第 6 図は Tresca の条件 $\sigma_\phi - \sigma_\theta = Y$ を用いた場合の解と (17) 式を比較したものである．

本報告の平面応力問題では，絞り開始時にポンチ力が最大となるための材料の硬化率を求めることは，平面歪問題の場合[6]のように容易でなく，多くの解を求めて，その結果にたよるほかはない．しかし，非硬化材料では，各変形段階における板厚の変動を無視した近似の範囲で，絞り開始時にポンチ力が最大となることを示すことができる．第 4 図，第 5 図の $n=0.00$ に対する曲線は，この結果にもとづき，(17) 式によって計算を行なったものである．

歪増分理論による場合，絞り開始時の各要素の速度 v は (17) 式と同様に

研 究 速 報

$$\frac{v^2}{v_0{}^2}=e^{\sqrt{3}(\theta-\theta_b)}\frac{\cos\theta_b}{\cos\theta} \qquad (18)$$

と求められる．ただし，v_0 はブランク外周における速度をあらわす．(18) 式は Tresca の条件における式(文献6の第 11 章，1節)

$$\frac{v}{v_0}=\frac{s}{b_0}\left(1-\frac{1}{2}\ln\frac{b_0}{s}\right)^{-3} \qquad (19)$$

に代わるものである．第7図は (18) 式と (19) 式を比較した結果で，ほとんど差は認められない．なお，(17) 式と (18) 式は von Mises の条件を用いた歪増分理論によって解を求める際の初期条件となる．

第8図は各種の理論から得られる歪分布を比較した例で，実線は本報告の全歪理論の解（微分解析機による）である．鎖線は Tresca の条件を用いた歪増分理論による近似解（文献6の第 11 章，1節），点線は板厚の変動を無視して適合条件式 (9) 式だけからきまる解[7] である．さらに，◎で示した1点は，(18)式の積分の近似式として得られる．

$$\left.\begin{aligned}&2\ln\frac{b}{b_0}\approx\ln\frac{1-e^{-\bar{\xi}}}{1-e^{-\xi}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{2\xi+\xi^2}{2\bar{\xi}+\bar{\xi}^2}\\&\qquad+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\theta_b\right)\ln\frac{1+2/\xi}{1+2/\bar{\xi}}\\&\text{ただし}\quad \xi=\sqrt{3}(\theta-\theta_b),\ \bar{\xi}=(\bar{\theta}-\theta_b),\\&\qquad\qquad \theta_b=-\frac{1}{6}\pi\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

と (17) 式の第3式を用いて，ε_θ の1例を計算したものである．

第8図にみられるように，どの理論による場合もまた材料の硬化性によっても ε_θ には大差がない．しかし ε_ϕ ひいては限界絞り比を定める $t\sigma_\phi$ には，用いた理論および材料の歪硬化による差が明らかに認められ*，成形性を論ずるには，材料の歪硬化を考慮して詳しい計算を欠くことのできないことがわかる．

本報告の微分解析機による計算には，渡辺 勝助教授に負うところが大であった．また計算の実施，結果の整理には，川和田義信君の協力を得た．ここに感謝する次第である． (1960. 7. 26)

文 献

1) 山田，生産研究，**12**-7 (1960)，305.
2) Yamada, Y., *Proc. 2nd Japan Nat. Cong. Appl. Mech.* (1952), 51.
3) たとえば，福井博士論文選集 (1960)，347，および 365.
4) 春日，機械の研究，**10**-1 (1958)，157.
5) 浅川，塑性加工講演会前刷 (1959，11)，111.
6) Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford Press, 1950); 邦訳，R. ヒル著，塑性学（培風館，1954)，第 11 章，1節.
7) 山田，中原，塑性学（機械学会，1960)，103 ページの (69) 式.

* 適合条件式 (9) 式により，ε_θ のわずかな変化が ε_ϕ に大きな影響を与えるからである．

筆 者 紹 介

◇中村 康治 日本原子力研究所員
◇水島 正路 研究員 専攻 化学工学
◇藤高 周平 教授 工博 専攻 電力工学
◇野村 民也 助教授 工博 専攻 電気制御学
◇山本 尚志 助手 専攻 同上
◇平尾 収 教授 工博 専攻 機械力学・機械振動学
◇西川 精一 助教授 専攻 金属材料学
◇小林 繁美 技術員 専攻 同上
◇山田 嘉昭 助教授 専攻 材料力学・塑性学

第 12 巻 第 9 号 生 産 研 究 （本誌は生産技術研究所の研究紹介誌として，毎月1回発行する）

1960 年 9 月 1 日 発 行

頒価 60 円

編 集 者 久 保 田 広
発 行 者 福 田 武 雄

印 刷 所 三 美 印 刷 株 式 会 社
東京都千代田区神田多町2の7

発 行 所 東京大学生産技術研究所
千 葉 市 弥 生 町 1
電話千葉（2）0261（代表）