

## 軸対称成形における応力と歪の解析について

An Analysis of Stress and Strain in Axially Symmetrical Forming Process  
—An Approach to Formability Test of Sheet Metals—

山 田 嘉 昭

プレス成形性の諸問題を明らかにし、成形性試験法を確立するには、少なくとも基本的な加工について、応力分布と歪分布の特徴を詳しく調べておく必要がある。そして、その結果を、材料の破断特性、潤滑の効果、座屈現象（しわの発生）と組み合わせるならば、いろいろな現象（時には異常と考えられがちな現象）を説明する手がかりが得られるものと思われる。

筆者は、現在までに、全歪理論のわく内で、各種の軸対称成形加工、すなわち

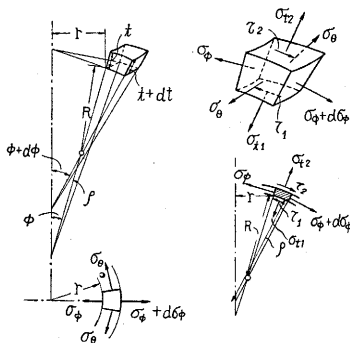
(i) 円筒深絞りにおける半径方向の絞り (ii) 平面ダイスの内角部 (iii) 平頭ポンチの角隅部および球頭ポンチ (iv) コニカル・カップ試験 (v) 液圧バルジ試験

について数値解の 1 例または数例を求め、これらの基本的な加工における応力と歪の分布の特徴を明らかにすることができたので、その結果を報告する。とくに球頭ポンチに関しては、すでに微分解析機による詳細な計算を実施し、さらに電子計算機による解も得たので、その一部をあわせて述べる。

現段階までに得た興味ある結果は次の通りである。

(i) 半径方向の絞りにおける応力と歪の分布、しわ押えもしくは摩擦の影響を級数解によって比較的精度よく評価できること。(ii) 同様に級数解を通じ、コニカル・カップ試験において、大きな限界絞り比が得られることの推論ができること。(iii) 平頭ポンチの角隅部についてよく知られている二つのくびれが理論的にも予測されること。(iv) 液圧バルジ試験の初期の変形段階を級数解によって十分よく近似できること。

**全歪理論の基礎式** 第 1 図を参照し、円周方向、子午線方向、厚さ方向の諸量にそれぞれ添字  $\theta, \phi, t$  をつけると、軸対称問題の次の諸方程式が得られる。



第 1 図

軸対称変形における応力の釣合

釣合方程式

$$\frac{\sigma_{t2} - \sigma_{t1}}{t} - \sigma_{\theta} \frac{\sin \phi}{r} - \sigma_{\phi} \cos \phi \frac{d\phi}{dr} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d(t\sigma_{\phi})}{dr} + \frac{\sigma_{\phi} - \sigma_{\theta}}{r} t - \frac{\tau_1 - \tau_2}{\cos \phi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d(rt\sigma_{\phi} \sin \phi)}{dr} + (\sigma_{t1} - \sigma_{t2})r - (\tau_1 - \tau_2)r \tan \phi = 0. \quad (3)$$

歪の適合条件式

$$\frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} = \left(1 - \frac{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_{\phi}}{\cos \phi}\right) \frac{1}{r}. \quad (4)$$

材料の加工硬化 (von Mises の条件) をあらわす

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}), \quad \bar{\sigma} = \text{相当応力}, \quad \bar{\varepsilon} = \text{相当歪}. \quad (5)$$

全歪理論における応力-歪方程式

$$\frac{2\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_{\phi}}{\sigma_{\theta}} = \frac{\varepsilon_{\theta} + 2\varepsilon_{\phi}}{\sigma_{\phi}} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}. \quad (6)$$

(1)~(3)式の三つの式はその二つのみが独立である。

材料の硬化をあらわす(5)式の函数  $f(\bar{\varepsilon})$  にいわゆる  $n$  乗硬化特性をとり  $f(\bar{\varepsilon}) = c\bar{\varepsilon}^n$  とおけば、(5)式と(6)式を組み合わせると、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d(t\sigma_{\phi})}{dr} = \left\{ \left( \frac{1}{\varepsilon_{\theta} + 2\varepsilon_{\phi}} + \frac{n-1}{2} \frac{2\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_{\phi}}{\varepsilon_{\theta}^2 + \varepsilon_{\theta}\varepsilon_{\phi} + \varepsilon_{\phi}^2} - 1 \right) \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} + \left( \frac{2}{\varepsilon_{\theta} + 2\varepsilon_{\phi}} + \frac{n-1}{2} \frac{\varepsilon_{\theta} + 2\varepsilon_{\phi}}{\varepsilon_{\theta}^2 + \varepsilon_{\theta}\varepsilon_{\phi} + \varepsilon_{\phi}^2} - 1 \right) \frac{d\varepsilon_{\phi}}{dr} \right\} t\sigma_{\phi}. \quad (7)$$

(4)式と(7)式は、全歪理論のわく内で、すべての軸対称問題に共通である。この二つの式 すなわち (4)式および(7)式と、(6)式を用いて(1)~(3)式から  $\sigma_{\theta}$  を消去して得られる二つの独立な式は、 $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\phi}, t\sigma_{\phi}, \phi$  に関する四つの微分方程式となる\*。

**級数解** 本報告の数値解は Milne の方法<sup>1)</sup>によって求め、その出発値の計算には

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta 0} + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + b_4 r^4 + \dots,$$

$$t\sigma_{\phi} / (t\sigma_{\phi})_0 = 1 + m_1 r + m_2 r^2 + m_3 r^3 + m_4 r^4 + \dots$$

などの級数解を用いた (添字 0 は境界値を示す)。しわ押えなしの深絞りでは  $(t\sigma_{\phi})_0 = 0$  であるから、 $t\sigma_{\phi}$  を

$$t\sigma_{\phi} = m_1 r + m_2 r^2 + m_3 r^3 + m_4 r^4 + \dots$$

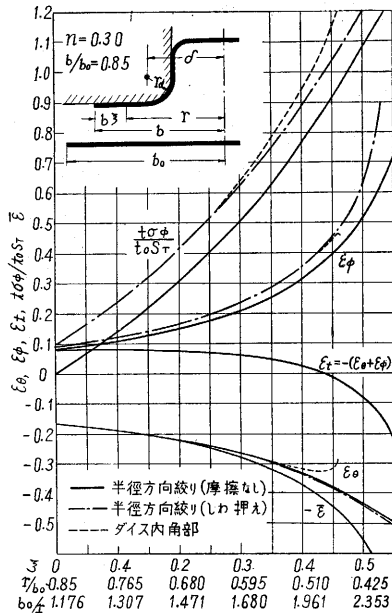
の形に展開する。上述のように、級数解は数値解の出発値\*\*を求める上に必要であったが、いくつかの問題では級数解によって応力と歪の分布を十分よく近似できることがわかった。

**円筒深絞りにおける応力と歪分布の例** 第 2 図は円筒深絞りの計算例を示し、材料の硬化指数が  $n=0.30$ ,  $\mu$

\* 他の研究者の解法、ならびに筆者が以前に用いた図式解法については別報で詳しく述べる。

\*\* またたとえば球面ポンチでは、電子計算機による計算の場合も、級数解により出発値を求める必要が起る。

研究速報



第2図 深絞りにおける応力と歪分布の計算例,  $t\sigma_\phi$  の除数  $t_0s_T$  の  $t_0$  は最初の板厚,  $s_T$  は引張強さ.

$t\sigma_\phi$  曲線にはほぼ平行である. この結果が一般にも成立するものとすれば, しわ押えがポンチ力ひいては限界絞り比におよぼす影響を, 簡単にブランク外周における条件によって推定できることになる.

第2図の点線は, 図の左上に示した記号を用い,  $ra/\delta = 0.3$  の内角半径を持つダイスについての計算例 (摩擦係数  $\mu = 0.10$ ) を示す. 図から, ダイス内角部の丸味のために  $t\sigma_\phi$  が増し, しわ押えの影響と相まって, 限界絞り比が約 0.30~0.35 程度低下すること (理想的な半径方向絞りに比較して) が推定される.

第2図に示した例について求めた級数解 (摩擦なし) および同じ条件の場合のコニカル・カップ試験の級数解 (摩擦係数  $\mu = 0.10$ ) を示すと, それぞれ

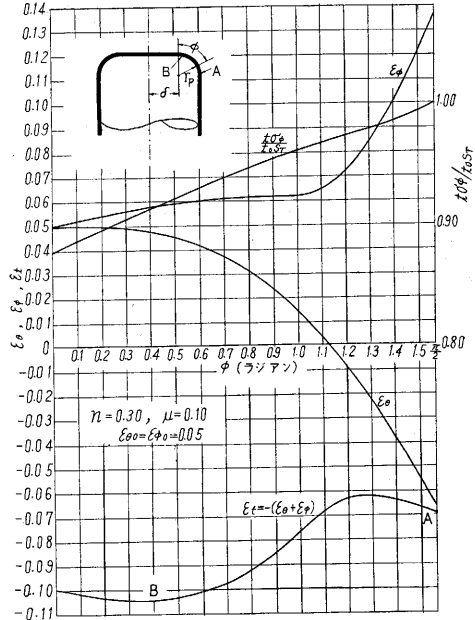
$$\frac{t\sigma_\phi}{t_0s_T} = 0.08306\xi^2 + 0.07831\xi^3 + 0.06471\xi^4 + 0.04893\xi^5 + \dots$$

$$\frac{t\sigma_\phi}{t_0s_T} = 0.08786\xi^2 + 0.06876\xi^3 + 0.05819\xi^4 + 0.04741\xi^5 + \dots$$

である. ただし  $\xi = (b-r)/b$  をあらわす (第2図を参照). 上の第2式すなわちコニカル・カップ試験の場合は,  $\xi^2, \xi^3, \xi^4$  にかかる係数が小さく, したがって  $t\sigma_\phi$  は平面ダイスの場合に比べて小さくなり, 限界絞り比が向上するものと思われる. なお, 半径方向の絞りでは  $\xi = 0.5$  のオーダであるから, 上に示した級数解は, かなり精度のよいものである.

ポンチ角隅部の計算例 第3図は, 平底から丸味部に移る点 ( $\phi = 0$ ) における歪を  $\epsilon_0 = \epsilon_{\phi 0} = 0.05$ , 摩擦係数  $\mu = 0.10$ , 材料の硬化指数が  $n = 0.30$  の場合についてポ

ランクの外周が  $b/b_0 = 0.85$  まで絞り込まれた段階である. 実線はしわ押えのない純粋な半径方向絞り, 鎖線は最大ポンチ力の約 1/3 のしわ押え力に加え, しかもダイス面上における流体摩擦を考慮した場合である. この数値例では, しわ押えを加えた場合の  $t\sigma_\phi$  を示す曲線は, しわ押えなしの



第3図 ポンチ角隅部における応力と歪分布の例

ンチ角隅部の応力と歪を数値計算した結果である (図に示した記号を用い,  $r_p/\delta = 0.30$ ). とくに厚さ歪  $\epsilon_r$  の分布に注目すると,  $\epsilon_r$  はポンチの平底に近い B 点と側壁部につながる A 点で極小を示し, 実験で知られている二つのくびれの存在が理論的にも証明されることがわかる.

液圧バルジ試験の計算例 膨れた板材の頂点における曲率半径を  $R$  とおき, 液圧バルジ試験の数値解は  $\xi = r/R$  を独立変数として求めると便利である. 液圧バルジ試験では対称性により, 応力と歪の級数解は  $\xi$  の偶関数となり,  $\xi$  の高次の項の係数も比較的簡単に計算することができる. 第4図に示した例,  $\epsilon_{\theta 0} = \epsilon_{\phi 0} = 0.15$ ,  $n = 0.30$  の材料における級数解は

$$\epsilon_\theta = 0.15000 - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{32}\xi^4 - \frac{739}{6912}\xi^6 + \dots,$$

$$\epsilon_\phi = 0.15000 - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{7}{32}\xi^4 - \frac{2917}{6912}\xi^6 + \dots,$$

$$\frac{t\sigma_\phi}{t_0s_T} = 1.00000 - \frac{5}{36}\xi^4 - \frac{65}{1728}\xi^6 + \dots,$$

$$\phi = \xi + \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{77}{360}\xi^5 - \frac{1835}{12096}\xi^7 + \dots$$

となり, 正確な数値解と第4図程度のスケールではほとんど区別がつかない.

正確な数値解から  $\epsilon_\theta = 0$  を与える  $\xi$  の値を求めると本例題について

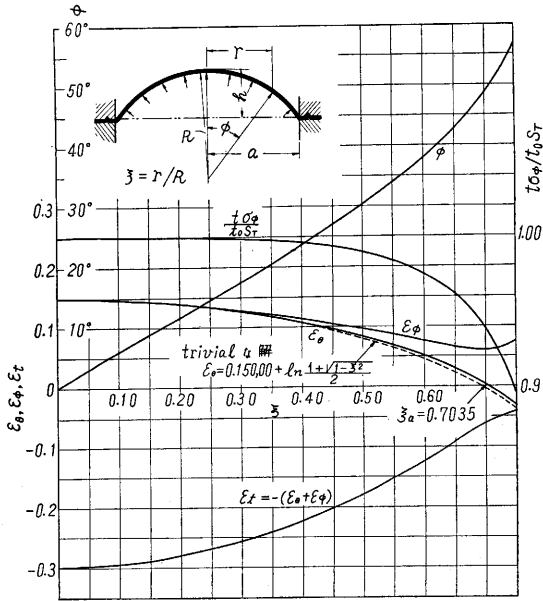
$$\xi_a = a/R = 0.7035, \quad a \text{ は受圧部の半径}$$

が得られる. この  $\xi_a$  を用いて

$$\frac{pa}{t_0s_T} = 2 \frac{a}{R} = 1.4070, \quad p \text{ は圧力.}$$

ただし,  $t_0$  は最初の板厚,  $s_T$  は材料の引張強さである. 筆者が以前に試索法で求めた  $pa/t_0s_T$  の値<sup>2)</sup> は上の結果

研 究 速 報



第 4 図 液圧バルジ試験における応力と歪分布の例と非常によく一致する。

級数解から得られる  $\xi_a = 0.7145$  であり、同じく級数解による膨れ高さ  $h$  は本例題において

$$h/a = 0.41603$$

である。したがって、筆者のところで試作したバルジ試験装置<sup>2)</sup>( $2a = 150\text{mm}$ )では、膨れ高さが約 30 mm に達するところまでは、一般に級数解を適用することが可能である。

**球頭ポンチにおける応力と歪分布の例** 第 5 図は、球頭ポンチとの接触部における応力と歪の計算例を示す。応力と歪の分布は、主として摩擦の影響により、液圧バルジ試験の場合(第 4 図参照)とかなり相違する。本例題の厚さ歪  $\varepsilon_t$  の分布には二つの極小が認められないが、摩擦係数が増せば二つの極小があらわれるようになる。球頭ポンチについては、すでに微分解析機(結線は次の速報で紹介)による詳細な計算を終わり、また電子計算機(東大工学部 TAC)を用いた計算も実施した\*。第 1 表は数値計算と電子計算機による解の比較を示す。

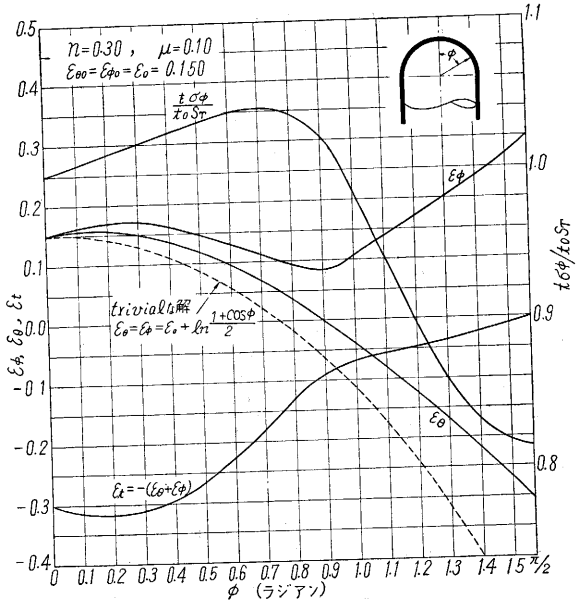
**付記** 数値計算にあたっては、計算の精度を確かめるため、有効数字 5~6 桁で計算を行なった。計算上必要な刻みは、基準の量を 1 として 0.025 程度である。

主題の解析には、有効数字 3 桁で事足りるのであろうが刻みを大きくすると計算の誤差が大きく、大切な現象を見失う恐れがある。なお、孔上げ試験における孔の周辺近傍の応力勾配の検討には、級数解が最も適切である。

(1960. 5. 26)

文 献

- 1) Milne, W. E., Numerical Solution of Differential Equations (Wiley, 1953), 64.
- 2) 山田, 自動車技術会論文集, 3 (1956), 19.
- 3) 山田, 日本機械学会誌, 62-489 (1959), 1437.



第 5 図 球頭ポンチとの接触部における応力と歪分布の例

第 1 表 数値計算結果の比較

$\phi$		数値計算	電子計算機 (TAC)	
		(Milne の方法)	(Runge-Kutta-Gill の方法)	
0	$\varepsilon_\phi$	0.150000	同 左	
	$\varepsilon_\theta$	0.150000		
	$t\sigma_\phi$	1.000000		
0.10	$\varepsilon_\phi$	0.160183	0.160182	68
	$\varepsilon_\theta$	0.153742	0.153743	28
	$t\sigma_\phi$	1.006474	1.006471	6
0.20	$\varepsilon_\phi$	0.165768	0.165767	18
	$\varepsilon_\theta$	0.152727	0.152728	12
	$t\sigma_\phi$	1.012896	1.012892	6
0.30	$\varepsilon_\phi$	0.165620	0.165621	49
	$\varepsilon_\theta$	0.146618	0.146618	75
	$t\sigma_\phi$	1.019600	1.019597	1
0.40	$\varepsilon_\phi$	0.159447	0.159449	58
	$\varepsilon_\theta$	0.135196	0.135192	61
	$t\sigma_\phi$	1.026581	1.026580	5
0.50	$\varepsilon_\phi$	0.147938	0.147948	26
	$\varepsilon_\theta$	0.118396	0.118395	44
	$t\sigma_\phi$	1.033388	1.033387	0
1.00	$\varepsilon_\phi$	0.102502	0.102608	77
	$\varepsilon_\theta$	-0.037946	-0.037944	388
	$t\sigma_\phi$	0.988939	0.988954	23
1.50	$\varepsilon_\phi$	0.268165	0.268336	74
	$\varepsilon_\theta$	-0.258160	-0.258079	56
	$t\sigma_\phi$	0.818927	0.819343	48
刻み		$\phi = 0.025$	$\phi = 0.025$	

\* 計算にあたっては、渡辺 勝助教授に負うところがきわめて大きかったことを感謝する。