

OPTIMIZATION

高 橋 安 人

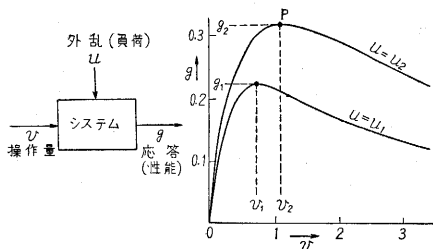
表題にかかげた言葉が近頃の自動制御界でよく使われるようだ。元来自動制御はある状態をできるだけ希望点近くに保持しようとするものとして発達してきた。このさい希望点はある物体の位置とかある場所の温度などとして与えられるのが常であった。ところが問題をもう一歩進めるとわれわれが希望するのは特定の変数の特定の値ではなく、そのシステムの性能や効率を最高に保つとか、損失を最小にとどめるということになる。Optimization (最適化, 頂点保持) の思想はこの段階で表面に出てくるものと思われる。以下はこの思想を中心として、最初に静的最適化 (Static Optimization) と特にその一方式について述べてから、動的最適化 (Dynamic Optimization) に関する動的計画法 (Dynamic Programming) を 1 例について紹介し、最後にこの新段階へ向かう技術的動向に関する筆者の感想を記すことにする。

1. 静的最適化とその手法

その昔漱石が“情に桿させば……”と書いた通り、美しくバランスのとれた人生の進め方は難しい。ついつい傾きに傾き、その次には反対に傾く。一寸先が闇の場合には最適と判断されるコースを探りながらジグザグに辿るかっこうになる。人生におけるジグザグ周期は最適化 (optimize) しようとする問題によって違いますが、数日のこともあるし、数年以上のこともある。

ジェット機操縦者のテストや練習には電子模型を使う。この模型で映像管上を動く輝点を操縦桿の操作により追従させると、やはり一種のジグザグ (dither) が現われるという。それは 1~2 サイクルの速さで、当然のことながら熟練するにつれ振幅が小さくなるそうだ。

さて問題を簡単な 1 例に絞って第 1 図のシステム (付



第 1 図 システム静特性の例, u, v, g はそれぞれ定常値

録 1) に注目しよう。このシステムは負荷が u_1 の場合には操作量が v_1 のとき性能値が最高点 g_1 をとる静特

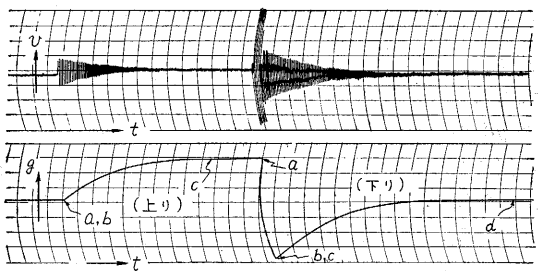
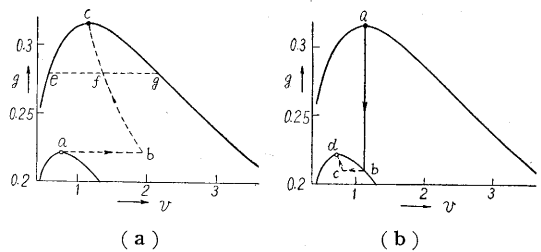
性をもつ。静特性は負荷によって変わり、負荷 u_2 では操作量 v_2 に対する性能値 g_2 が最適点となる。

もしこのシステムで性能値 g がわれわれの測り得る唯一の応答, v が加え得る唯一の操作量ならば、どうやって g の頂点保持を図ったらよいだろうか?

やはり dither が有力な手法である。 v に正弦波を重畳するとプロセスの入出力から頂点よりの偏れが算出される²⁾。試行をくり返してもよい。 v を Δv だけ正または負の向きに変えて g の変化を測る。もし g が増す場合はさらに同じ向きに Δv だけ変える。これを続けるとつい Δv の変化で g が減るようになる。ここで v の変化方向を逆変し、今度は $\Delta v/2$ の大きさの試行を続ける。以下同様にして v を最適値 v_1 なり v_2 へ取れんさせることができる³⁾。

以上の思想は第 1 図で外乱 (負荷) u の時間的変化が十分にゆるやかであるか、または u の変化に対する性能 v の変化が十分に速い場合には一応問題なくなるとくされる。換言すればこれは静特性に注目する Optimization であるということができる。

では、この方式の動的挙動はどんなであろうか? 上記の dither による v の静的最適点保持が時間的におくれなしに行なわれると前提し、 u が u_1 から u_2 へ突変す



(a) は上り, (b) は下り, (c) はアナログ計算機で得た応答
第 2 図 静的に頂点保持する理想機構の動的応答例

るとき v が1次おくれを伴って新しい平衡値へ漸近するものとすれば、 v の平均値の推移は第2図 (a) の a-b-c となることが推論される (付録2参照)。ここに v の“平均値”とは dither を除いた残りの値という意味である。また負荷が逆に u_2 から u_1 へ突変すれば v の平均値は第2図 (b) のように a から b, c をへて d へ漸近する。第2図 (c) はアナログ計算機で得た応答で、左半が (a)、右半が (b) の挙動を示す。論理回路でなく正弦波状の dither (10 c. p. s) を用いたので、“下り”の応答で a, b 間も v が大きく振れた。図中の a, b, c, d は第2図 (a), (b) のそれぞれ対応点を表わす。

第2図の推移は第1図のシステムで外乱 u が測れないものとして導いた。もしこのシステムで u を測ることができ、しかも u に対する g の静特性がわかっておれば、 u が u_1 から u_2 へ (またはその逆に) 変わるとき、それに応じて直ちに v を v_1 から v_2 へ (またはその逆に) 変えるという制御方法⁴⁾が考えられる (付録5)。このやり方や、第2図の結果等の優劣を論ずるためには、比較の基準として、 v の動的な最適推移が知りたくなる。これが動的最適化の問題である。動的計画法を用いて v の動的最適推移 (optimal policy) がいかに求められるかをつぎに記そう。

2. 動的計画法⁵⁾ の一応用例

上の例で v の動的最適推移とは一つの最適平衡点 (第1図の v_1, g_1) から他のそれ (第1図の v_2, g_2) への過渡経過において $\int g \cdot dt$ (ただし t は時間) を最大にするような v の変え方と定義しよう。

このような問題の数値解を求める実際的手法として最近注目されはじめた動的計画法がある。以下は上の例へこの方法を応用してみよう。

いま時間を量子化し、 v の値が Δ 時間ごとに階段状に変わり得るとし、 $t=0$ から $t=N\Delta$ までの期間を考えると、所要の v の経過は v_I, v_{II}, \dots, v_N なる N 箇の数列で表わされるはずである。

動的計画法ではこの N 段の過程を扱うのにまず1段の過程を計算する。この1段過程の $\int g \cdot dt = g \cdot \Delta$ (ただし右辺の g は Δ 時間内の g の平均値) を一つの初期条件 c に対しいろいろな v の値について計算し、 $g\Delta$ を最大にする v の値を見付け、それを $v=v_1$ とする⁶⁾。また $g\Delta$ の最大値を f_1 で表わそう。これをいろいろな c の値について繰り返すと f_1 と v_1 とが c の関数として求められる。すなわちつぎの式が書ける。

$$f_1(c) = \text{Max}_v [g(c, v) \Delta] \dots\dots\dots (1)$$

もし各段をそれぞれ最適にもっていくことが N 段よりなる全過程の最適にもなる場合なら (1) 式の計算だけで終わってよい (付録3)。各段単独の最適が全体の

最適とはならない場合には、計算を2段、3段……と N 段過程まで下記のように進める。この計算では問題の過程がつぎの特性をもっていると前提する。

“もし初期条件 c_0 から出発する N 段過程が最適過程なら、その任意の途中段 (たとえば第 n 段) から最終段までの過程も最適である”。

説明: N 段最適過程がつぎの表で与えられるとする。

段の番号	1	2	3	...	n	N		
時刻 t	0	Δ	2Δ	...	$(n-1)\Delta$	$n\Delta$...	$(N-1)\Delta$	$N\Delta$
状態量	c_0	c_1	c_2	...	c_{n-1}	c_n	...	c_{N-1}	c_N
操作量	v_I	v_{II}	v_{III}	...	v_n	v_{n+1}		

すなわち v_I, v_{II}, \dots が初期条件 c_0 から出発する N 段過程の最適操作とする。そうすると v_n, v_{n+1}, \dots は初期条件 c_{n-1} から出発する $(N-n)$ 段過程の最適操作である。ただし $1 < n < N$ 。

この性質を前提すると2段最適過程では2段目はそれ自体が1段最適過程すなわち (1) 式で求めたものにほかならない。この f_1 の手前へ第1段の $g\Delta$ をつけて、両者の和 (すなわち $\int_0^{2\Delta} g dt$) を最大にするような v の値 v_2 ⁶⁾ を求めると、それが第1段に加えるべき操作量となる。すなわち

$$f_2(c) = \text{Max}_v [g(c, v) \Delta + f_1(c')] \dots\dots\dots (2)$$

ここに $f_2(c)$ が $\int_0^{2\Delta} g dt$ の最大値、 c は初期条件、 c' は第2段目の初期条件すなわち c と第1段目の v の選定によりおのずから定まる値。こうして f_2 と v_2 とを c の関数として求めることができる。

ついで3段最適過程を考える。この過程の第2、第3段は上の前提によりそれ自体が2段最適過程である。その手前へ第1段の $g\Delta$ をつけ、 $\int_0^{3\Delta} g dt$ すなわち $(g\Delta + f_2)$ を最大にする v の値 v_3 を求めると、それが3段過程の第1段に加えるべき最適操作量である。すなわち

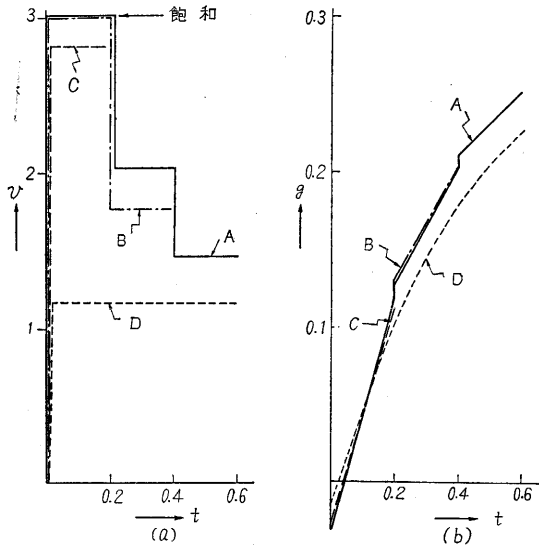
$$f_3(c) = \text{Max}_v [g(c, v) \Delta + f_2(c')] \dots\dots\dots (3)$$

こうして f_3 と v_3 とを c の問題として求める。以下同様に進めて、各種の c に対する $v_1, f_1; v_2, f_2; \dots; v_N, f_N$ の表 (付録の第2表) を完成することができる。

この表で、与えられた初期条件 $c=c_0$ に対する $f_N(c_0)$ が N 段最適過程の与える $\int_0^{N\Delta} g dt$ の値 (すなわち最大値)、 $v_N(c_0)$ が最適経過の第1段目の v つまり v_I である。 v_I と c_0 とから第1段を計算すると第2段の初期条件 c_1 が求まる。前記の表から $c=c_1$ に対する $(N-1)$ 段最適過程の $v_{N-1}(c_1)$ が判明、これが第2段目の v_{II} である。以下同様にして v_{III}, v_{IV}, \dots が順次求められる。

さて第1図のシステムで、簡単のために図示の線図の

原点 ($g=0, v=0$) を初期条件と考え、時間 $t>0$ に対し $u=u_2$ の場合に図示 P の静的最適点へ向かって進む最適動的経過(この場合には“最適起動曲線”)が付録 4 に計算してある。この計算はシステムの動特性として逆応答を仮定したので、初期条件の取扱いが上記の c に対するとは少し違いますが、動的計画の根本原理は同じである。第 3 図が 1 例についての計算結果を示す。A は 3 段



A, B, C はそれぞれ 3, 2, 1 段最適応答, D はいきなり静的最適入力を与えた場合. A は実線, B は鎖線, C は破線 D は点線で表わし, (a) では一致すべき線が平行線状に少し離れてあり, (b) では A~C 間の相違がやや誇張して見易くしてある。

第 3 図 ある逆応答プロセスの動的応答

最適, B は 2 段最適, C は一段最適である。たとえば B は 1 段目では C より劣るが, 1 段目を C にすると 2 段目にどんな v をえらんでも 2 段全体としては B の成績より劣る結果しか得られないのである。なおこの例で u をいきなり最終最適値へ突変させると, 上記 3 段階期間中の成績は動的最適成績 f_0 の 65% となる (付録 5)。

以上の例は初期条件を一つの量とした。2 次系ならこれは二つになり, 計算回数は上記の約 2 乗になる。

3. 最適化のための自動制御手段について

1 と 2 では簡単な抽象例について静的および動的最適化の概念を論じた。これを実際の自動制御でどう実施するかとなると, 問題によって議論に大差を生ずるだろう。たとえば大きな生産能力をもつプラントのかなり長期にわたる生産量の制御と, そのプラント内に含まれる

付

1. プロセスの 1 例

エネルギーや物質収支の動的方程式は, その発生または供給率 Q から消費率とか正味吸収率 H , 排出率 L を

一つの化学反応槽の連続制御とでは, かりに理論的には似た形が認められたとしても, 実際的な話がまったく違ってくる。前者では off-line の数字計算機で日産量を割り当てるときに動的計画法を適用することが考えられるのに対し, 後者では在来の自動制御に簡単に信頼性の高い装置若干を追設して性能の一步向上を図るのが妥当なところかもしれない。

I. M. Stein⁷⁾ は昨年“計算機制御の展望”と題する講演で, 計算機的能力だけを見てそれがすぐにも連続プロセス制御に威力を発揮するだろうと早合点しては危険であると戒めた。Stein は計装機器メーカーの一つである Leeds & Northrup の社長である。そこで彼の警告は計装界に最近仲間入りした計算機関係者に向けられた。これら新人は何でもかでも今すぐ計算機で制御できると約束しすぎる傾向があるが, 計算機技術以外のたくさんの知識(プロセス特性など)なしでは計算機制御による真の効果は発揮できまいというのである。

最適化は性能をよりよくすること, つまり 60% から 90% への飛躍よりもむしろ 95% から 98% への前進を意味する類の場合が多いようだ。そのことだけからこの前進を放棄する理由はもちろんない。要は実施手段に帰着する。高度の段階だけに理論上期待される性能改善量を正確につかむこと, そのためにはプロセスをよりよく知ることが要求される。しかし高度の段階だからといって数字計算機使用が唯一の実施手段とは限らない。数字計算機がいかに精密な数学模型であっても所詮はプロセス特性の近似を扱う点で他の近似手段とは程度の差を残すに過ぎない。そして近似手段は問題に応じ, 在来の自動制御系を結合するとか, あるいはもっと簡単な(たとえば接点)機構の組合せ配置とか, 閉ループと開ループの混用とか, 限りなく考えられる。こうして最適化の問題点は, 近似最適制御を実施するための最適近似方式の企画の問題になるのではなからうか? (1960—1)

注および引用文献

- 1) Inst. & Control Systems, 32, 11 (1959—11) p. 1708
- 2) 高橋安人, 自動制御理論, 改訂版 (1959, 岩波) p. 174
- 3) たとえば“自動制御発達の新段階”, 高橋安人, 機械学会誌, 63巻, 492号 (1960—1), p. 187—191
- 4) Open-loop による immediate correction.
- 5) “Dynamic Programming Approach to Brachistochronic Program of Batch Process.” A. Nomoto, Prof. of Case Inst. of Tech., Aug., 1959.
- 6) ここに使う v_1, v_2 は第 1 図に関連したものではない。
- 7) I. M. Stein, Modern Precision, 19, 2 (1959—秋) p. 8.

録

引いた残りが蓄積率 S に等しいとの形に書かれることが多い。

$$S = Q - H - L \dots\dots\dots (4)$$

この収支からプロセス内のポテンシャル θ が定まる。

H と L は θ に比例, また探作量 v が正味供給率 Q と L とに関係するとし,

$$Q = k(1 - e^{-bv}), \quad H = h\theta, \quad L = (v + a)\theta,$$

$$S = C d\theta/dt, \quad a, b, C, h, k \text{ は定数}$$

なる関係式を前提すれば, $v = \text{一定}$ のときの (4) 式の解は,

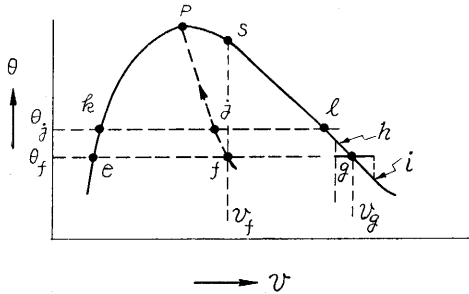
$$\theta = \frac{k(1 - e^{-bv})}{v + a + h} (1 - e^{-t/T}) + \theta_0 e^{-t/T} \dots\dots\dots (5)$$

$$T = C/(v + a + h)$$

その定常値 $k(1 - e^{-bv})/(v + a + h) = g$ は v に対し第 1 図のような曲線を描く. 図の P を通る曲線は $C=1, a+h=1, b=1, k=1$ とおいた場合のもの. 説明のための比喩を使えば Q は一定の燃料供給流からの発生熱量, H は熱吸収量, L は持ちにげ量のいずれも時間的割合, θ は燃焼室温度, v は空気量. これはどこまでも比喩であって, 燃焼の問題を扱うのがこの論文の目的ではない.

2. 静的頂点保持制御の動的応答.

試行 (dither) が無限に速く, 試行結果検出感度が無限大で, 試行結果がプラスになる方向へ操作量 v を即刻に動かすものを理想的頂点保持制御動作と考えよう. 第 4 図で P を頂点とする静特性をもつ前記のプロセス



第 4 図 前出第 2 図の説明

が過渡状態にあるとし, ある瞬間のプロセス応答値を θ_f とする. dither が図示 v_o の近傍で行なわれておけば, v_o を少し超すと応答は i に向け下がろうとし, v_o の少し手前なら h に向け上がろうとする ((2) 式参照). ゆえに頂点保持制御動作は v を v_o から左の方へ (無限に速く) 動かすが, 図示の e 点で (いま記したと同じ理由から) 引き返す. つまり eg 間を無限に速く往復する. v の平均値は \overline{eg} の中点 f に相当する v_f である. この平均入力 v_f によりプロセス応答は第 4 図の s 点に向け (5) 式の応答をおこし, 短時間ののち θ_j に達する. このとき v は第 4 図に示す kl の中点 f に相当する平均値をとる. 以後同様にして結局第 2 図 (a) の経路 $abcd$ を辿ることが説明される. 第 2 図 (b) の $abcd$ も同様であるが, ab 間では dither の振幅をこえて左に偏れることはおこらない.

3. 1 段過程と多段過程

(5) 式において付録 1 に記した定数値を仮定し v の一定値に対し初期条件値 θ_0 から出発して $t = \Delta = 0.2$ なる短時間後の応答 θ_2 を求めると,

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= x(1-y) + \theta_0 y \\ \text{ただし } x &= (1 - e^{-v})/(1+v) \\ y &= e^{-(1+v)/5} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

となる. (4) 式の H はこの Δ 時間内の θ の平均値, したがって $(\theta_0 + \theta_2)/2$ に近似的に比例するから, 正味利得はつぎの $g\Delta$ によって代表される.

$$g\Delta = [(\theta_0 + \theta_2)/2]\Delta = (\theta_0 + \theta_2)/10 \dots\dots\dots (7)$$

ここに用いた g は第 1, 2 図および (5) 式の下に付記した静特性に対する g とは別種のものである.

いま $t=0$ から $t=\Delta$ まで 1 段の過程で $g\Delta$ を最大にするような v の値を θ_0 の関数として求めよう. たとえば $\theta_0=0$ として θ_2 をいろいろな v について計算すると第 1 表のようなになる. これから内挿により $g\Delta$ を最大

第 1 表 $\theta_0=0$ の場合

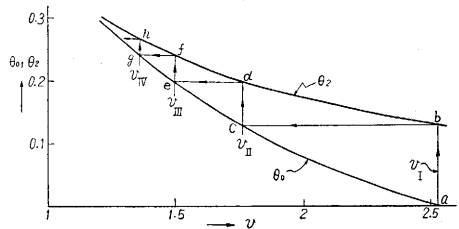
v	θ_2	$g\Delta$
2.0	0.13004	0.01300
2.2	0.13135	0.01314
2.4	0.13195	0.01320
2.6	0.13198	0.01320
2.8	0.15157	0.01316

にする条件は

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= 0 \text{ に対し } v = 2.52 \\ \text{このとき } \theta_2 &= 0.1320 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

と判明する. この条件は変分を使っても求められるが下記の動的計画法の準備として第 1 表を用意した.

さて (8) 式のような結果を各種の θ_0 について求め, v に対し θ_0, θ_2 をプロットすると第 5 図を得る. この



第 5 図 多段動的最適過程の図解

プロセスでは各段でその段の $g\Delta$ を最大にする v をえらんでいくことが, 多段過程全体の $\sum g\Delta$ を最大にする. その証明は第 1 表のような特性を念頭において読者みずからたとえば 2 段過程について試みられたい.

したがってこの場合の最適起動過程 ($\sum g\Delta$ を最大にする v の経路) は, 第 1 図の原点を初期条件として P 点へ向かう場合に, 第 5 図の作図から求まる v_I, v_{II}, \dots で与えられる.

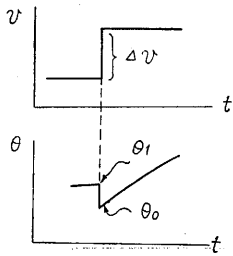
4. 逆応答プロセスの最適起動

(4) 式の Q を

$$Q = k_1(1 - e^{-bv}) - k_2 dv/dt$$

と仮定すれば $v = \text{一定}$ に対する (4) 式の解は (5) 式と同形になるが, (5) 式中の θ_0 だけが初期条件ではなく, 第 6 図の逆応答部分に関し

$$\theta_0 = \theta_1 - \frac{k_2}{c} \Delta v \dots\dots\dots (9)$$



第 6 図 逆応答

となる。ここで $C/k_2=100$, $k_1=1$, 他の諸定数は付録 1 におけると同じ値に仮定し, $t=\Delta=0.2$ のちの信号値を求めると, それは (6) 式と一致するが, 式中の θ_0 は (9) 式により

$$\theta_0 = \theta_1 - \Delta v / 100 \quad (10)$$

となる。付録 1 に付記した比較にあてはめると, いま求めた逆応答は“燃焼用空気を増すと焔が一時冷える作用”と説明できよう。

さて (10) 式を初期条件値, すなわち $\theta_0=c$ と考えれば (1) 式を満足する $f_1(c)$ と $v_1(c)$ の関係は第 5 図の θ_0 曲線から直ちに得られる。第 2 表の左端にこれが記入してある。

つぎに 2 段過程を計算して (2) 式の $f_2(c)$, $v_2(c)$ を求める。初期条件 c から出発し $v=v_A$ として得る第 1 段の終端値 ((6) 式) が θ_2 ならば, これに続く第 2 段の初期値 c' は (10) 式により

$$c' = \theta_2 - (v_B - v_A) / 100 \quad (11)$$

ただし v_B は第 2 段の v の値

となる。(11) 式の一部を移項して

$$c' + \frac{v_B}{100} = \theta_2 + \frac{v_A}{100} = p \quad (12)$$

とおけば, p は第 1 段の θ_2 と v_A だけから求まる。また第 2 段は (1) 式をみただけから, その v_B すなわち (1) 式の v_1 は c' (すなわち (1) 式の c) だけの関数であり, p の値が第 1 段から定まると $p=c'+v_1(c')/100$ により c' を見出し, したがって $f_1(c')$ を第 2 表から見出すことができる。すなわち次の順序に計算を進める。

第 2 表 3 段過程の動的計画表 ($v \leq 3$)

c	v_1	f_1	v_2	f_2	v_3	f_3
-0.04	2.88	0.0073	3	0.040	3	0.0846
0	2.52	0.0132	3	0.048	3	0.0943
0.04	2.24	0.0193	2.75	0.058		
0.08	1.98	0.0254	2.34	0.067		
0.12	1.79	0.0316	2.04	0.077		
0.16	1.64	0.0380	1.86	0.086		
0.20	1.48	0.0444	1.69	0.096		
0.24	1.36	0.0508	1.54	0.107		
0.28	1.25	0.0574	1.41	0.117		

- (1) c の値を前提, たとえば $c=0$.
- (2) いろいろな v につき θ_2, g_A を求める (第 1 表).
- (3) 各 v につき $p=\theta_2+v/100$ を計算.

(4) 各 p に対し $p=c'+v_1(c')/100$ をみただけ c' を求める。(第 2 表の $v_1(c)$ と c の関係を利用).

(5) 各 c' に対し $f_1(c')$ を求める (第 2 表).

(6) 各 v につき (2) の g_A と (5) の $f_1(c')$ の和を求め, この和を最大値 f_2 にする v の値を求める。これが $v=v_2$.

(7) 別の c につき (2)–(6) を繰り返す。

第 2 表の $f_2(c), v(c)$ はこうして求めた。

つぎに (3) 式の 3 段過程では上の手順 (4) で $v_1(c')$ の代わりに $v_2(c')$ を, (5) で $f_2(c')$ を用い, (6) で $g_A+f_2(c')$ を最大にする v の値 v_3 を求めればよい。以下同様。

こうして第 2 表が必要なところ (たとえば第 3 段) まで完成すると, 与えられた初期条件 (たとえば第 1 図の原点) からの最適過程がつぎのように順次求められる。

(1) $t=0$ の直前に $\theta=0, v=0$ なら (10) 式 (第 6 図) により

$$c = -v_1/100$$

しかるに $v_1=v_2(c)$ だから第 2 表の $v_2(c)$ と c の関係から $c=-0.03$ を得る。

(2) $c=-0.03$ に対し第 2 表を内挿して

$$f_2(c) = 0.0870$$

を得る。これが 3 段過程で得られる $\sum g_A$ の最大値。

(3) $c=-0.03, v_1=v_2=3$ から (6) 式により $\theta_2=0.1173$, (12) 式により $p=\theta_2+v_2/100=0.1473$. 第 2 表の $v_2(c)$ と c の関係を内挿して $c+v_2(c)/100=0.1473$ となる c の値を c' とすれば, $c'=0.128$. このとき $v_2(c')=2.02$, これが 2 段目の v_{II} .

(4) $c'=0.128$ と v_{II} とから (6) 式により第 2 段終端値が $\theta_2=0.1990$ と求まる。ゆえに $p=0.1990+2.0/100=0.2190=c+v_1(c)/100$ となる c は第 2 表から 0.203 , このとき $v_1=1.45$. これが v_{III} である。

第 3 図の A はこうして求めた。なお以上の計算では簡単にするためと手法の柔軟性を示すためにつぎの拘束条件を前提した。

$$v \leq 3$$

5. 入力を直ちに静的最適値にする場合

第 1 図の頂点 P は $v=1.146$ にある。 $t=0$ の直前まで入出力 0 とし, $t=0$ に v を 1.146 にすれば応答は $\theta=0.3177-0.3292e^{-2.146t}$

となり, $t=0$ から 0.6 までの $\sum g_A$ は 0.0578 となる。