複素領域における円筒函数の商函数

尾 上 守 夫

1. はしがき

円筒函数の商函数とは次式で定義される函数である.

$$\mathfrak{C}_\nu(z)=\frac{zC_{\nu-1}(z)}{C_\nu(z)} \qquad (1)$$

ここで $C_\nu(z)$ は任意の ν 次の円筒函数である. もし $C_\nu(z)$ として第1種のベッセル函数 $J_\nu(z)$ をとれば, それに対応した第1種の商函数 $\mathfrak{J}_\nu(z)$ が得られる.

この商函数は円筒座標系における境界値問題——たとえば丸棒内の熱伝導, 弾性波の伝播, 円形導波管内の電磁波, 円板, 円筒の振動等——をとくのに有用であってその公式集, 数表は生研報告として出ている(1). とくに需要の多い第1種の函数については昨年広い範囲の表が出版された(2).

これらの表はすべて z の実数値または純虚数値に対するものであった. これは商函数が z の実軸または虚軸上のみで実数値をとり, 従来の応用にはそれで十分だったからである.

しかし最近次節に例示したように z が一般の複素数の場合の商函数の値が必要となる問題が多くなってきた. この要求に答えるため複素変数 z に対する第1種の商函数の表を作製した. ここではそれを図面にして複素領域における函数の性質を概観できるようにした.

2. 複素変数の商函数が必要な例——速度分散方程式の複素分枝の問題

丸棒内を伝播する弾性波の周波数と波数の関係はいわゆる Pochhammer-Chree の速度分散方程式で与えられる. この方程式は商函数を使って次の形に書ける(3).

$$\{(1-\tau)q^2+p^2\}^2\mathfrak{J}_1(p)+(2-\tau)p^2(\tau q^2-2p^2)\mathfrak{J}_1(q)$$
$$-(2-\tau)p^2(q^2-p^2)=0 \qquad (2)$$

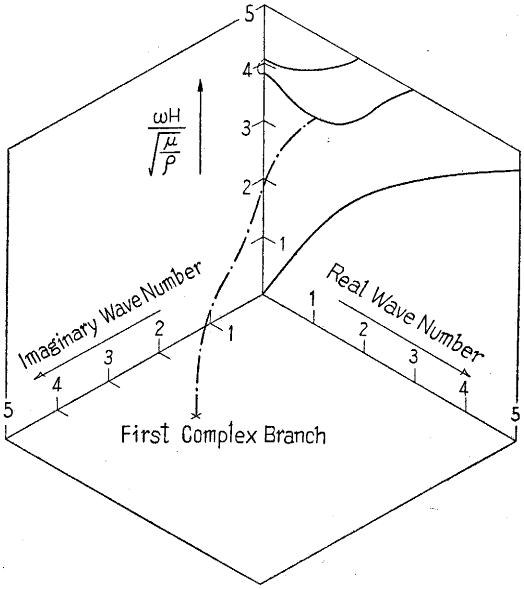
ここに p, q は角周波数, 波数と次の関係がある媒介変数である.

$$(\omega H)^2=\frac{2\mu(q^2-p^2)}{\rho(2-\tau)} \qquad (3)$$

$$(\xi H)^2=\frac{\tau q^2-2p^2}{2-\tau} \qquad (4)$$

$$\tau=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \qquad (5)$$

H: 半径, ξ: 波数, λ, μ: Lamé の定数, ρ: 密度, ω: 角周波数



Brancehes of Pochhammer-Chree's Equation
Solid lines: Real branches
Dotted lines: Pure imaginary branches
Chained lines: Complex branches

第 1 図

第1図に (2) 式の解を示す. 図中実線は実の波数を与える分枝, 点線は純虚数の波数を与える分枝, 鎖線は複素数の波数を与える分枝である. 物理的に言えば実の分枝は距離に関して正弦的な波動を, 純虚数の分枝は指数型の波動, 複素分枝は指数的に減衰または増大する正弦的な波動に相当する. 前二者は従来からも知られていたが, 複素分枝はごく最近存在が明らかになったものである(4). 後二者は無限長の丸棒では発散してしまって意味がないが, 半無限または有限長の丸棒では重大な意義をもつ. 具体的にいえば丸棒の端面における衝撃, 円筒の振動などの問題であるが, その詳細は別の機会にゆずる. ただ複素分枝の研究には複素領域における商函数の性質を理解することがぜひとも必要なことは今まで述べたことによって明らかであろう.

3. 図面の説明

第1種の商函数は次式で見られるように z の実軸に関しては共軛, 虚軸に関しては対称であるから, 考察を第1象限に限っても差支えない.

$$\mathfrak{J}_\nu(\bar{z})=\overline{\mathfrak{J}_\nu(z)} \qquad (6)$$

$$\mathfrak{J}_\nu(-z)=\mathfrak{J}_\nu(z) \qquad (7)$$

第2図は $\mathfrak{J}_1(z)$ の絶対値および偏角を示したもの，第3図は同じく $\mathfrak{J}_1(z)$ の実数部，虚数部を示したものである．

第4図，第5図はそれぞれ $\mathfrak{J}_2(z)$ および $\mathfrak{J}_3(z)$ の実数部，虚数部を示したものである．

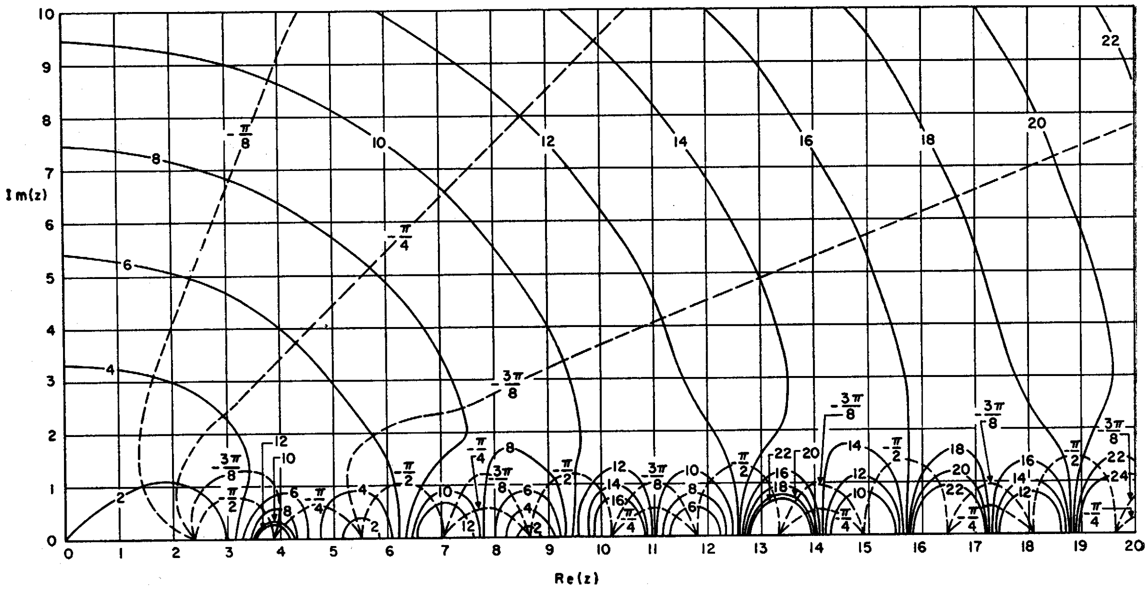
図から判るように実軸の付近は極の存在のため複雑であるが，実軸から十分離れたところでは変化の模様は極めて簡単である．これは $z=x+iy$ とするとき，y が十分大きければ次の近似式が成立するためである．

$$\mathfrak{J}_\nu(z)=\nu-\frac{1}{2}+y-ix \qquad (8)$$

したがって表をつくつた際は実軸の近くでは変数のきざみは十分小さく，実軸から離れるにしたがってきざみを大にするように配慮した．現在次の部分が完成している．

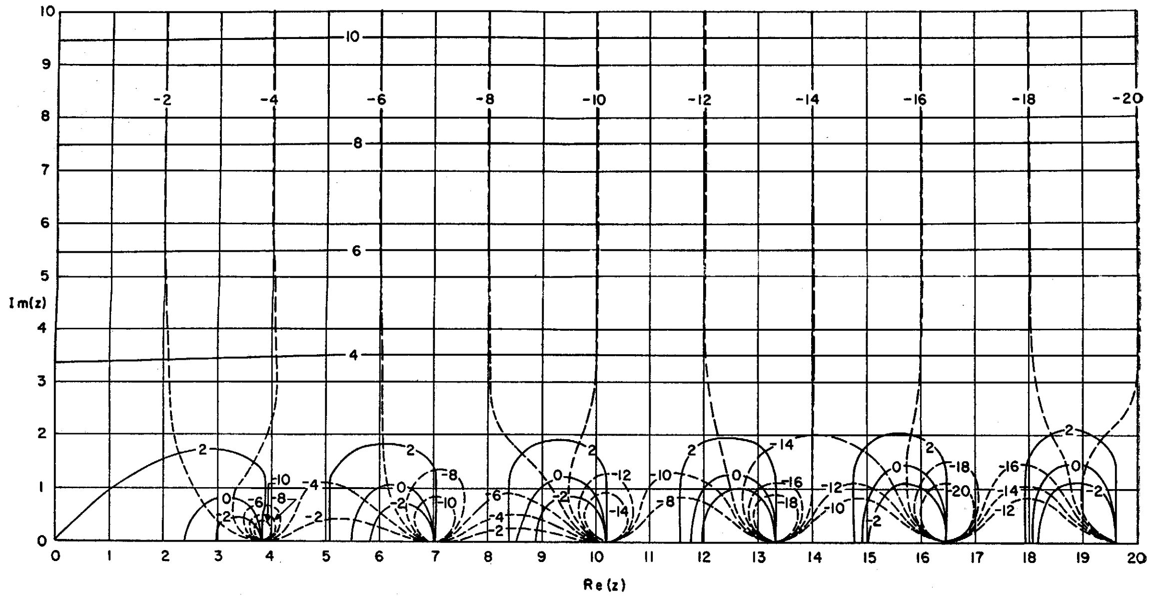
$\nu=1(1)3,\quad x=0(0.1)10,$

$y=0(0.1)2.5(0.2)5(0.5)10$



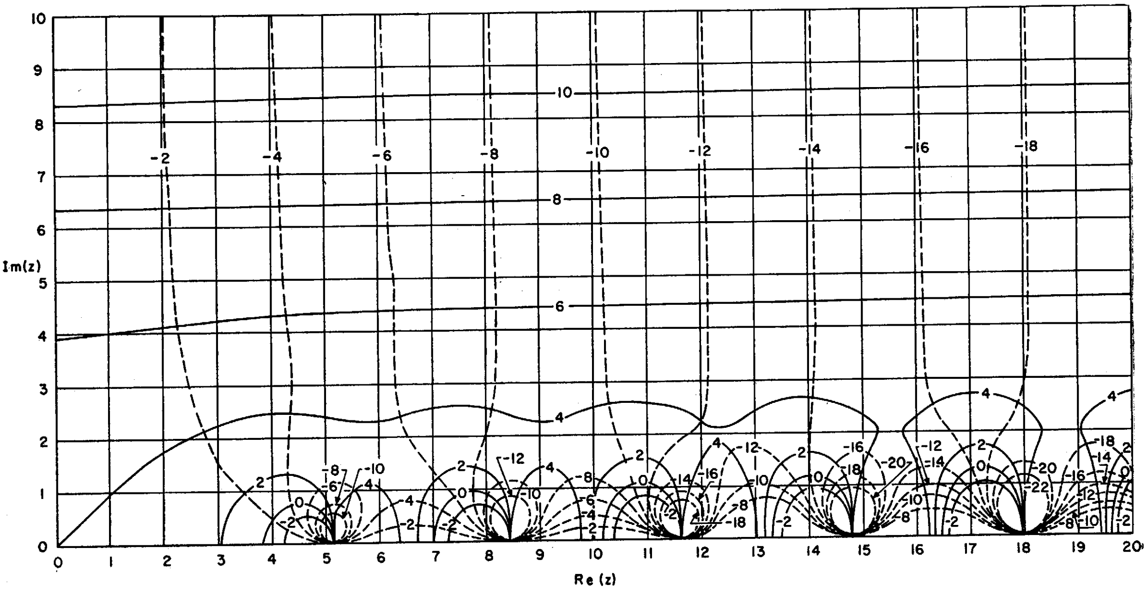
Solid lines: $|\mathfrak{J}_1(z)|$, Dotted lines: Arg$[\mathfrak{J}_1(z)]$

第　2　図



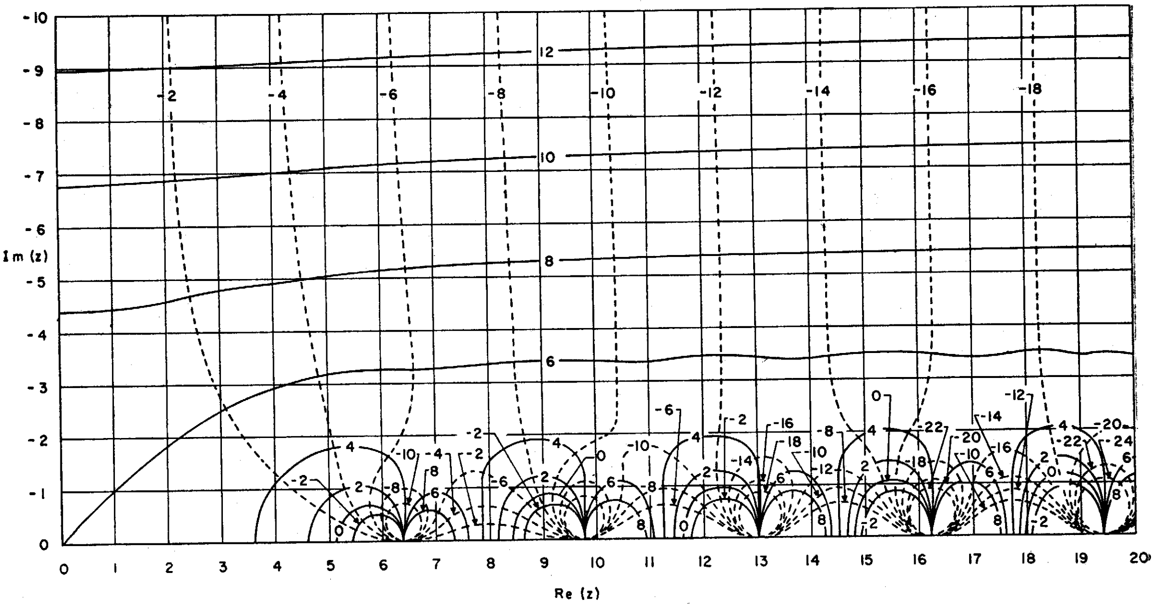
Solid lines: Re $[\mathfrak{J}_1(z)]$, Dotted lines: Im $[\mathfrak{J}_1(z)]$

第　3　図



Solid lines: Re 〔$\mathfrak{J}_2(z)$〕, Dotted lines: Im 〔$\mathfrak{J}_2(z)$〕

第 4 図



Solid lines: Re 〔$\mathfrak{J}_3(z)$〕, Dotted lines: Im 〔$\mathfrak{J}_3(z)$〕

第 5 図

謝 辞

この計算は米国出張中 Columbia University の Electronics Research Laboratory において行った．計算機使用の便宜を与えられた所長 O'Neil 教授，またご助言下さった Mindlin 教授，Harris 教授に深謝する次第である．

(1959. 3. 20)

文 献

(1) 尾上：Formulae and Tables: The Modified Quotients of Cylincer Functions, 生研報告, Vol. 4, No. 5 (1955. 3)

(2) 尾上：Tables of Modified Quotients of Bessel Functions of the First Kind for Real and Imaginary Arguments, Columbia University Press, New York, 1958.
$\nu=1(1)16$, x or $y=0(0.01)20$

(3) 尾上：板および丸棒の速度分散方程式の根の検討 電気通信学会超音波専門委員会資料 (1955. 7. 20)

(4) R. D. Mindlin and M. Onoe: to be published.