

計数率計の高速化

森 脇 義 雄・河 村 達 雄

§. 1 緒 言

電話トラヒック理論は加入者からの呼の統計的性質を調べ、これを利用して通信網の設計を能率的に行う通信工学の一分野である。この場合加入者からの呼は、おのおのがまったく偶然的に発生するものと考えられ、したがってこれらを取り扱う場合にはまったく統計的の取扱が可能である。電話の呼と同じような性質を持つものに放射性同位元素から発する放射線が考えられる。たとえばガイガー計数管、電離箱、シンチレーションカウンタなどの出力から得られる電気的パルスも電話加入者からの呼と同じく純偶然的に発するものと見なされ統計的にこれらはポアソン分布にしたがう。

このような純偶然量を取り扱う場合に平均頻度、つまり単位時間中にその事象のおこる度数を測定することがしばしば必要となってくる。もちろんこれらは偶然量であるから測定値が時間とともに変動するのはやむを得ないが、この測定値変動をできるだけ少なくして平均値に近い値を指示させることが望まれる。ここではこのような量を測定する方法、特にこれを短時間で測定する方法について二、三の考察を行ってみることとする。

§. 2 偶然量の平均頻度

例として放射性物質の崩壊現象を考えてみよう。この物質の崩壊定数を λ とすれば、1 個の原子が t 秒間崩壊しないで残る確率 $1-p$ は、

$$1-p = e^{-\lambda t} \quad (1)$$

と表わされる。これより、 $t=0$ で N_0 個の放射性原子があってこれが t 秒間に n 個崩壊する確率 $W(n)$ は、

$$W(n) = \frac{N_0!}{(N_0-n)! n!} p^n (1-p)^{N_0-n} \quad (2)$$

ここで N_0 は十分大きく、かつ $N_0 \gg n$ であれば Stirling の公式

$$x! \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \quad (3.a)$$

および

$$\left(1 - \frac{n}{N_0}\right)^{N_0} \approx e^{-n} \quad (3.b)$$

の関係を利用して(2)式を変形すれば、

$$W(n) = \frac{M^n e^{-M}}{n!} \quad (4)$$

これは平均値 M のポアソン分布であるが、ここで M は

$$M = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \quad (5)$$

と表わされ、 t 秒間に崩壊する平均の個数を示してい

る。

また上式の標準偏差を計算すれば、 λ が十分小さい時には、

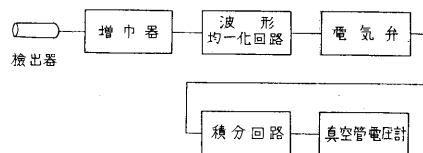
$$\sigma = \sqrt{M} \quad (6)$$

で表わされ、単に平均値の平方根で示される。ただし N は t 秒間に崩壊する平均の個数を示している。

トラヒック理論においても、単位時間中に加入者から発生する呼は(5)式と同じような形で表わされることが知られている。

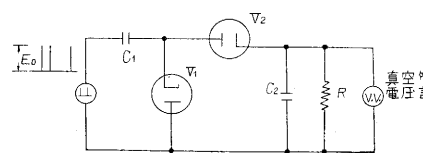
§. 3 計数率計の原理

平均頻度を測定するために従来よく使われている計数



第 1 図 計数率計の構成

率計について考えてみよう。その構成は第 1 図に示すようなものである。シンチレーションカウンタの出力として得られる電気的パルスは不規則な波形をしており、また計数率計は一種の周波数計であるから、このような場合得られたパルスの波形を均一化する必要がある。パルス波形の均一化には通常単安定マルチバイブレータが利用されている。計数率計回路は第 2 図に示すよ



第 2 図 電気弁および積分回路

うに二極管の電気弁回路および積分回路から構成されているのが普通である。以下この回路について多少定量的に解析を加えてみよう。

解析を簡単にするために C_2 と R との並列回路について考え、入力として振幅 E_0 の電気的パルスが加わるものとする。1 個のパルスが加わるとコンデンサ C_2 に電荷 q が加えられるものとし、入力に加わるパルスの平均頻度を n とすれば、 dt 時間中に加えられるパルス数は ndt となるが、一方 C_2 の電荷は R を通して放電される。いま時刻 t_0 に測定を行うものとすれば、 R の端子電圧のうち時刻 t に加えられた電荷の寄与は次のように表わされる。

$$qne^{-(t_0-t)/RC_2} dt \quad (7)$$

RC_2 の時定数に比して十分長い時間を経過した時に測定を行うものとすれば、得られる出力電圧の期待値は次のように表わすことができる。

$$V = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{q}{C_2} n e^{-(t_0-t)/RC_2} dt = q n R \quad (8)$$

ところが

$$q = E_0 C_1$$

なる関係があるから、(8)式は

$$V = E_0 C_1 n R \quad (9)$$

この結果は定性的には次のように説明することができる。単位時間にこの回路に流れ込む電流は nq で、これがコンデンサを充電させ、同時にコンデンサの電荷は抵抗 R を通して放電するが、これら充電量と放電量とがちょうど平衡をとれた状態の端子電圧が(8)式の値となっている。この状態では単位時間に流れ込む電流 nq が抵抗 R に流れ、その電圧降下が出力となって現われるがその値は nqR となり、ちょうど(8)式の値と一致する。

(8)、(9)式より明らかなように R の端子電圧は単位時間中のパルス数に比例するから、これをたとえば真空管電圧計に加えればこの時の読みがその瞬間の平均頻度に比例することとなり、したがって平均頻度を直読することができる。

§ 4. 計数率計の誤差の原因

次に計数率計について特性および誤差の原因を多少くわしく検討してみよう。入力パルスは統計的の量であるからその平均頻度が変らなくても一定時間内のパルス数は時々刻々変化する。したがって V の値もこれにしたがって変動を受ける。測定量として利用するためにはこの変動をできるだけ少なくすることが望まれるわけである。これを検討するためには(9)式で表わされた期待値の標準偏差を考え、その大小を比較すればよい。

次に考える必要のあることは計数率計はコンデンサと抵抗の充放電を利用しているものであり、(9)式を誘導する場合にも入力加わった後 RC_2 の時定数に比べて十分長い時間を経過した場合の状態を考えているということであって、たとえば平均頻度が突然階段的に変化するような場合には、指示は直ちにこれに追従することができず、過渡現象の時間だけおくれで平衡状態に入ることとなる。

これら二つの条件は互いに相反する条件で、たとえば崩壊定数の大きい放射性物質を測定する場合などでは回路の持つ時定数をできるだけ短くすることが必要である。しかしレスポンスを速くすれば統計的変動も大きくなるので、次にこの点について多少くわしく検討を行ってみよう。

測定値の標準偏差は加わるパルスが純偶然的のもので

あれば(6)式に示すように平均値の平方根で表わすことができる。したがって dt 時間中に加えられる電荷の標準偏差の期待値は、

$$q (n dt)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

で表わすことができる。前と同じく測定は $t=t_0$ において行うものとすれば、任意の時刻に加えられた電荷の寄与分は、

$$q (n dt)^{\frac{1}{2}} e^{-(t_0-t)/RC_2} \quad (11)$$

となる。加わるパルスが純偶然的のものであれば、統計論より各時刻の寄与の二乗の和が全体の標準偏差の二乗に等しくなるから、その期待値 ΔV は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} (\Delta V)^2 &= \int_{-\infty}^{t_0} \frac{q^2}{C_2^2} n e^{-2(t_0-t)/RC_2} dt \\ &= \frac{E_0^2 C_1^2 n R}{2C_2} \end{aligned} \quad (12)$$

これより

$$\Delta V = E_0 C_1 \sqrt{\frac{nR}{2C_2}} \quad (13)$$

ΔV と V との比は相対標準偏差と呼ばれ統計的変動の大小を表わす一つの目安となる量であるが、この場合これは次のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2nC_2R}} \quad (14)$$

この値は計数率計を1回だけ動作させてその値を読んだ場合について考えたのであるが、何回も測定を行うことにより誤差は軽減できる。たとえば時間 T の間計数率計を連続して働かせ、その平均値をとると、この値と真の値との差は(14)式の値よりも少なくなるわけで、計算の結果これは次のように表わすことができる。

$$\sigma_2 = \frac{(1+2T/RC_2)^{\frac{1}{2}}}{1+T/RC_2} \sigma_1 \quad (15)$$

次に上に述べた第2の点すなわち計数率計が平衡の状態に入り、指示値が(9)式の値に落ち着くまでの時間について考えてみよう。これには $t=0$ からパルスが加わり始めた時に出力電圧が時間とともに増加してゆく様子を考えればよいわけで、単に(8)式の積分範囲を0から t_0 までとすればよく次のように計算される。

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \int_0^{t_0} \frac{q}{C_2} n e^{-(t_0-t)/RC_2} dt \\ &= E_0 C_1 n R (1 - e^{-t_0/RC_2}) \end{aligned} \quad (16)$$

十分時間が経過した後にはこの値は(9)式に示すように $E_0 C_1 n R$ となる。 $V(t_0)$ が前述の統計的誤差の範囲内に入るまでの時間をとって平衡時間 T_0 とすれば、 T_0 の値は次のようにして求めることができる。

$$E_0 C_1 n R e^{-T_0/RC_2} = 0.6745 \frac{E_0 C_1 n R}{\sqrt{2nC_2R}} \quad (17)$$

すなわち

$$T_0 = RC_2 \left(\frac{1}{2} \ln 2n RC_2 + 0.394 \right) \quad (18)$$

となる。

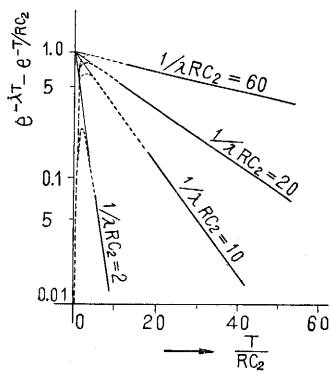
平衡時間を示す 1 例として $t=0$ の時刻から計数率計の入力に放射線検出器の出力パルスを加えた場合を考えてみよう。いま放射性物質の崩壊定数を λ とすれば、任意の時刻 t における平均頻度は

$$\lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (19)$$

と表わすことができる。この場合の計数率計の出力電圧を求めるには(16)式の n に(19)式の値を代入すればよく、次のように計算される。

$$\begin{aligned} V &= \frac{E_0 C_1}{C_2} \int_0^T \lambda N_0 e^{-\lambda t} e^{-(T-t)/RC_2} dt \\ &= E_0 C_1 R \frac{\lambda N_0}{1 - \lambda RC_2} (e^{-\lambda T} - e^{-T/RC_2}) \end{aligned} \quad (20)$$

1 例として $RC_2 = 0.5$ 秒とし λ の種々の値に対して出力の変化する様子を



第 3 図

$$V = E_0 C_1 R \frac{\lambda N_0}{1 - \lambda RC_2} e^{-\lambda T} [1 - e^{-(1 - \lambda RC_2)T/RC_2}] \quad (21)$$

λ がある程度以上小さければ、カッコ内第 2 項は急速に零になる函数であり、測定を始めてから

$$T = \frac{4.6 RC_2}{1 - \lambda RC_2} \quad (22)$$

以上経過すれば第 3 図の実線と点線との差を 1% 以内にする事ができる。

§ 5. 計数率計の得失

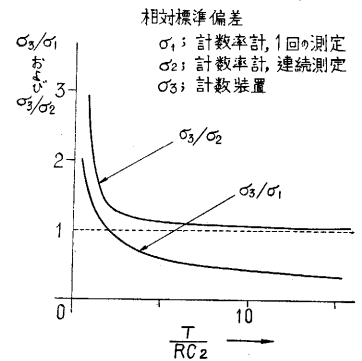
純偶然的パルスの平均頻度を測定する別の方法としてある時間 T だけゲートを開いて入力パルスを標本化し、これを計数回路に入れてもよいが、この場合計数値の期待値は nT で表わすことができる。前節でも述べたようにこの期待値は統計的変動を受けるがこの場合の標準偏差は入力パルスが純偶然的であるとすれば、 \sqrt{nT} となり、したがってこれに対する相対標準偏差 σ_3 は、

$$\sigma_3 = \frac{(nT)^{\frac{1}{2}}}{(nT)} = \frac{1}{\sqrt{nT}} \quad (23)$$

と表わすことができる。そこで以下純偶然パルスを測定するのに §. 3 で述べた計数率計と計数回路とを用いた

場合に考えられる統計的誤差、および測定に必要な計数時間などについて二、三の考察を行ってみよう。

まず入力パルスの平均頻度があまり変わらず、計数率計を連続して使用しその平均値がとれる場合について考えてみよう。この場合には計数率計の相対標準偏差は σ_2 となり、これと T 時間計数回路を使った場合の偏差 σ_3 と比較してみる。考察を簡単にするため、計数率計で測定を始めてから十分時間が経過しており、出力電圧は平衡時の指示を示しているものとする。測定時間 T に対して σ_3 と σ_2 の比を計算してみると第 4 図のようになることがわかる。この

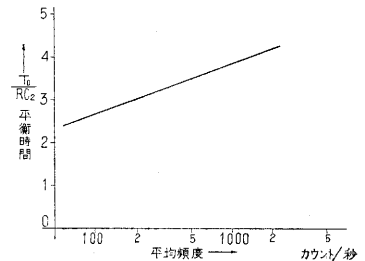


第 4 図 計数率計および計数回路の相対標準偏差

場合興味のあることは測定時間にかかわらず常に $\sigma_3/\sigma_2 > 1$ が成立することであり、したがってこのような条件の下では測定時間をいくら長くしても計数率計による方が統計的変動によって生ずる誤差を少なくして

測定できるため有利である。次に σ_3/σ_1 について考えてみると、 T/RC_2 に対して σ_3/σ_1 をえがいた結果は第 4 図に示してあるようになり、この場合には $T/RC_2 \cong 2$ にしたがって $\sigma_3/\sigma_1 \cong 1$ となって、測定時間の大小により統計的変動の大小が決まることとなる。

次に目を転じて平衡時間を考えてみよう。平衡に要する時間を与える式は(18)であるが、いま $RC_2 = 0.5$ 秒、入力に加わるパルスが毎秒 50, 100, 300, 500, 1,000, 2,000 とした場合に平衡に要する時間を計算すると、それぞれ 1.18, 1.35, 1.62, 1.75, 1.92, 2.20 秒となりこれを図示すれば第 5 図のようになる。



第 5 図 計数率計の平均頻度と平衡時間との関係

これから判断して入力パルスの平均頻度によっても多少の変動はあるが、平衡に要する時間として T_0/RC_2 を 5 ないし 6 またはそれ以上とらなければ十分統計的誤差を少なくして測定できないことがわかる。

次に実用の計数率計について上と同じような計算を行ってみよう。ここに例としてとり上げたのは 1500A 型と呼ばれるもので、積分回路の R および時定数の値は次

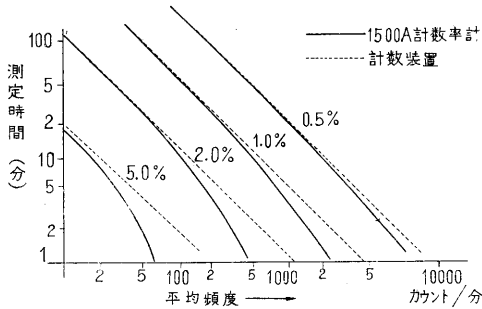
表に示すものである。

この回路構成についてまず最初に測定時間と相対標準偏差の関係の求めてみると第6図のようになる。第4図からも予想されたことであるが、同じ測定時間に対して計数装置による方が、計数率計による場合よりも統計的変動によ

第 1 表

測定範囲 (カウント/分)	R (MΩ)	時定数 (分)
200	30	1
600	30	1
2,000	20	2/3
6,000	20	2/3
20,000	10	1/3

る誤差が常に上まわっている点に注意する必要がある。すなわちこの場合には計数率計による方が常に有利であ

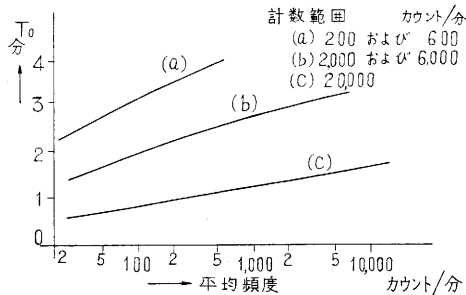


第 6 図 計数率計(1500A)および計数回路の平均頻度と所要測定時間

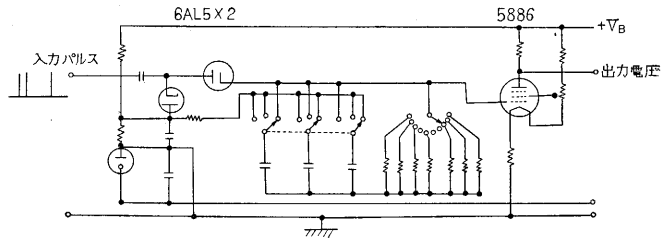
る。次に最小平衡時間をとって考えてみよう。各測定範囲について毎分の平均頻度と最小平衡時間との関係の求めてみると第7図のようになることがわかる。この結果と第1表の時定数とから平衡に必要な時間は RC_2 の時定数の4,5ないしそれ以上であることが結論される。

§. 6 計数率計の回路構成

ここで計数率計の実際の回路例をあげてみよう。第8



第 7 図 計数率計(1500A)の平均頻度と最小平衡時間
図は 100 ないし 100,000 カウント/分の測定ができる回路である。図には示してないが、この装置では図の回路の前にまず単安定マルチバイブレータを用いて波形を均



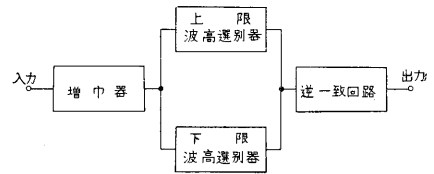
第 8 図 計数率計の回路構成例

一化しており、その後に計数率計回路に加えている。電気弁の前には計数回路を設けているが、これにより入力に加わるパルスを何分の1かに通降して計数の範囲を自由に変えることができるようになっている。真空管電圧計の入力回路には電位差計用真空管 5886 を用いてあり、このため積分回路の抵抗を十分大きくすることができる。

§. 7 計数率計の高速化

以上の結果から純偶然パルスの平均頻度が短時間中に比較的大きく変動する場合には、計数回路を使えば統計的誤差が同じで計数率計よりも短時間で測定できるため有利であることがわかった。この点に着目し、筆者らは従来の計数率計を改良して高速度測定のできる装置を構成し実験を行った。この装置の応用として現在考えているものはパルス波高分析器および比較的減衰の速い放射性物質の測定である。

パルス波高分析器は、たとえばシンチレーションカウンタなどのようにその出力として振幅および平均頻度に変化のあるパルスが与えられた時に、ある二つのレベルの間に対応する信号のみを取り出してこれを計数する回路である。このうち、もっとも簡単なものはシングルチャネル波高分析器で、その構成を第9図に示してあるが、二つの波高選別器と付属の回路を加えたものである。



第 9 図 シングルチャネル波高分析器の構成

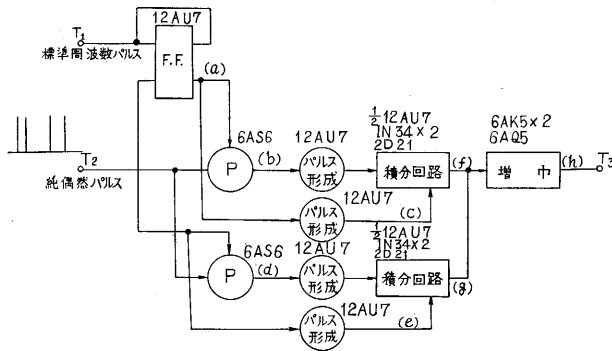
逆一致回路は下限の波高選別器のみが動作した時に出力を得るための回路である。このような波高分析器で高速度の測定を行わせるためには波高選別器のレベルを段階的に変化させ、各出力を順次に読み取ってゆけばよいが、高速化するためには各段階の時間を統計的誤差の許す限り短くすることが必要である。各チャネルの出力パルスはかなり大幅に変化するものと思われるので、この目的には計数回路を使うのが有利である。また前述の結果から時間的に速かに崩壊するような物質の測定を行う場合には計数回

路を用いた方が有利であることがわかる。

次に筆者らの工夫した回路について簡単に説明を行ってみよう。

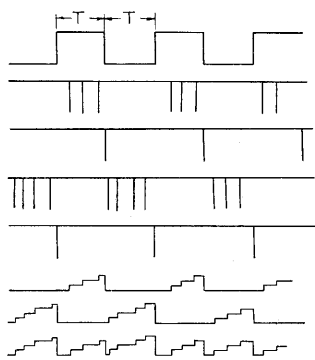
§. 8 回路構成

工夫した回路の構成を第 10 図に示してある。T₁ には標準周波数パルスを加え、これでフリップフロップ F. F. を開閉し、標本化時間 T をつくっている。P と記してあるのは五極管ゲートで、フリップフロップの出力電圧を五極管の第 3 グリッドに加えてこれにより開閉を行っている。五極管ゲートの出力は第 11 図 (b) および (d) に示すように T 時間おきに交互に標本化されている。このおのおのの出力を計数回路に加えればよい。計



第 10 図 回路構成

数回路としてはフリップフロップを用いた 2 進式のもの、デカトロン、E 1 T などのように 10 進法により計数する回路もあるが、ここでは得られた情報量を記録計に加え、連続記録することが望ましいから、上述のような方法は不便であり、得られたパルス数をアナログの量に

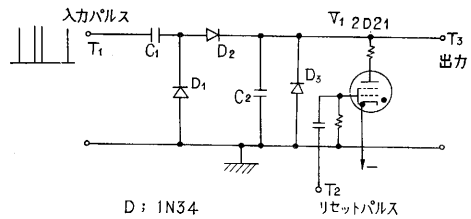


第 11 図 各部波形

変換するのが便利であるから第 12 図に示すように計数値をコンデンサの電圧として記録する蓄積型のものを採用した。以下この回路について簡単に説明をしよう。

第 12 図で T₁ は入力パルスが加えられる端子、T₂ はリセットパルスの入力である。C₂ はパルス電圧を蓄積するためのコンデンサ、C₁ はエネルギー付加のために用いられる比較的小容量のコンデンサである。入力パルスが加えられる前の C₂ の電位を零とし、入力パルスの振幅を E₀ とすれば、最初のステップが加わるときの出力電圧は、

$$E_0 C_1 / (C_1 + C_2) \quad (24)$$



第 12 図 積分回路の構成図

である。第 n 番目の入力による出力電圧の変化分は、
 $n-1 \Delta E_n = (E_0 - E_{n-1}) C_1 / (C_1 + C_2) \quad (25)$
 で表わされるが、いま E_n を

$$E_n = A e^{-kn} + B \quad (26)$$

と置けば、これと

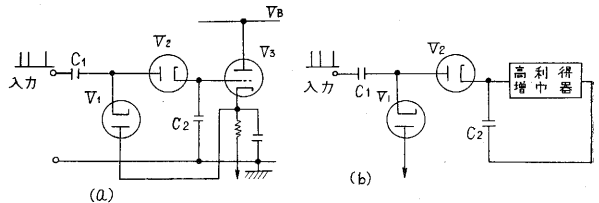
$$E_n = E_{n-1} + n-1 \Delta E_n \quad (27)$$

とから、C₂ の端子電圧は次のように計算される。

$$E_n = E_0 \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)^n \right] \quad (28)$$

この方式では n と E_n とは必ずしも比例関係にないが、線型のステップを得るためには第 13 図に示すように利得 1 のカソード・フォロワを使う方法、高利得増幅器を利用する方式などが考えられる。

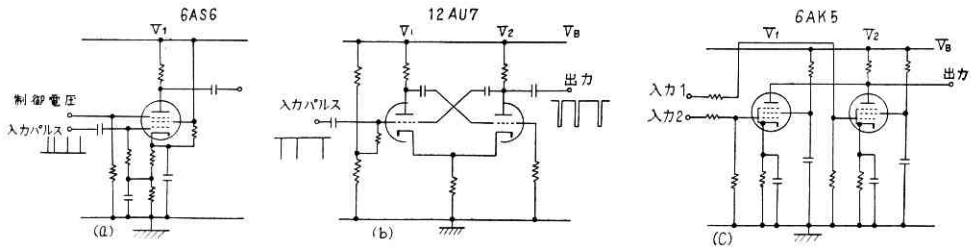
第 10 図のフリップフロップのプレートに生ずる矩形波の終端に対応した時刻にパルスをつくり、(第 11 図 (c) (e)) これをリセットパルスとして第 13 図の T₂ に加える。すなわち蓄積用コンデンサと並列にサイラトロンが接続してあり、リセットパルスによりサイラトロンが放電すると C₂ に蓄積された電荷は放電して初めの状態に戻る。このようにして得られた二組の出力



第 13 図

を増幅器に加えてこれらを混合しているがその出力波形を第 11 図 (h) に示してある。この波形をたとえばペン書き記録計に加えればよいが、以下回路の各部について多少くわしく述べてみよう。

前述のように第 10 図で P と記してあるのは五極管のゲートである。五極管としては第 3 グリッドの目が細かくそのグリッド制御特性のよい 6AS6 を使い、フリップフロップの出力電圧をその第 3 グリッドに加えてあり、制御電圧が高い時だけ 6AS6 が動作し、出力が得られるようになっている。制御電圧はフリップフロップの互いに反対側のプレートから取っているの、入力パルスは一定時間だけ交互に標本化することができる (第 14 図 (a))。



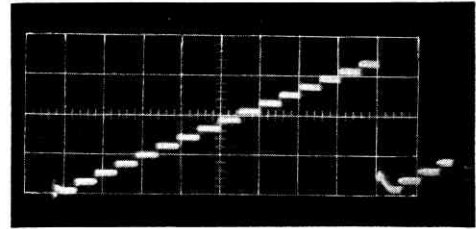
第 14 図 各部の回路構成

パルス波形の均一化には普通単安定マルチバイブレータが用いられる。この回路は第 14 (b) 図に示すような回路で、2本の三極管のうち通常は V_2 がカットオフとなっているが、負の入力パルスが加わるとこれが導通し、逆に V_1 がカットオフとなる。回路の時定数により順次にこのカットオフがとけてもとの状態に復旧するため、入力に加わった時だけ一定の時間継続する一定振幅のパルスを出力として得ることができる。

混合回路の初段は第 14 図(c) に示すように 2本の五極管のプレート負荷を共通にした回路で、その出力は増幅器を経て記録計に加えられる。入力パルスの平均頻度が比較的少なく、したがってパルス測定時間を比較的長くとらなければならない場合には、測定回路の入力インピーダンスを大きくするためにたとえば 5886 のようなグリッド電流の少ない真空管を使い、リセット用としてもサイラトロンに代りにたとえばリレーを使う必要が起ってくる。

§. 9 回路の動作

構成した回路について実際にパルスを加えて実験を行った。入力パルスとして毎秒 2,000 程度のものを用い、これを通降したパルスを第 10 図の T_1 に加えてフリップフロップを開閉し、標準化時間をつかった。通降段数をいろいろに変化して標準化時間中の入力パルス数を変化させてその都度各部の波形を観測した。出力波形の例を第 15 図に示してある。標準化時間中のパルス数が数個から数千個の間で回路はかなりうまく動作し、しかもその出力電圧は(28)式の関係を満足していることを確かめた。ここで測定時間を限定するものは、リセットパルスがサイラトロンに加わり、放電が起ってコンデンサの電荷がすべて放電されるまでに要する時間である。第 15 図 (a) からこの時間は約 100 マイクロ秒であること



第 15 図 (b) (2.5 ミリ秒/cm)

がわかるから、標準化の繰返し周波数は約 10 キロサイクル程度が限度であることがわかる。これよりさらに高速度の現象を測定するためには電子管スイッチ回路を使う必要がある。

§. 10 結 言

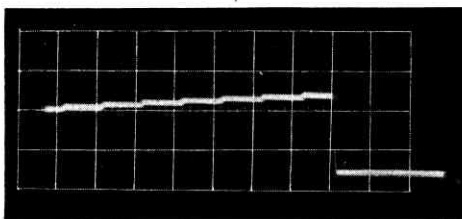
以上無作為パルスの統計的性質、ならびにその平均頻度測定のための二、三の方式を比較検討し、その高速度化の一方式を提案した。

当研究室では数年来擬似トラヒック実験を行っているが、これは純偶然パルス発生器と電子管のパルス回路とを組合わせて定位型ないしは待時式交換線群の擬似回路を構成し、電話トラヒックの模擬実験を行うものであるが、ここで考案した平均頻度測定方式はこの実験でも有力な武器として利用することができよう。

さらに筆者らはこのような計数装置を利用したパルス波高分析器、および減衰の速い放射線測定装置などを計画しているが、これらについては機会を改めてくわしく述べることにしよう。(1958. 3. 29)

文 献

- (1) L. I. Schiff, R. D. Evans, "Statistical Analysis for the Counting Rate Meter," Rev. of Sci. Inst. 7 (1936) p. 456
- (2) A. G. Bousquet, "Counting Rate Meters versus Scalers," Nucleonics. 4 (1949) Feb p. 67
- (3) A. F. Kip., A. G. Bousquet, R. D. Evans, W. N. Tuttle, "Design and Operation of an improved Counting Rate Meter" Rev. Sci. Inst. 17 (1946) p. 323
- (4) 森脇・河村・久保「パルス平均頻度測定の一方式」昭和 33 年電気四学会連合大会論文集, 1062.



第 15 図(a) (500 マイクロ秒/cm)