

吊橋の減衰係数の実測結果

岡本舜三・久保慶三郎

1. まえがき

吊橋は他の形式の橋、トラス橋、ガーダ橋などに比して揺れやすい、換言すれば減衰係数が小さい。橋のたわみ剛性が小さくなると揺れやすくなるようにも考えられるが、その間の関係はよくわかっていないようである。吊橋の減衰係数を知る主な目的はそれが吊橋の地震時の安定性を論ずる上の重要な値であるからである。著者などが吊橋のケーブルに最も大きい応力を発生せしめる対称のたわみ振動に共振する場合の地震動 ($a \times \sin pt$ と仮定する) について計算した結果によると、吊橋の中央点のたわみ b は次式で与えられることが判った。

$$b = \frac{8waK}{pcn\pi H_w \left(2 + \frac{LK}{E_c A_c} \right)}$$

ただし

$$K = \frac{3EI_0}{h^3} + \frac{1}{\frac{L_1}{E_c A_c} + \frac{w^2 l_1^3}{H_w^3} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{2}{m} \tanh \frac{m}{2} \right) \right\}}$$

しかし、上式を導くときに補剛桁のたわみ曲線 η は

$$\eta = b \sin \frac{n\pi x}{l}$$

と仮定したのであるが、特に $n=1$ の場合は実験結果からすると、

$$\mu = b \sin^2 \frac{\pi x}{l}$$

とした方が適当と思われた。この仮定のもとに計算すると、

$$b = \frac{8waK}{3H_w pc \left(2 + \frac{LK}{E_c A_c} \right)}$$

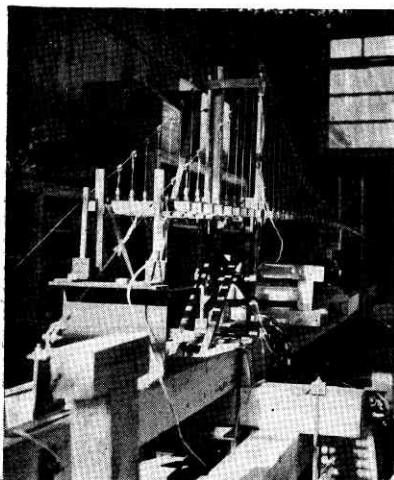
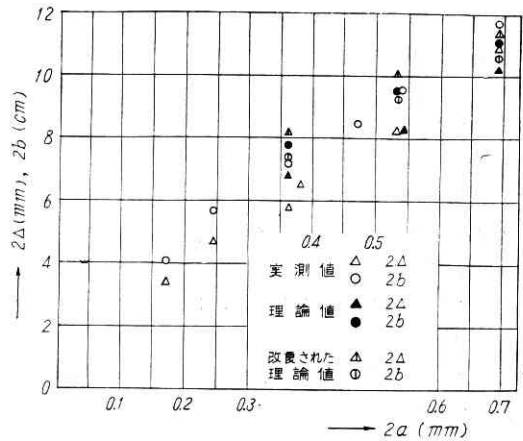


写真1 吊橋模型実験

となる。

これらの式は振動実験室内に作られた吊橋の模型(全長=5.48m)について行った実験によってその妥当性がたしかめられているので(第1図参照)、結局吊橋の中央点のたわみは減衰



第1図 地動振幅と吊橋の中央点のたわみとの関係係数 C に逆比例しており、この意味において吊橋の減衰係数の値が吊橋の地震時の安定性に重要な意味をもっていることが指摘されるわけである。

動力学的に吊橋の耐震性を考える場合に必要である減衰係数そのものはあまり実験されたり、また研究されてはいないようである。

Bureau of Public Roads で 36'10" の模型について対数減衰率を実測したところによると $\delta = 0.006 \sim 0.017$ で δ は振幅に大して関係していない。

F. Bleich 博士は吊橋の補剛桁の支点における摩擦、あるいはコンクリート床版と床桁との間の摩擦などによるエネルギーの消失を計算したが、これは実験の裏付がない。

Washington 大学の Farquharson 教授は Bureau of Public Roads と協同で Twin 橋(経間長=49m)、および Tarr 橋(経間長=81.6m)で対数減衰率を求め次の結果を得ている。Twin 橋について

- 1) 対称の1次振動以外はある振幅までは対数減衰率が振幅と共に大きくなるが、それ以上では振幅の増加につれて減少してゆく。
- 2) 対称の1次振動では対数減衰率(縦軸)と振幅の曲線は下に凸で、ある振幅で極小値を示す。
- 3) 対数減衰率の値は 0.03~0.09 であるが、対称1次振動のときは 0.07~0.15 であった。

Tarr 橋では

- 1) 対称1次振動では対数減衰率は振幅と共に減少しており、その値は 0.40~0.16 である。
- 2) 非対称1次振動では対数減衰率はほとんど振幅は無関係で 0.15 である。

従来の研究を総合すると、吊橋の減衰係数については測定された例が少なく、その order も決まっておらず、その性質の解析はほとんど手がつけられていない状態である。したがって吊橋の耐震性を研究してゆく上に、その減衰係数を実測して、その性質を明らかにしておきたいと考え、今年 8 月に本邦の経間長 100m 以上（栄橋は 98.3m）の吊橋 7 橋について現場実験を行った。

2. 減衰係数について

吊橋の減衰の原因は流体摩擦か Coulomb 摩擦かは十分に研究されたわけではないが、速度に比例した流体摩擦による減衰と考えてよいと思う。なぜならば、流体摩擦の場合は振幅は e^{-nt} の形で減衰するが Coulomb 摩擦の場合は時間に比例して減衰することは振動学から明瞭であり、一般に吊橋の減衰の形は時間に比例してはいないように考えられるからである。

速度に比例した減衰力が働く場合に減衰を表わすのに普通は対数減衰率 λ が用いられているが、工学的には減衰常数が用いられる。これは 1 自由度のバネの振動方程式を

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + p^2x = 0$$

とかくと、 $h = n/p$ で定義され、 $h = 1$ のときは極限減衰 (critical damping) とよび、無周期運動と減衰振動との限界になる。強制振動を受ける振動体の振幅の増加を調べるにはこの h を使うのが便利である。 h と λ との関係は

$$\lambda = 2\pi h$$

である。

λ または h は振幅の減衰の様子、あるいは振動倍率を表わすにとどまり、減衰係数、または減衰力の性質は明らかにならない。バネの場合は h が求められれば、減衰係数は h に振動数 p をかけ、さらに錘の質量を掛ければよいが、橋の場合は減衰力 F_d をたわみ速度に比例するものと考え、 $F_d = C d\eta/dt$ としたときの、減衰係数 C と振幅の減衰比との関係を求めてみよう。

質量 m の物体が $b \sin pt$ で表わされる運動をしているときに、この物体のもっているエネルギーは

$$\frac{m}{2} (b\dot{p})^2$$

である。いま振動の 1 cycle の後に振動が b から b' になったとすると、減衰比 λ_d は $\lambda_d = b/b'$ であるから、1 cycle の間に失われるエネルギー W は

$$W = \frac{m}{2} p^2 \{b^2 - b'^2\} = \frac{m}{2} p^2 b^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_d^2}\right)$$

となり、失われたエネルギーもとのエネルギーとの比をエネルギーの減少率 ρ とすると

$$\rho = \frac{W}{\frac{m}{2} p^2 b^2} = \left(1 - \frac{1}{\lambda_d^2}\right)$$

となる。一方において、橋のたわみ曲線が $b \sin \frac{n\pi x}{l}$ で

あるとすると、橋桁のエネルギー V は

$$V = \int_0^l \frac{w}{2g} \left(pb \sin \frac{n\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{wp^2 b^2}{2g} \cdot \frac{l}{2}$$

ここに w は単位長さ当りの橋の重さである。

また 1 cycle の間に減衰力 F_d が働いて失うエネルギー ΔV は

$$\Delta V = \int F_d d\eta = \int_0^T F_d \cdot \frac{d\eta}{dt} \cdot dt = \frac{\pi pb^2 cl}{2}$$

となる。故に $\Delta V/V$ と ρ とが等しいはずであるから

$$1 - \frac{1}{\lambda_d^2} = \frac{2gcn}{wp}$$

したがって

$$C = \frac{wp}{2gcn} \left(1 - \frac{1}{\lambda_d^2}\right)$$

となる。

$\lambda = \log \lambda_d$ であるから λ と C との関係は

$$C = \frac{wp}{2gcn} \left(1 - \frac{1}{e^{2\lambda}}\right)$$

である。

3. 減衰係数のはかり方

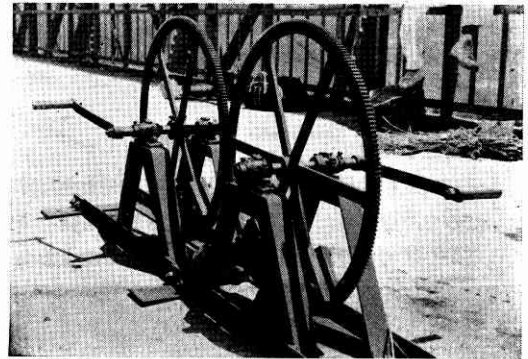


写真 2 振動起振機

振幅の減衰比、および減衰常数 h は減衰自由振動の記録から求めた。吊橋にたわみを与えるには写真 2 に示す起振機を用いた。この起振機は今回の実験のために携帯用を主眼としてなるべく軽量に作られている。全重量は約 70kg で偏心重量は 2ヶで 25.3kg、偏心距離は 25 cm、車輪の外径は 58.8cm である。2ヶの車輪が逆回転するので、上下方向に正弦曲線で表わされる力がかかる。一般に吊橋の場合は橋の自己振動数は他の構造物のそれに比して小さいので、大きい遠心力 (mrv^2) を出すためには大きい質量をつける必要がある。

この起振機を吊橋の中央点に据え付け、吊橋の自己周期と同一の周期で回転させ、振動振幅が増大し定常状態に達したところで急に回転を停止させると、吊橋は減衰自由振動を行うのでそのときの減衰比を測定した。起振機の回転数は 1 秒に 2.3~0.7 回であったので、起振機も容易に回転を停止させることができた。

第1表

吊橋名	径間長(m)	有効幅員(m)	Sag(m)	単位長さ当りの重量(kg/m)	補剛桁のI(cm ⁴)	府県名
栄橋	37.2+98.2+98.2+37.2	4.6	11.0	1744	3.01×10 ⁶	千葉, 茨城
三好橋	31.5+139.9+31.5	6.0	16.8	2930	5.75×10 ⁶	徳島
八雲橋	114.0	5.0	12.0	2718	3.78×10 ⁶	京都
旅足橋	114.0	3.6	11.2	1300	4.39×10 ⁶	岐阜
瀬戸橋	125.0	3.6	10.4	958	2.19×10 ⁶	静岡
原田橋	137.6	5.5	15.0	2250	7.04×10 ⁶	静岡
鷹巣橋	163.0	5.3	18.0	1777	5.49×10 ⁶	愛知



写真3 八雲橋

橋に強制振動を与える起振機の周期を変化させ、得られた共振曲線から減衰常数 h を求める方法も用いたが、回転が手動であったため、メトロノームを用いて回転周期を一定になるように努力したが、やはり良好な結果を得ることができず、求められた減衰常数 b は減衰自由振動から求めた b に比してかなり大きい値を示した。

4. 測定した橋³⁾

本研究は比較的長い吊橋の減衰係数の実測を主な目的としたので、測定した橋も本邦で架設された吊橋の中で橋の塔から塔までの距離が100m以上のものの中から

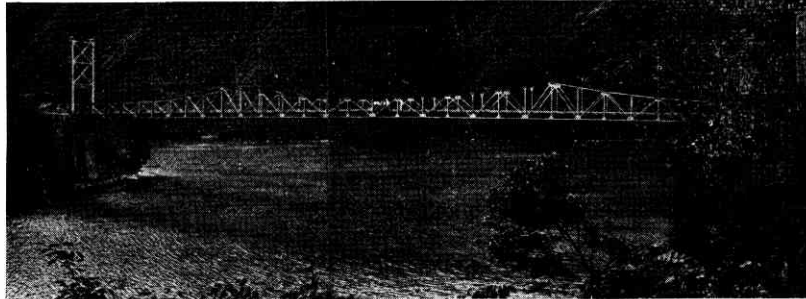


写真4 旅足橋

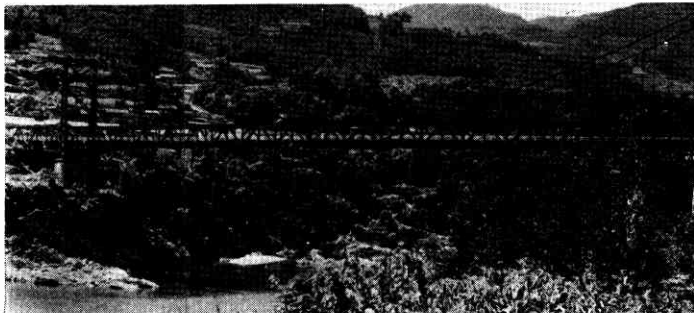


写真5 三好橋

橋に強制振動を与える起振機の周期を変化させ、得られた共振曲線から減衰常数 h を求める方法も用いたが、回転が手動であったため、メトロノームを用いて回転周期を一定になるように努力したが、やはり良好な結果を得ることができず、求められた減衰常数 b は

7橋を選んだ。各橋の寸法、幅員などを第1表に示す。

吊橋の構造と減衰係数との関係がまだ十分研究されていないので、各種の構造の吊橋を測定したのであるが、主な構造上の特徴をあげると

1) 補剛桁の構造の異なるもの——八雲

橋は補剛桁がプレートガーダ形式で他の橋はトラス形式である。

2) 補剛トラスの上弦材の有無——旅足橋は補剛トラスの上弦材はケーブルが代用されており、ケーブルはトラスを吊っていると同時に、トラスの上弦材をも兼ねている構造で、新しい設計になっている。

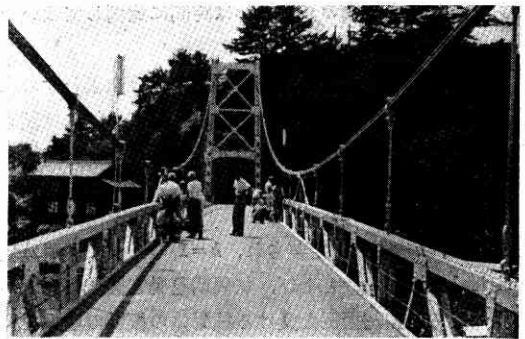


写真6 瀬戸橋

3) 側径間の有無——橋長が長くなると、塔と岸との間の側径間にも主径間のケーブルに吊した橋が架設されるが、側径間をつけると建設費が高くなるためにこの形式は少ないが、今回実験した橋の中では、三好橋と栄橋が側径間のある橋であった。

4) 補剛トラスのたわみ剛性の大小——同一の径間長、および幅員ではないが、たわみ剛性のちがう橋の減衰係数を測定することができた。

5) Storm Cable の有無——Storm Cable とは暴風による吊橋の横振動を小さくする目的

で、吊橋の補剛桁を横方向に引張っているケーブルであるが、この Storm Cable のある橋は瀬戸橋、鷹巣橋で、他の吊橋は横方向の剛性が大きいか、または特殊な振動減衰装置がつけてあった。

以上の構造上の特徴による減衰係数の変化のほか、径間長による減衰係数の変化、振動振幅と減衰係数との関係などを明らかにすることが本研究の目的であった。特に振幅と減衰係数との関係が明らかにされて

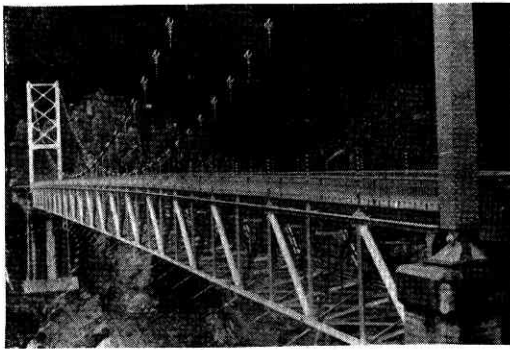


写真 7 鷹巣橋

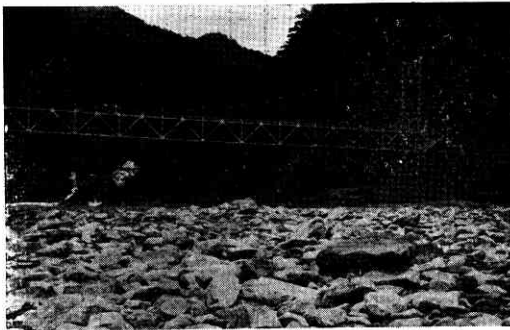


写真 8 原田橋

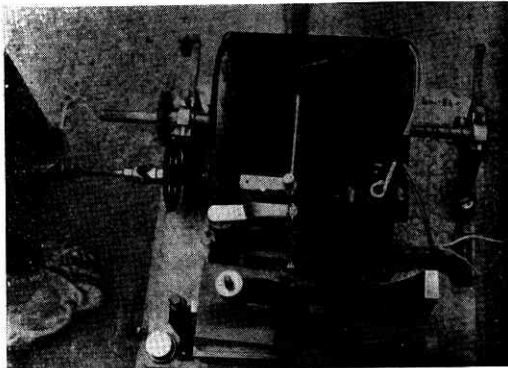


写真 9 原田橋の振動記録中の地震計

ないと、地震時のように大きい振幅で振動する場合の吊橋の安全性を究明する場合に、小振幅の減衰係数と大振幅のそれとが著しく相違している場合は小振幅に対する減衰係数の値ではほとんど意味がなくなってくるので、振幅による減衰係数の研究が必要であった。しかしながら先述のように振動を発生させるのに携帯用の起振機を用いているので、得られる振幅も小さいことが予想されたので、原田橋で起振機による振動測定と同時に大振幅の減衰係数について実測することにした。起振機による振動振幅の測定値は八雲橋の 6.2 mm を除いては、2~3 mm 程度の振幅であった。

原田橋は架橋地点が佐久間ダムのすぐ下流で、発電所放水路の上流であるため、平時はほとんど川に水がなく河原に機械を設置して下から引張って大きく変位させる

ことも可能であった。最大変位は 55mm であった。

対称の振動を発生させるために吊橋の補剛トラスの中央点にかけたロープを引張るのであるが、ロープを掛ける点の部材に設計で予想していない力をかける必要があったので、部材を補強した。ロープは吊橋の固有振動周期と同一の周期で引張ったので、振幅は次第に増加し大きい振幅を得ることができた。一回だけの载荷で大きい変位を与えるには大きい力が必要で、部材の補強も大工事になるが、周期的な力を加え、共振による振幅の増加を利用したので比較的小さい力で所期の目的を果すことができた。なお減衰自由振動から減衰比を求めるときにロープの影響が入ることをおそれて、ロープの頂部が大きい変位が得られたところで切断するようにした。

5. 実験結果について

実測した減衰自由振動の記録から対数減衰率、あるいは減衰常数が得られるが、さらに減衰係数を求めるには $n = hp$ であるから、 p も求めなければならない。はじめに各吊橋の固有振動数の実測結果と計算値とについて述べることにする。

吊橋の固有振動数の計算式は次の仮定から導かれる。

- 1) 塔の頂部では水平方向の変位は小さい。
- 2) ケーブルと補剛桁とを結合している吊材は伸縮が非常に小さくて無視される。
- 3) 減衰力は小さいので、第一近似として減衰力を無視して計算する。

吊橋の垂直方向のたわみの振動方程式は

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - H_w \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{w}{H_w} \bar{h} = 0$$

である。この方程式を境界条件と、塔頂部の水平変位を無視するという適合条件とから求めると、振動数方程式は

$$\frac{\phi}{\sqrt{2}} Z - \frac{Z+1}{\sqrt{Z-1}} \tan \frac{\mu}{2} - \frac{Z-1}{\sqrt{Z+1}} \tanh \frac{\nu}{2} - \frac{L}{E_c A_c} \frac{\phi^3 H_w^2}{32 \sqrt{2} w l f} Z(Z^2 - 1) = 0$$

となり、この式を用いて各吊橋の振動周期を求めて実験値を比較すると第 2 表のごとくなり、主径間が 2 ケでさらに側径間が付随している栄橋を除くと、大体計算値と実験値は一致していることが判明した。栄橋は中央の塔

第 2 表

吊橋名	実測値	計算値	近似計算値 (I)	近似計算値 (II)	$s = W/l$
栄橋	0.986秒	0.67秒	1.13秒	1.00秒	5.19ton/cm
三好橋	1.20	1.24	1.29	1.14	9.65
八雲橋	1.51	1.44	1.93	1.69	3.24
旅足橋	0.93	0.97	0.94	0.83	6.50
瀬戸橋	0.53*	0.50*	1.86	1.63	1.35
原田橋	1.25	1.43	1.36	1.20	6.49
鷹巣橋	0.63*	0.71*	1.58	1.38	4.53

〔註〕*は対称の 2 次振動の周期である。

の頂部が移動して、計算の仮定の適合条件が満足されていないため、計算による周期の方が短くなっているものと思われる。なお振動周期の近似解も求めたので並記しておいた。

吊橋の固有振動周期の計算値を、第2表の実験値と比較すると、栄橋を除いて大体近似した値を得ることが判明したが、更に近似解と実験値との比較も行った。

桁の中央に単位の荷重が載荷されたときの中央点のたわみを s とし、桁の重さ wl の α 倍の重さが桁の中央点に集中していると考え、バネの振動と同じになるため、振動周期 T_1 は

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha wl}{g}} \cdot s$$

で与えられる。

いま振動時の桁のたわみ曲線が静たわみ曲線と同じであると仮定すると、 $\alpha = 17/35$ となる。 s は重量の判明している自動車 W を吊橋の中央点で停止させたときのたわみ d を田辺式たわみ計⁴⁾を用いて測定すれば、 $s = d/W$ から求められ、したがって T_1 が計算される。 T_1 の値は第2表の近似計算値 (I) に示してある。しかしながらこの T_1 の値と実験値とは補剛桁のたわみ剛性の小さい吊橋ほど異なっていることが判明したので、静的のたわみ曲線を $b \sin^2 \frac{\pi x}{l}$ と仮定して計算すると、 $\alpha = 3/8$ となり、この値を用いて計算したものが第2表の近似計算値 (II) である。この値からみると、吊橋の対称の1次振動のたわみ曲線は $b \sin^2 \frac{\pi x}{l}$ とした方が実際に近いものを表わしていることが判るが、このことは研究所内の模型実験結果からも明らかにされている。

第3表

吊橋名	減衰常数	与えた最大振幅
栄橋	0.0037 ± 0.0014	1.49mm
三好橋	0.0063 ± 0.0017	2.09
八雲橋	0.0048 ± 0.0011	6.21
旅足橋	0.0059 ± 0.0008	3.48
瀬戸橋*	0.0036 ± 0.0010	1.56
原田橋※	0.0074 ± 0.0012	0.98
原田橋※	0.0037 ± 0.0003	54.2
鷹巣橋*	0.0122 ± 0.0041	0.58

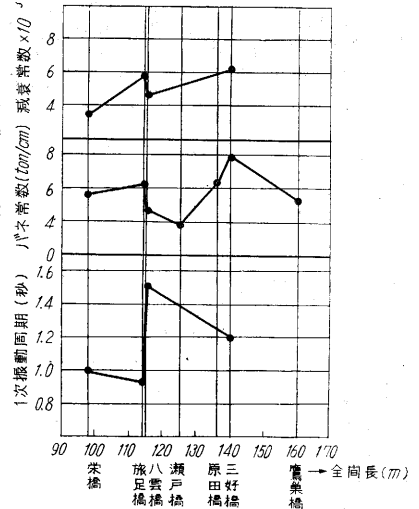
註 * 2次振動の実験した橋
 ※ 大振幅の実験した橋

減衰自由振動の減衰比から減衰常数を求め、第3表の結果を得た。実験結果から大スパンの吊橋の対称一次振動の減衰常数は 0.004~0.006 の間にあり、振動の振幅と減衰常数との間にはあまり明瞭な関係はなく、特に大振幅によって減衰常数は増大するものではないと思われる。

径間長に対する1次振動周期、バネ常数、減衰常数を図にしたのが第2図である。振動周期は単位長さ当りの重量、補剛桁の I, その他が影響しているのだから複雑であるが、バネ常数は振動周期と逆比例的関係にあるように思われ、またバネ常数の大きい吊橋は減衰常数も

大きくなって、
 いると考えられる。

減衰常数に
 およぼす吊橋
 要素の影響に
 ついては今後
 の研究問題で
 あり、この解
 析が進めば減
 衰常数を増加
 させる方法に
 ついての研究
 も進歩するも
 のと思われる。



第2図

6. あとがき

本研究は若戸橋の耐震研究に付随して道路公団若戸橋調査事務所(川崎所長)のご援助によって行った研究であり、千葉県、徳島県、京都府、静岡県、愛知県各県の土木部長、道路課長始め道路課の諸官、および建設省土木研究所原田技官、大橋技官のご協力によって遂行することができた次第で本稿を終るに当って厚くお礼申上げる次第である。また烈暑の中を半月余にわたって実験に協力した研究所の中村教官、加藤勝行、及川典雄、朴京植の諸君にも深謝する。(1959. 11. 16)

文献

- 1) The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges F. Bleich その他3名著 1950 Structural Damping of Suspension Bridges, F. Bleich & L.W. Teller 著, Trans. ASCE Vol. 117 (1950)
- 2) Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, Farquharson 著 Washington Univ. Bulletin 116 part 5. (東大平井教授から借用)
- 3) 鋼橋 (III) 平井敦著 橋梁参考図表

記号の説明

- C: 減衰係数 I_0 : 塔の断面2次モーメント
- I: 補剛桁の断面2次モーメント h : 塔の高さ
- f: サグ w : 吊橋の単位長さ当りのケーブル片側重量
- l_1 : 側径間長 l : 径間長 L_1 : 側径間ケーブル全長
- L : 径間ケーブルの全長 a : 地震動振幅
- $H_w = wl^2/8f$ A_c : ケーブルの断面積
- \bar{h} : 振動時のケーブルに働く水平反力
- $\theta = H_w l^2/EI$, $Z = \sqrt{1+32fp^2/\theta^2 g}$,
- $\mu = \theta \sqrt{Z-1}/\sqrt{2}$, $\nu = \theta \sqrt{Z+1}/\sqrt{2}$